This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

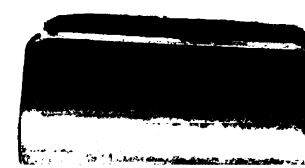
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

UC-NRLF
$B 85 872



EINLEITUNG

IN DIE

THEORIE DER BINÄREN FORMEN

VON

F. FAÀ DI BRUNO.

MIT UNTERSTÜTZUNG VON PROFESSOR M. NOETHER

DEUTSCH BEARBEITET

VON

Dr. THEODOR WALTER.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1881.

L 4201
F 3

26118

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorrede.

Die mächtigste Disciplin der modernen Algebra, die Theorie der Invarianten und Kovarianten der algebraischen Formen, ist zwar unter den Händen einiger grossen Forscher rasch emporgeblüht, allein kaum in die weiteren Kreise der Studierenden gedrungen. Dies liegt vor allem daran, dass das Quellenstudium dieses bereits hochentwickelten Wissenszweiges durch die eigenartige, in verschiedene Symbole gekleidete Formelsprache der englischen und deutschen Meister sehr erschwert war, und dass keine von dieser Symbolik unabhängige Einführung existierte, welche die leitenden Ideen dieser Wissenschaft klar hervortreten liess.

Es ist ein Verdienst des Herrn Chevalier F. Faà di Bruno in Turin, eines Mitarbeiters an der Theorie zur Zeit ihrer ersten Entwicklung, eine solche Einführung gegeben zu haben. In seinem im Jahre 1876 zu Turin in französischer Sprache erschienenen Werke werden die ersten Hauptlehren der Invariantentheorie, gestützt auf die Arbeiten von Cayley, Sylvester und Hermite, bis zu den neuesten Ideen und Methoden entwickelt, so dass, wenn man etwa Clebschs „Binäre Formen“ noch anschliesst, die Übersicht über das Gebiet eine vollständige wird. Der Inhalt umfasst zunächst die Theorie der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung, sodann die wesentlichen Eigenschaften der Invarianten und Kovarianten, die sowohl als Funktionen der Koefficienten, als auch der Wurzeln aufgeführt werden.

Es sei hier gestattet, einen diesem Werke vorgedruckten Brief des Herrn Professor Gordan zu reproduzieren. Derselbe schreibt:

„Ich habe Gelegenheit gehabt, Ihr Buch über die binären Formen zu lesen und habe mich sehr darüber gefreut, denn ich finde es wohl geeignet, den Leser mit der Theorie der Invarianten vertraut zu machen. Der Stoff ist durchsichtet und übersichtlich geordnet, die Darstellung einfach und klar, an vielen Stellen elegant. Selbstverständlich können die vielen und verschiedenen Untersuchungen auf dem Gebiete der neueren Algebra darin nicht aufgeführt sein, das würde zu weit führen und dem Zwecke des Buches widersprechen; aber es führt in die Theorie ein und befähigt den Leser, die ihm sonst nur schwer verständlichen Originalarbeiten selbst zu studieren.

Sie haben durch dieses Werk der Wissenschaft einen Dienst geleistet, welchen sie dankbar anerkennen wird, indem Sie eine schmerzlich empfundene Lücke ausfüllten. 29./9. 1875."

Eine weitere Befürwortung ward dem durch Gordans Namen so wohlwollend inaugurierten Werke in einem Referate der „Fortschritte der Mathematik, 1876" durch Herrn Professor Noether in Erlangen zu teil, der daselbst schreibt:

„Zur Einführung in das weite Gebiet der invarianten-theoretischen Forschungen, die in rascher Entwicklung jetzt schon alle Zweige der Mathematik durchdringen, hat bisher nur das Salmonsche Werk „Algebra etc." dienen können. Auch dieses ist mehr Hand- als Lehrbuch . . . . Die hiernach bestehende Lücke sucht das vorliegende Lehrbuch auszufüllen. Dem Salmonschen Buche gegenüber ist es viel elementarer gehalten, indem es sich darauf beschränkt, den Leser nur bis zu den Originalarbeiten hin zu geleiten . . . . Wenn somit, wie diese Inhaltsangabe zeigt, auch einige Lücken vorhanden sind, so ist doch das Buch, bei dem methodisch geordneten und fast überall sehr klar dargestellten Stoff, auch bei uns zu einer Einführung in die Disciplin der neueren Algebra sehr wohl geeignet, insbesondere auch für das Selbststudium. Für eine Übersetzung

wäre aber zu wünschen, dass die Kapitel 2 und 3 weiter ausgeführt würden."

Die hierin angeregte Übertragung des Brunoschen Buches ward dem Unterzeichneten durch seinen hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Noether, selbst angetragen. Allein die ursprünglich projektierte Übertragung gestaltete sich bald zu einer teilweisen Neubearbeitung, der Herr Noether im weitesten Umfange seine wohlwollende Unterstützung, sowohl durch fortlaufende Bemerkungen, als durch einzelne grössere Zusätze, gewährte.

Der erste Abschnitt, der die symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung behandelt, konnte aus dem Original ziemlich getreu übertragen werden und waren die hierin vorgenommenen Ändederungen mehr redaktioneller Natur. Die diesem Abschnitte beigegebenen Tafeln der symmetrischen Funktionen stehen unter Verantwortlichkeit des Verfassers.

Dagegen erfuhr der Abschnitt über die Resultante und Diskriminante eine wesentliche Erweiterung. Denn wenn auch eine Reihe von neueren Arbeiten — und man findet dieselben im Litteraturverzeichnis angegeben — über die Behandlung des Falles mehrerer gemeinsamer Lösungen zweier Gleichungen existieren, so war doch eine von der naturgemässen Methode des grössten gemeinsamen Divisors ausgehende Darstellung, die zugleich völlig streng und konzis wäre, erwünscht. Eine solche enthält, nach einer Mitteilung des Herrn Noether (Sommer 1880), der § 5, Nr. 7—13.

Mit Berücksichtigung neuerer Arbeiten von Gordan und Sylvester erhielten ferner einzelne Paragraphen des fünften Abschnittes Zusätze, insbesondere der § 19 über simultane Kovarianten. Die Theorie der kubischen und biquadratischen Gleichungen wurde im Anschlusse an die Darstellung Clebschs in seinen „Binären Formen" umgearbeitet und für die biquadratische Gleichung von Herrn Noether die bisher noch mangelhaften Invariantenkriterien zur Untersuchung der Fälle von vier realen und von vier komplexen Wurzeln richtig gestellt.

Endlich erfuhren Neubearbeitungen die §§ 21, 22 des sechsten und §§ 25, 26 des siebenten Abschnitts. Insbesondere wurden in § 25 die von Brioschi gegebenen „charakteristischen" Differentialgleichungen für die Resultante und Diskriminante auf ihren Zusammenhang und ihre Definitionseigenschaft hin von Herrn Noether untersucht.

Die Tabellen der Invarianten und Kovarianten der Formen dritter, vierter und fünfter Ordnung (die Formen sechster Ordnung glaubte der Bearbeiter ausschliessen zu müssen), sowie der simultanen Formen sind mit wenigen Ausnahmen sämtlich neu berechnet worden und stehen unter Verantwortlichkeit des Bearbeiters. Das Litteraturverzeichnis wurde wesentlich vermehrt und in den grundlegenden Arbeiten zugleich historisch geordnet.

Möge denn das Buch, das eine auch in der deutschen mathematischen Litteratur „schmerzlich empfundene Lücke" auszufüllen sucht, in der vorliegenden, wesentlich verbesserten Gestalt sich rasch in den Kreisen der Studierenden wohlwollenden Eingang verschaffen.

Büdingen, am 16. Juli 1881.

Dr. Walter.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Symmetrische Funktionen der Wurzeln einer Gleichung.

Seite

§ 1. Die Eigenschaften symmetrischer Funktionen 1
§ 2. Partielle Differentialgleichungen, denen die symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung genügen 18
§ 3. Bestimmung der symmetrischen Verbindungen vermittelst der erzeugenden Funktion von Borchardt 30
§ 4. Symmetrische Funktionen der Wurzeldifferenzen 41

Zweiter Abschnitt.

Resultanten und Diskriminanten.

§ 5. Über die Bildung der Resultanten 50
§ 6. Eigenschaften der Resultanten 75
§ 7. Diskriminanten 86

Dritter Abschnitt.

Kanonische Formen.

§ 8. Der kanonische Ausdruck von Formen ungerader Ordnung 94
§ 9. Der kanonische Ausdruck von Formen gerader Ordnung 99

Vierter Abschnitt.

Invarianten.

§ 10. Die Invarianten einer Form als Funktionen der Koefficienten 103
§ 11. Die Invarianten einer Form als Funktionen der Wurzeln 115
§ 12. Anzahl der einer Form m^{ter} Ordnung zugehörigen Invarianten ρ^{ten} Grades 121
§ 13 Anwendung der Invariantentheorie auf die Form fünfter Ordnung . . 139

Fünfter Abschnitt.

Kovarianten.

§ 14. Fundamentaleigenschaften der Kovarianten 145
§ 15. Polarenbildung und verwandte Prozesse 161
§ 16. Die Kovarianten als Funktionen der Wurzeln 176
§ 17. Besondere Eigenschaften der Kovarianten 182

Seite

§ 18. Anzahl der Grundformen einer gegebenen Form 193
§ 19. Simultane Kovarianten 201
§ 20. Anwendungen der Kovarianten, insbesondere Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen 211

Sechster Abschnitt.

Typische Darstellungen.

§ 21. Associierte Formen 233
§ 22. Typische Darstellung, insbesondere typische Darstellung der Form fünfter Ordnung 250

Siebenter Abschnitt.

Specielle Theorien.

§ 23. Der Reciprocitätssatz 262
§ 24. Die Hermitesche Form der Transformation von Tschirnhausen . . . 269
§ 25. Charakteristische Gleichungen für die Resultante und die Diskriminante 275
§ 26. Symbolische Darstellungsform der Kovarianten 288

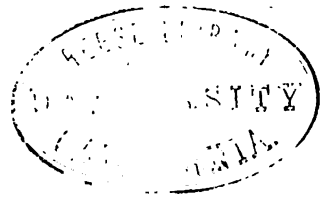
Anhang.

Konstruktion von Tabellen der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung 302

Tabellen.

I. Die symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung 311
II. Resultanten 314d
III. Die irreduciebeln Invarianten der Formen zweiter, dritter, vierter und fünfter Ordnung sowohl als Funktionen der Koefficienten, als auch als Funktionen der Wurzeln ausgedrückt 315
IV. Die irreduciebeln Kovarianten der Formen dritter, vierter und fünfter Ordnung 328
V. Die Systeme simultaner Kovarianten der Formen erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung 356

Verzeichnis der Arbeiten, die sich auf die in diesem Buche behandelten einleitenden Materien und auf die Theorie der binären Formen beziehen 373



Erster Abschnitt.

Symmetrische Funktionen der Wurzeln einer Gleichung.

§ 1. Die Eigenschaften symmetrischer Funktionen.

1. Die Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades

1) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Funktionen derselben, die sich durch keine Vertauschung der Wurzeln ändern, heissen symmetrisch. Alle ganzen, symmetrischen Funktionen können aus einfacheren symmetrischen Funktionen additiv zusammengesetzt werden. Diese einfachsten Typen der ganzen symmetrischen Funktionen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gehen aus einem Produkt ganzer Potenzen dieser Wurzeln durch Permutation hervor und haben alle die Form

2) $$\varphi_k = \sum\nolimits_k \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_k^{p_k},$$

wo das Summenzeichen alle Kombinationen zu k der Indices $1, 2, \ldots, n$ umfasst und k die Anzahl der in jedem einzelnen Glied der Summe enthaltenen Wurzeln angiebt.

Für $p_1 = p_2 = \ldots = p_k = 1$ gelten die bekannten Beziehungen

$$\sum \alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad \sum \alpha_1 \alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}, \quad \ldots, \quad \sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}.$$

Für $k = 1$ hat φ die Form

3) $$\varphi = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \ldots + \alpha_n^p = \Sigma \alpha^p$$

und heisst die Potenzsumme der Wurzeln. Sie soll im folgenden symbolisch durch s_p bezeichnet werden. Insbesondere gelten die Beziehungen

$$s_0 = n, \quad s_1 = -\frac{a_1}{a_0}.$$

2. Die Potenzsumme der Wurzeln s_p ist eine ganze Funktion der Koefficienten $a_0, \ldots, a_n$ und kann als Determinante p^{ten} Grades geschrieben werden:

$$4) \qquad s_p = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^p \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & . & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ (p-1)\,a_{p-1} & a_{p-2} & a_{p-3} & . & a_0 \\ pa_p & a_{p-1} & a_{p-2} & . & a_1 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante folgt unmittelbar aus den Newtonschen Identitäten*

$$5) \qquad \begin{cases} a_0 s_1 + 1\,.\,a_1 = 0 \\ a_0 s_2 + a_1 s_1 \quad + 2a_2 = 0 \\ a_0 s_3 + a_1 s_2 \quad + a_2 s_1 + 3a_3 = 0 \\ \quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ a_0 s_p + a_1 s_{p-1} + \ldots + pa_p = 0, \end{cases}$$

die durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von x in den beiden Ausdrücken für $f'(x)$ abgeleitet werden können, nämlich aus

$$6) \qquad f'(x) = na_0 x^{n-1} + (n-1)\,a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$$

und

$$7) \qquad f'(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{f(x)}{x-\alpha_n}.$$

Umgekehrt kann auch der Koefficient a_i durch die s_i ausgedrückt werden:

$$8) \qquad (-1)^i\,1\,.\,2\ldots i\,.\,a_i = a_0 \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & . & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & . & . \\ . & . & . & . & (i-1) \\ s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & . & s_1 \end{vmatrix}.$$

In anderer Weise ist die Potenzsumme der Wurzeln von Waring** durch die Koefficienten ausgedrückt worden, nämlich durch die Formel

$$9) \qquad s_p = p\,.\left(-\frac{1}{a_0}\right)^p \sum\nolimits_{\lambda} \frac{(-1)^{\lambda_0}\,\Pi(p-\lambda_0-1)}{\Pi(\lambda_1)\ldots\Pi(\lambda_n)} \cdot a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n},$$

wenn man sich der Bezeichnung

$$\Pi(\mu) = 1\,.\,2\ldots\mu, \quad \Pi(0) = 1$$

bedient. Das Summenzeichen umfasst alle ganzen nicht negativen Werte der Exponenten $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$, die den Bedingungen genügen

$$10) \qquad \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = p \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = p. \end{cases}$$

Für $a_0 = 1$ lautet die Waringsche Formel

$$11) \qquad s_p = p \sum\nolimits_{\lambda} \frac{(-1)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\,\Pi(\lambda_1+\ldots+\lambda_n-1)}{\Pi(\lambda_1)\ldots\Pi(\lambda_n)} \cdot a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}.$$

---

* Newton Arithm. univers. edit. s'Gravesande p. 192.

** Waring Misc. analyt. 1762, und Medit. algebr. 1770 pag. 225.

Beweis der Waringschen Formel. Man bilde den Ausdruck

$$12) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \ldots + \frac{s_p}{x^{p+1}} + \ldots,$$

wonach s_p der Koefficient von $\frac{1}{x^{p+1}}$ in der Entwicklung der Funktion

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{n}{x}$$

nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ wird. Diese Funktion ist

$$13) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{n}{x} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{a_1 + 2\frac{a_2}{x} + \ldots + n\frac{a_n}{x^{n-1}}}{a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}.$$

Setzt man $\frac{1}{x} = y$, so liefert die Taylorsche Reihe für den Koefficienten von y^{p+1} den Ausdruck

$$14) \qquad s_p = \frac{-p}{\Pi(p)} \cdot \left\{ \frac{\partial^p}{\partial y^p} log\,(a_0 + a_1 y + \ldots) \right\}_{y=0}.$$

Zur Berechnung der Ableitung

$$\frac{\partial^p}{\partial y^p}$$

benutzen wir den folgenden Satz:*

Sei φ als Funktion von x und x selbst als Funktion von y durch die Gleichung

$$x = \psi(y)$$

gegeben, so ist

$$15) \qquad \frac{\partial^m \varphi}{\partial y^m} = \sum\nolimits_{\varrho,k} \frac{\Pi(m)}{\Pi(k_1) \ldots \Pi(k_m)} \cdot \frac{\partial^\varrho \varphi}{\partial x^\varrho} \cdot \left(\frac{\psi'}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{\psi''}{1.2}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{\psi^{(m)}}{\Pi(m)}\right)^{k_m} =$$

$$= \sum\nolimits_{\varrho,k} C \cdot \frac{\partial^\varrho \varphi}{\partial x^\varrho} \cdot \psi'^{k_1} \ldots \psi^{(m)\,k_m},$$

wo die Summe alle ganzen nicht negativen Werte von ϱ, $k_1, \ldots, k_m$ umfasst, die den Gleichungen

$$16) \qquad \begin{cases} \varrho = k_1 + k_2 + \ldots + k_m \\ m = k_1 + 2k_2 + \ldots + mk_m \end{cases}$$

genügen.

So lässt sich z. B.

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \cdot \psi'^3 + 3\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \psi' \psi'' + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \psi'''$$

darstellen in der Form

* Bruno Ann. di Tortolini 1855.

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3}{}^{k} \frac{\Pi(3)}{\Pi(k_1)\,\Pi(k_2)\,\Pi(k_3)} \cdot \frac{\partial^\varrho \varphi}{\partial x^\varrho} \cdot \left(\frac{\psi'}{1}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{\psi''}{1.2}\right)^{k_2} \cdot \left(\frac{\psi'''}{1.2.3}\right)^{k_3}$$

unter den Voraussetzungen

$$\begin{aligned} \varrho &= 1,\ 2,\ 3 \\ k_1 + k_2 + k_3 &= \varrho \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 3. \end{aligned}$$

Für

$$\begin{aligned} \varrho = 3 \text{ ist } & k_1 = 3, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0, \\ \varrho = 2 \quad \text{„} \quad & k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 0, \\ \varrho = 1 \quad \text{„} \quad & k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 1. \end{aligned}$$

Um die Formel 15) zu beweisen, machen wir den Schluss von m auf $m+1$. Differentiiert man 15) nach y, so geht zunächst $\frac{\partial^\varrho \varphi}{\partial x^\varrho}$ über in $\frac{\partial^{\varrho+1} \varphi}{\partial x^{\varrho+1}} \cdot \psi'$, d. h. ϱ geht in $\varrho+1$, k_1 in k_1+1 über. Ferner geht $\psi^{(i)^{k_i}}$ durch Differentiation nach y über in $k_i\, \psi^{(i)^{k_i-1}} . \psi^{(i+1)}$. Während also der Exponent von $\psi^{(i)}$ sich um die Einheit erniedrigt, steigt der Exponent von $\psi^{(i+1)}$ um eine Einheit, so dass die Summe der beiden Exponenten immer den Wert $k_i + k_{i+1}$ behält. Die erste der Gleichungen 16) behält also ihre Giltigkeit. Dass auch die zweite Gleichung 16) erfüllt bleibt, erhellt aus den Identitäten

$$\begin{aligned} m+1 &= k_1 + 1 + 2k_2 + \ldots + mk_m, \\ m+1 &= k_1 + 2k_2 + \ldots + i(k_i - 1) + (i+1)(k_{i+1} + 1) + \ldots + mk_m = \\ &= k_1 + 2k_2 + \ldots + ik_i + (i+1)k_{i+1} + \ldots + mk_m - i + i + 1, \\ m+1 &= k_1 + 2k_2 + \ldots + m(k_m - 1) + (m+1)k_{m+1} = \\ &= k_1 + 2k_2 + \ldots + mk_m - m + m + 1, \end{aligned}$$

weil $k_{m+1} = 1$ ist.

Die Koefficienten bestimmen sich durch Betrachtung besonderer Fälle. Nimmt man z. B. die beiden Funktionen

$$17) \qquad \varphi(x) = x^\theta, \quad x = \psi(y) = a_0 + a_1 y + \ldots,$$

so ist der Koefficient von y^m von der Form

$$18) \qquad \sum{}^{k} \frac{\Pi(\theta)}{\Pi(k_0) \ldots \Pi(k_m)} a_0^{k_0} \ldots a_m^{k_m}$$

unter den Voraussetzungen

$$19) \qquad \begin{cases} k_0 + k_1 + \ldots + k_m = \theta \\ k_1 + 2k_2 + \ldots + mk_m = m. \end{cases}$$

Die Taylorsche Reihe liefert für denselben Koefficienten den Ausdruck

$$20)\quad \frac{1}{\Pi(m)}\cdot\frac{\partial^m \varphi}{\partial y^m}=\frac{1}{\Pi(m)}\cdot\sum{}_k\, C.\theta\,(\theta-1)\dots(\theta-\varrho+1)\,a_0{}^{\theta-\varrho}\,a_1{}^{k_1}\dots \dots(1.2)^{k_2}.(1.2.3)^{k_3}\dots$$

unter den Voraussetzungen

$$\begin{cases} k_0 = & & \theta-\varrho \\ k_1+ & k_2 & +\dots=\varrho \\ k_0+ & k_1 & +\dots=\theta \\ k_1+2k_2+ & \dots & =m. \end{cases}$$

Durch Gleichsetzung der Koefficienten 18) und 20) ist identisch

$$21)\qquad C\cdot\frac{\theta\,(\theta-1)\dots(\theta-\varrho+1)}{\Pi(m)}=\frac{\Pi(\theta)}{\Pi(k_0)\dots\Pi(k_m)},$$

und, wenn man bedenkt, dass

$$\theta\,(\theta-1)\dots(\theta-\varrho+1)=\frac{\Pi(\theta)\,.\,\Pi(k_0)}{\Pi(k_0)},$$

so hat man

$$22)\qquad C=\frac{\Pi(m)}{\Pi(k_0)\dots\Pi(k_m)}.$$

Setzen wir nun in diesem Theorem

$$23)\qquad \varphi=\log x,\quad x=\psi(y)=a_0+a_1y+\dots,$$

wobei

$$\left(\frac{\partial^\varrho\varphi}{\partial x^\varrho}\right)_{y=0}=-\left(-\frac{1}{a_0}\right)^\varrho\Pi(\varrho-1),\quad \left(\frac{\psi^{(\varrho)}}{\Pi(\varrho)}\right)^{\lambda\varrho}_{y=0}=a_\varrho{}^{\lambda\varrho},$$

so liefert 14) sogleich die Waringsche Formel 9).

Anmerkung 1. Multipliciert man die Gleichung 12) mit dx und integriert, so kommt $\left(a_0=1,\ \frac{1}{x}=y\right)$

$$24)\quad \frac{s_1y}{1}+\frac{s_2y^2}{2}+\dots+\frac{s_py^p}{p}=-\log(1+a_1y+\dots)=-\log\frac{f(x)}{x^n}.$$

Schreibt man $f(x)$ in der Form

$$25)\qquad f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots,$$

so ist

$$\log\frac{f(x)}{x^n}=\log\left(1-\frac{\alpha_1}{x}\right)+\log\left(1-\frac{\alpha_2}{x}\right)+\dots$$

und, wenn a_0 nicht $=1$,

$$\log\frac{f(x)}{x^n}=\log a_0+\log\left(1-\frac{\alpha_1}{x}\right)+\dots,$$

was wiederum die Formel 24) liefert.

Anmerkung 2. Wenn $a_0 = a_1 = \ldots = 1$, so ist $s_p = -1$, weil

$$s_p = -\frac{p}{\Pi(p)} \cdot \left\{ \frac{\partial^p}{\partial y^p} log\,(1+y+\ldots) \right\}_{y=0} =$$

$$= -\frac{p}{\Pi(p)} \cdot \left\{ \frac{\partial^p}{\partial y^p} log \frac{1}{1-y} \right\}_{y=0} = \frac{-1}{\Pi(p-1)} . \Pi(p-1) = -1.$$

3. Die symmetrische Funktion φ kann als Funktion der Potenzsummen s ausgedrückt werden.

Für φ hat man der Reihe nach die Werte

26) $$\varphi_1 = \Sigma \alpha_1^{p_1} = s_{p_1}.$$

Aus $s_{p_2} \Sigma \alpha_1^{p_1} = \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} + \Sigma \alpha_1^{p_1+p_2}$ folgt

27) $$\varphi_2 = \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} = s_{p_1} s_{p_2} - s_{p_1+p_2} = (p_1 p_2)^*$$

Nun ist ferner

$$s_{p_3} \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} = \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3} + \Sigma \alpha_1^{p_1+p_3} \alpha_2^{p_2} + \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2+p_3},$$

woraus

$$\Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3} = s_{p_3} \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} - \Sigma \alpha_1^{p_1+p_3} \alpha_2^{p_2} - \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2+p_3}$$

und zufolge der Formel 27)

28) $$\varphi_3 = s_{p_1} s_{p_2} s_{p_3} - s_{p_1} s_{p_2+p_3} - s_{p_2} s_{p_3+p_1} - s_{p_3} s_{p_1+p_2} + 1.2 . s_{p_1+p_2+p_3} = (p_1 p_2 p_3)$$

Ferner hat man

$$\Sigma \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_4^{p_4} = s_{p_4} \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3} - \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3+p_4} - \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2+p_4} \alpha_3^{p_3} - \Sigma \alpha_1^{p_1+p_4} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3},$$

woraus

29) $$\varphi_4 = s_{p_1} s_{p_2} s_{p_3} s_{p_4} - (s_{p_1+p_2} s_{p_3} s_{p_4} + s_{p_2+p_3} s_{p_4} s_{p_1} + s_{p_3+p_4} s_{p_1} s_{p_2} + s_{p_4+p_1} s_{p_2} s_{p_3}) + 1.2 . (s_{p_1+p_2+p_3} s_{p_4} + \ldots) + (s_{p_1+p_2} s_{p_3+p_4} + \ldots) - 1.2.3 . s_{p_1+p_2+p_3+p_4} = (p_1 p_2 p_3 p_4),$$

und ferner

30) $$\varphi_5 = s_{p_1} \ldots s_{p_5} - \Sigma s_{p_1+p_2} s_{p_3} s_{p_4} s_{p_5} + 1.2 \Sigma s_{p_1+p_2+p_3} s_{p_4} s_{p_5} + \Sigma s_{p_1+p_2} s_{p_3+p_4} s_{p_5} - 1.2.3 \Sigma s_{p_1+\ldots+p_4} s_{p_5} - 1.2 . \Sigma s_{p_1+p_2} s_{p_3+p_4+p_5} + 1.2.3.4 \Sigma s_{p_1+\ldots+p_5} = (p_1 p_2 p_3 p_4 p_5),$$

wo die Summen alle Produkte, die durch Kombination von $p_1, \ldots, p_5$ gebildet werden können, umfassen.

Allgemein findet man

31) $$\varphi_k = s_{p_k} \sum\nolimits_k \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_{k-1}^{p_{k-1}} - \sum\nolimits_k \alpha_1^{p_1+p_k} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_{k-1}^{p_{k-1}} - \sum\nolimits_k \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2+p_k} \alpha_3^{p_3} \ldots \alpha_{k-1}^{p_{k-1}} - \ldots - \sum\nolimits_k \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_{k-1}^{p_{k-1}+p_k}.$$

---

* Die Abkürzung $\Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3} \ldots = (p_1 p_2 p_3 \ldots)$ rührt von Cayley her. Vergl. die in den Phil. Trans. 1857 enthaltene Abhandlung: A memoir on the symmetric functions of the roots of an equation.

Setzt man φ_{k-1} als bekannt voraus, so kann φ_k nach 31) berechnet werden, denn man hat nur die Indices $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$ bezüglich in $p_1+p_k, p_2+p_k, \ldots, p_{k-1}+p_k$ zu verwandeln, um alle Glieder von φ_k zu erhalten. In gleicher Weise kann φ_{k-1} aus $\varphi_{k-2}, \ldots, \varphi_3$ aus φ_2, φ_2 aus φ_1 berechnet werden. Aus $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$, deren Werte oben angegeben worden sind, können also alle übrigen φ mit höherem Index berechnet werden.

Auf Grund vorstehender Betrachtungen sind wir im Stande, die allgemeine Form des Ausdrucks φ als Funktion von s_i aufzustellen. Fassen wir aus der Reihe der k Exponenten $p_1, \ldots, p_k$ deren $k_1, k_2, \ldots$ so zusammen, dass immer

$$k_1+k_2+\ldots=k$$

ist und bezeichnen wir die Summe der $k_1, k_2, \ldots$ Exponenten bezüglich durch $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \ldots$; sei ferner

32) $$\sum\nolimits^{k} s_{\lambda_{k_1}} s_{\lambda_{k_2}} \ldots$$

die Summe aller Produkte von s, die man erhält, wenn man in den Indices $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \ldots$ alle von einander verschiedenen Exponenten der Reihe $p_1, \ldots, p_k$ bez. zu $k_1, k_2, \ldots$ kombiniert. Alsdann ist φ ein Aggregat solcher Summen, deren jede mit einem numerischen Koefficienten versehen ist. Für jedes Glied dieser Summen muss die Bedingung erfüllt sein

33) $$\lambda_{k_1}+\lambda_{k_2}+\ldots=p_1+\ldots+p_k;$$

denn ersetzt man die Wurzeln α durch $\varrho\alpha$, so tritt zu jedem Glied der Summen der Faktor

$$\varrho^{p_1+\ldots+p_k}$$

und zwar auf beiden Seiten der Gleichung $\varphi=\Sigma(s)$.

Bestimmung der Koefficienten. Um die Koefficienten in dem Ausdruck für φ zu bestimmen, bemerke man zunächst, dass, wenn A_{k-1} der Koefficient von $s_{p_1+\ldots+p_{k-1}}$ in φ_{k-1} ist, der Koefficient des entsprechenden Gliedes $s_{p_1+\ldots+p_k}$ in φ_k gleich ist

$$-(k-1)A_{k-1}.$$

Dieses Glied $s_{p_1+\ldots+p_k}$ ist das einzige, wo im Index ein Exponent hinzugekommen ist; alle anderen Glieder von φ_k haben in den Indices höchstens ebensoviel Exponenten als die Glieder von φ_{k-1}, haben also auch dieselben Zahlenkoefficienten. Ebenso stimmen die Koefficienten in φ_{k-1} mit denen in φ_{k-2} überein, bis auf den Koefficienten von $s_{p_1+\ldots+p_{k-1}}$, wo im Index ein Exponent mehr steht als in dem entsprechenden Glied von φ_{k-2} und wo der Koefficient $-(k-2)$ mal so viel als der Koefficient von $s_{p_1+\ldots+p_{k-2}}$ in φ_{k-2} beträgt u. s. w.

Aus der Bildung der Koefficienten lassen sich so folgende Schlüsse ziehen:

a) die Koefficienten ändern sich nur, wenn die Zahl der Exponenten im Index sich ändert; sie bleiben dieselben, sobald die Zahl der Exponenten im Index unverändert bleibt;

b) geht die Funktion φ_{k-1} in φ_k über, so kommt im Index von $s_{p_1+\ldots+p_{k-1}}$ ein Exponent hinzu. Bei diesem Übergang erhält der Koefficient dieses Gliedes den Faktor $-(k-1)$. So oft also der Index um einen k^{ten} Exponenten wächst, gewinnt der Koefficient dieses Gliedes den Faktor $-(k-1)$. Also ist der Koefficient des Gliedes $s_{p_1+\ldots+p_k}(-1)^{k-1}(k-1)(k-2)\ldots 2.1$ oder $(-1)^{k-1}\Pi(k-1)$ mal dem Koefficienten von $\varphi_1 = s_{p_1}$, der 1 ist.

Der Koefficient des Produkts

$$s_{\lambda_{k_1}} s_{\lambda_{k_2}} \ldots$$

ist unter den obigen Voraussetzungen gleich

$$(-1)^{k_1-1+k_2-1+\cdots}\Pi(k_1-1).\Pi(k_2-1)\ldots,$$

so dass φ von der Form ist

$$34) \quad \varphi = \sum\nolimits^{k}(-1)^{k-\sigma}.\Pi(k_1-1)\Pi(k_2-1)\ldots\sum\nolimits^{k} s_{\lambda_{k_1}} s_{\lambda_{k_2}}\ldots,$$

wo σ die Anzahl der Gruppen $k_1, k_2, \ldots$ bedeutet, in welche k geteilt worden ist.

Sind unter den Zahlen $k_1, k_2, \ldots \mu$ einander gleich, so muss die rechte Seite der Formel 34) noch durch $\Pi(\mu)$ dividiert werden.

Nachdem φ als Funktion von s_i dargestellt worden ist, wird man die Werte von $s_1, s_2, \ldots$ mit Hilfe der Waringschen Formel durch die Koefficienten der Gleichung ausdrücken. Also kann φ schliesslich durch die Koefficienten der vorgelegten Gleichung angegeben werden. Die Formeln für s_p 4) und 11) sind bis auf eine Potenz von $-\frac{1}{a_0}$ ganze Funktionen der a_i. Setzt man daher $a_0 = 1$, so gilt der Satz:

Jede ganze symmetrische Funktion der Wurzeln einer Gleichung lässt sich als ganze Funktion der Koefficienten der Gleichung darstellen.

4. Die Function φ kann symbolisch in Form einer Determinante geschrieben werden, nämlich

$$35) \quad \varphi = \begin{vmatrix} s_{p_1} & s_{(p_1)} & s_{(p_1)} & . & . \\ s_{(p_2)} & s_{p_2} & s_{(p_2)} & . & . \\ s_{(p_3)} & s_{(p_3)} & s_{p_3} & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

wenn nach Ausrechnung der Determinante die symbolischen Produkte $s_{(p_1)}\, s_{(p_2)} \ldots$ in $s_{p_1+p_2+\ldots}$ verwandelt werden; z. B.

$$\varphi_2 = \begin{vmatrix} s_{p_1} & s_{(p_1)} \\ s_{(p_2)} & s_{p_1} \end{vmatrix} = s_{p_1}\, s_{p_2} - s_{p_1+p_2},$$

$$\varphi_3 = \begin{vmatrix} s_{p_1} & s_{(p_1)} & s_{(p_1)} \\ s_{(p_2)} & s_{p_2} & s_{(p_2)} \\ s_{(p_3)} & s_{(p_3)} & s_{p_3} \end{vmatrix} = s_{p_1}\, s_{p_2}\, s_{p_3} - s_{p_1}\, s_{p_2+p_3} - s_{p_2}\, s_{p_3+p_1} - s_{p_3}\, s_{p_1+p_2} + 1\,.\,2\,.\, s_{p_1+p_2+p_3},$$

$$\varphi_4 = \begin{vmatrix} s_{p_1} & s_{(p_1)} & s_{(p_1)} & s_{(p_1)} \\ s_{(p_2)} & s_{p_2} & s_{(p_2)} & s_{(p_2)} \\ s_{(p_3)} & s_{(p_3)} & s_{p_3} & s_{(p_3)} \\ s_{(p_4)} & s_{(p_4)} & s_{(p_4)} & s_{p_4} \end{vmatrix} =$$

$$= s_{p_1} \begin{vmatrix} s_{p_2} & s_{(p_2)} & s_{(p_2)} \\ s_{(p_3)} & s_{p_3} & s_{(p_3)} \\ s_{(p_4)} & s_{(p_4)} & s_{p_4} \end{vmatrix} - s_{(p_2)} \begin{vmatrix} s_{(p_1)} & s_{(p_1)} & s_{(p_1)} \\ s_{(p_3)} & s_{p_3} & s_{(p_3)} \\ s_{(p_4)} & s_{(p_4)} & s_{p_4} \end{vmatrix} +$$

$$+ s_{(p_3)} \begin{vmatrix} s_{(p_1)} & s_{(p_1)} & s_{(p_1)} \\ s_{p_2} & s_{(p_2)} & s_{(p_2)} \\ s_{(p_4)} & s_{(p_4)} & s_{p_4} \end{vmatrix} - s_{(p_4)} \begin{vmatrix} s_{(p_1)} & s_{(p_1)} & s_{(p_1)} \\ s_{p_2} & s_{(p_2)} & s_{(p_2)} \\ s_{(p_3)} & s_{p_3} & s_{(p_3)} \end{vmatrix} =$$

$$= s_{p_1} \begin{vmatrix} s_{p_2} & & \\ & s_{p_3} & \\ & & s_{p_4} \end{vmatrix} - s_{(p_2)} \begin{vmatrix} s_{(p_1)} & & \\ & s_{p_3} & \\ & & s_{p_4} \end{vmatrix} -$$

$$- s_{(p_3)} \begin{vmatrix} s_{(p_1)} & & \\ & s_{p_2} & \\ & & s_{p_4} \end{vmatrix} - s_{(p_4)} \begin{vmatrix} s_{(p_1)} & & \\ & s_{p_2} & \\ & & s_{p_3} \end{vmatrix}.$$

Man bemerkt leicht, dass das dritte Glied dieser Partialentwicklung aus dem zweiten durch Vertauschung von p_2 mit p_3, das vierte aus dem dritten durch Vertauschung von p_3 mit p_4 folgt. Die Berechnung ergiebt den Ausdruck

$$\begin{aligned}\varphi_4 = {} & s_{p_1}(s_{p_2}\, s_{p_3}\, s_{p_4} - s_{p_2}\, s_{p_3+p_4} - s_{p_3}\, s_{p_4+p_2} - s_{p_4}\, s_{p_2+p_3} + 2\, s_{p_2+p_3+p_4}) - \\ & - s_{(p_2)}(s_{(p_1)}\, s_{p_3}\, s_{p_4} - s_{(p_1)}\, s_{p_3+p_4} - s_{p_3}\, s_{p_1+p_4} - s_{p_4}\, s_{p_1+p_3} + 2\, s_{p_1+p_3+p_4}) - \\ & - s_{(p_3)}(s_{(p_1)}\, s_{p_2}\, s_{p_4} - s_{(p_1)}\, s_{p_2+p_4} - s_{p_2}\, s_{p_1+p_4} - s_{p_4}\, s_{p_1+p_2} + 2\, s_{p_1+p_2+p_4}) - \\ & - s_{(p_4)}(s_{(p_1)}\, s_{p_2}\, s_{p_3} - s_{(p_1)}\, s_{p_2+p_3} - s_{p_2}\, s_{p_1+p_3} - s_{p_3}\, s_{p_1+p_2} + 2\, s_{p_1+p_2+p_3}) = \\ & = s_{p_1}\, s_{p_2}\, s_{p_3}\, s_{p_4} - (s_{p_1}\, s_{p_2}\, s_{p_3+p_4} + s_{p_2}\, s_{p_3}\, s_{p_4+p_1} + s_{p_3}\, s_{p_4}\, s_{p_1+p_2} + s_{p_4}\, s_{p_1}\, s_{p_2+p_3}) + \\ & + 2\,(s_{p_1}\, s_{p_2+p_3+p_4} + s_{p_2}\, s_{p_1+p_3+p_4} + s_{p_3}\, s_{p_1+p_2+p_4} + s_{p_4}\, s_{p_1+p_2+p_3}) + \\ & + (s_{p_1+p_2}\, s_{p_3+p_4} + s_{p_1+p_3}\, s_{p_2+p_4} + s_{p_1+p_4}\, s_{p_2+p_3}) - 1\,.\,2\,.\,3\, s_{p_1+p_2+p_3+p_4}.\end{aligned}$$

Wie aus φ_3 die Formel für φ_4, so folgt aus φ_{k-1} die Formel für φ_k, indem man die Determinante φ_k nach Unterdeterminanten einer Reihe entwickelt. Sobald dem Index ein Exponent zugefügt wird,

wechselt das Zeichen und der neue Ausdruck erhält den Faktor $k-1$ u. s. w.

Anmerkung 1. Der Ausdruck 34) führt auf eine bemerkenswerte Beziehung; es ist nämlich

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial s_{\lambda_{k_1}}} = \sum\nolimits_k (-1)^{k_1-1}\, \Pi(k_1-1)\,.\,(-1)^{k-k_1-(\sigma-1)}\,.\,\Pi(k_2-1)\ldots \sum\nolimits_k s_{\lambda_{k_2}} s_{\lambda_{k_3}}\ldots$$

oder

$$36) \qquad \frac{\partial \varphi_k}{\partial s_{\lambda_{k_1}}} = \sum\nolimits_k (-1)^{k_1-1}\, \Pi(k_1-1)\,.\,\varphi_{k-k_1}.$$

Um φ_{k-k_1} zu erhalten, lasse man die Faktoren in φ_k weg, in denen die Exponenten des Index λ_{k_1} vorkommen; z. B.

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial s_{p_3+p_4+p_5}} = 1\,.\,2\,.\,(s_{p_1} s_{p_2} - s_{p_1+p_2}) = 1\,.\,2\,.\,\varphi_2 = 2\sum \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2},$$

wo $\lambda_{k_1} = p_3+p_4+p_5$, $k=5$, $k_1=3$, $k-k_1=2$ ist;

$$\frac{\partial \varphi_8}{\partial s_4} = s_1 s_3 - 2 s_4 = \sum \alpha_1^{\,3} \alpha_2 - \sum \alpha_1^{\,4} = \varphi_4 - s_4.$$

Sind zwei oder mehr Indices λ_{k_1}, λ_{k_2}, ... numerisch gleich, so müssen auf der rechten Seite der Gleichung 36) ebensoviel gleiche Glieder in φ_{k-k_1}, φ_{k-k_2}, ... hinzugefügt werden.

Anmerkung 2. Um unter der Voraussetzung, dass k_1, k_2, ... von einander verschieden sind, die Anzahl N der Glieder von $\sum_k s_{\lambda_{k_1}} s_{\lambda_{k_2}} \ldots$ zu finden, hat man zu setzen

$$37) \quad N = \binom{k}{k_1}\binom{k-k_1}{k_2}\binom{k-k_1-k_2}{k_3}\ldots = \\ = \frac{\Pi(k)}{\Pi(k_1)\,\Pi(k-k_1)}\,.\,\frac{\Pi(k-k_1)}{\Pi(k_2)\,\Pi(k-k_1-k_2)}\,.\,\frac{\Pi(k-k_1-k_2)}{\Pi(k_3)\,\Pi(k-k_1-k_2-k_3)}\ldots = \\ = \frac{\Pi(k)}{\Pi(k_1)\,\Pi(k_2)\ldots},$$

wenn man durch $\binom{m}{\mu}$ den Ausdruck $\dfrac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{1\,.\,2\ldots\mu}$ bezeichnet. Denn nehmen wir irgend ein Glied der Summe heraus, so ist der Index des ersten Faktors eine Kombination k_1^{ten} Grades der k Exponenten p_1, ..., p_k, der Index des zweiten Faktors eine Kombination k_2^{ten} Grades der $k-k_1$ noch übrigen Exponenten, der Index des dritten Faktors eine Kombination k_3^{ten} Grades der $k-k_1-k_2$ noch übrigen Exponenten u. s. w.

Wenn aber in der Reihe der Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k'_1$ Zahlen gleich k_1 werden, so wird sich die Reihe der Indices $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \ldots$ $\Pi(k'_1)$ mal wiederholen, so dass die Anzahl N noch durch $\Pi(k'_1)$ zu dividieren ist.

Sind allgemein in der Reihe der Zahlen $k_1, k_2, \ldots k'_1$ Zahlen gleich k_1, k'_2 Zahlen gleich k_2, k'_3 Zahlen gleich k_3, ..., so reduciert sich die Zahl N auf

$$38) \qquad N = \frac{\Pi(k)}{\Pi(k_1)^{k'_1}\,\Pi(k_2)^{k'_2}\ldots\Pi(k'_1)\,\Pi(k'_2)\ldots}$$

unter der Bedingung

$$k'_1 k_1 + k'_2 k_2 + \ldots = k.$$

Ist $p_1 = p_2 = \ldots = p$, so vereinfacht sich der Ausdruck 34) für φ. Zunächst reducieren sich in dem Ausdruck

$$\Sigma s_{\lambda_{k_1}} s_{\lambda_{k_2}} \ldots$$

alle Glieder auf

$$s_{k_1 p}^{k'_1}\, s_{k_2 p}^{k'_2} \ldots$$

und die Summe selbst geht über in

$$\frac{\Pi(k)}{\Pi(k_1)^{k'_1}\,\Pi(k_2)^{k'_2}\ldots\Pi(k'_1)\,\Pi(k'_2)\ldots}\, s_{k_1 p}^{k'_1}\, s_{k_2 p}^{k'_2} \ldots$$

Da nun k Exponenten einander gleich geworden sind, so muss der Ausdruck für φ noch durch $\Pi(k)$ dividiert werden. Man hat also

$$\varphi = \Sigma \alpha_1^p \alpha_2^p \ldots = \frac{1}{\Pi(k)} \sum\nolimits_k (-1)^{k-\sigma} \frac{\Pi(k_1 - 1)^{k'_1} \ldots}{\Pi(k_1)^{k'_1} \ldots \Pi(k'_1) \ldots} \cdot \Pi(k).\, s_{k_1 p}^{k'_1}\, s_{k_2 p}^{k'_2} \ldots$$

$$39) \qquad \varphi = \sum\nolimits_k (-1)^{k-\sigma} \frac{1}{\Pi(k'_1)\,\Pi(k'_2)\ldots} \left(\frac{s_{k_1 p}}{k_1}\right)^{k'_1} \left(\frac{s_{k_2 p}}{k_2}\right)^{k'_2} \ldots$$

unter den Bedingungen

$$\sigma = k'_1 + k'_2 + \ldots$$
$$k = k'_1 k_1 + k'_2 k_2 + \ldots$$

Die Formel 39) kann dazu dienen, die a_i als Funktionen der s_i auszudrücken. Für $a_0 = 1$ hat man die bekannte Beziehung

$$a_k = (-1)^k \sum\nolimits_k \alpha_1 \ldots \alpha_k,$$

und man erhält den Wert für a_k aus 39), wenn man darin $p = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, ..., $k'_1 = \lambda_1$, $k'_2 = \lambda_2$, ... setzt. Es ergiebt sich so

$$40) \qquad a_k = \sum\nolimits_k \frac{(-1)^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_k}}{\Pi(\lambda_1) \ldots \Pi(\lambda_k)} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\lambda_1} \ldots \left(\frac{s_k}{k}\right)^{\lambda_k}$$

unter der Bedingung

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + k\lambda_k = k.$$

Zum Beispiel:

$$a_1 = -s_1$$
$$a_2 = \tfrac{1}{2}s_1^2 - \tfrac{1}{2}s_2$$
$$a_3 = -\frac{1}{1.2.3}s_1^3 + \tfrac{1}{2}s_1 s_2 - \tfrac{1}{3}s_3$$
$$a_4 = \frac{1}{1.2.3.4}s_1^4 - \frac{1}{2.2}\cdot s_1^2 s_2 + \tfrac{1}{3}s_1 s_3 + \frac{1}{2^2.2}s_2^2 - \tfrac{1}{4}s_4$$

u. s. w.

Diese Formeln stimmen mit den aus den Newtonschen Identitäten gewonnenen Determinanten überein, nämlich (vergl. Formel 8)

$$a_2 = \frac{(-1)^2}{1.2}\cdot\begin{vmatrix} s_1 & 1 \\ s_2 & s_1 \end{vmatrix}, \quad a_3 = \frac{(-1)^3}{1.2.3}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 \\ s_3 & s_2 & s_1 \end{vmatrix},$$

$$a_4 = \frac{(-1)^4}{1.2.3.4}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 \end{vmatrix}, \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung 3. Wenn in der Funktion φ_k $k_1, k_2, \ldots$ Wurzelexponenten einander gleich sind, so ist die Summe der Zahlenkoefficienten in φ_k

$$\frac{(-1)^k . \Pi(k)}{\Pi(k_1)\,\Pi(k_2)\ldots}.$$

Denn setzt man $a_0 = a_1 = \ldots = 1$, so geht φ_k in die Summe seiner Koefficienten über; die Grössen s nehmen sämtlich den Wert -1 an, wie sich durch Einsetzen der Werte $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, ... in die Determinante 4) unmittelbar ergiebt. Also ist das Zeichen der Koefficienten von φ bestimmt durch $(-1)^{k-\sigma}(-1)^{\sigma} = (-1)^k$, und der Wert von φ_k ist nur abhängig von k. Setzt man in 34) $s_i = -1$, so ist

$$\varphi_k = -k\,\varphi_{k-1}$$
$$\varphi_{k-1} = -(k-1)\,\varphi_{k-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_k = (-1)^k . k(k-1)\ldots 2.1 = (-1)^k . \Pi(k).$$

Sind aber in φ_k k_1 Exponenten gleich p_1, k_2 Exponenten gleich p_2 u. s. w., so muss die rechte Seite offenbar noch durch $\Pi(k_1)\,\Pi(k_2)\ldots$ dividiert werden.

Beispiele. Die Funktionen

$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2,\ \Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3,\ \Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3,\ \Sigma\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4,\ \Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7$$

reducieren sich unter den gemachten Voraussetzungen auf

$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2 = (-1)^2 . 1 . 2 = 2; \quad \Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3 = (-1)^3 \frac{1.2.3}{1.2} = -3,$$

$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3 = (-1)^3 \frac{1.2.3}{1.2} = -3, \quad \Sigma\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4 = (-1)^4 \frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} = 6,$$

$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7 = (-1)^7 \frac{\Pi(7)}{\Pi(3).\Pi(4)} = -35.$$

Die Berechnung der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung mit Hilfe der Summen s, die man durch die Waringsche Formel als Funktionen der Koefficienten darstellen kann, ist noch sehr umständlich, was überhaupt immer eintritt, sobald man von den Summen s Gebrauch macht. Denn die Ausrechnung wird dadurch unnötig verlängert, dass in diesen Darstellungen eine grosse Anzahl von Gliedern auftritt, die sich schliesslich wegheben. Führen wir z. B. die Berechnung der symmetrischen Funktion $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\,(a_0 = 1)$ nach der angegebenen Methode durch. Man hat, weil zwei Exponenten einander gleich sind, $\varphi_3 = 2\,\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3 = s_1 s_2^2 - s_1 s_4 - 2 s_2 s_3 + 2 s_5$. Für $s_1, s_2, \ldots$ sind die Werte einzusetzen

$$s_1 = -a_1, \quad s_2 = a_1^2 - 2a_2, \quad s_3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3,$$
$$s_4 = a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 4a_1a_3 + 2a_2^2 - 4a_4,$$
$$s_5 = -a_1^5 + 5a_1^3a_2 - 5a_1a_2^2 - 5a_1^2a_3 + 5a_1a_4 + 5a_2a_3 - 5a_5.$$

Die Ausrechnung ergiebt

$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3 = -a_2a_3 + 3a_1a_4 - 5a_5.$$

Die vier ersten Glieder von s_4 und s_5, die zwei ersten von s_3 und das erste Glied von s_2 kommen im Resultat gar nicht mehr vor, haben also die Ausrechnung nur erschwert.

Der folgende Satz von Cayley und Sylvester (Philosoph. Magazine 1853)*, von dem ein einfacher Beweis von Bruno (Annali di Tortolini 1855) gegeben worden ist, gestattet jedoch die symmetrische Funktion direkt durch die Koefficienten auszudrücken.

5. Ist die symmetrische Funktion φ als Funktion der Koefficienten ausgedrückt, nämlich

41) $$\varphi = \Sigma\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots = \Sigma C . a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\ldots,$$

so ist der Grad der letzteren gleich dem höchsten Exponenten der Reihe $p_1, p_2, \ldots$ Die Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ genügen der Gleichung

---

* „On Mr. Cayley's inpromptu demonstration of the rule for determining at sight the degree of any symmetrical function of the roots of an equation expressed in terms of the coefficients".

42) $1.\lambda_1+2\lambda_2+\ldots=p_1+p_2+\ldots=$ Summe der Wurzelexponenten.

Zum Beweis dieses Satzes gehen wir von der Bemerkung aus, dass die Koefficienten einer Gleichung lineare Funktionen einer Wurzel derselben sind. Der Koefficient a_i hat nämlich die Form

43) $$a_i = b_i\alpha_k + c_i,$$

wo b_i, c_i Funktionen der übrigen Wurzeln sind, die α_k, das willkürlich aus der Reihe der Wurzeln herausgenommen wird, nicht mehr enthalten.

Ersetzt man nun in der Funktion

$$\varphi = \Sigma C . a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$$

die Koefficienten $a_1, \ldots, a_n$ durch Ausdrücke von der Form $b_i\alpha_k + c_i$, so erhält man

44) $$\varphi = \Sigma\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots = \Sigma C(b_1\alpha_k + c_1)^{\lambda_1}\ldots(b_n\alpha_k + c_n)^{\lambda_n},$$

wo der höchste Exponent von α_k gleich ist dem grössten Wert der Summe $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$, der wiederum gleich ist dem grössten Wert der Reihe $p_1, p_2, \ldots$, der mit P bezeichnet werden soll. Die Summe $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ stellt aber den Grad von φ in Bezug auf die Koefficienten dar; also ist der Grad der Funktion $\varphi(a)$* gleich dem höchsten Exponenten der gegebenen Wurzelfunktion.

Dass die Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ der Gleichung 42) genügen, wird folgendermassen bewiesen: Setzt man an Stelle der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, bezüglich $\varrho\alpha_1, \varrho\alpha_2, \ldots$, so geht φ über in $\varphi . \varrho^{p_1+p_2+\cdots}$; gleichzeitig ändern die Koefficienten $a_1, a_2, \ldots$ ihre Werte in

$$\varrho a_1, \quad \varrho^2 a_2, \quad \varrho^3 a_3, \quad \ldots$$

Folglich erhält jedes Glied der Funktion $\varphi(a)$ den Faktor

$$\varrho^{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n}.$$

Aus der Identität

$$\varphi . \varrho^{p_1+p_2+\cdots} = \varphi . \varrho^{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots}$$

folgt unmittelbar die Gleichung 42).

Anmerkung. Die Funktion $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n$, d. h. die Summe der Produkte der Exponenten mit den Indices der Koefficienten, welche in einem Glied des Ausdrucks einer Funktion $\varphi(a)$ enthalten sind, spielt eine grosse Rolle in den folgenden Entwicklungen. Sie soll das Gewicht der Funktion genannt werden.

---

* $\varphi(a)$ bedeutet φ als Funktion der Koefficienten, $\varphi(\alpha)$ als Funktion der Wurzeln, $\varphi(s)$ als Funktion der Potenzsummen.

Eine Funktion, deren Glieder konstantes Gewicht haben, heisst nach Cayley **isobarisch.**

Die Funktion $\varphi(a)$ ist also isobarisch und vom Gewicht $p_1+p_2+\ldots$; ebenso die Funktion $\varphi(s)$.

Betrachten wir z. B. die symmetrische Funktion $\Sigma\alpha_1^3\alpha_2$. Der höchste Exponent ist $P=3$, die Summe der Exponenten $p_1+p_2=3+1=4$. Also ist die Funktion der Koefficienten, durch welche $\Sigma\alpha_1^3\alpha_2$ dargestellt wird, vom Grade 3, isobarisch und vom Gewicht 4. Sie hat die Form

$$Aa_1^2a_2+Ba_1a_3+Ca_2^2+Da_4.$$

Es handelt sich nun zunächst um die Bestimmung der Koefficienten A, B, C, D. Kennt man die Summen s als Funktionen der a_i, so lassen sich die Koefficienten leicht dadurch bestimmen, dass man die Glieder weglässt, deren Grad den dritten übersteigt. Dies hätte z. B. geschehen müssen bei der oben durchgeführten Berechnung der Funktion $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3$, die bezüglich der Koefficienten vom zweiten Grade ist.

Man kann auch irgendwelche Gleichungen benutzen, deren Wurzeln bekannt sind, etwa

$x^2-2=0$, $x^2-2x+1=0$, $x^3-3x^2+3x-1=0$, $x^4-2x^2+1=0$,

aus denen die Bedingungsgleichungen folgen

$$C=-2,\quad 4A+C=2,\quad 27A+3B+9C=6,\quad D+4C=-4,$$

woraus

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=-2,\quad D=4.$$

Es ist also

$$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2=a_1^2a_2-a_1a_3-2a_2^2+4a_4.$$

Wird a_0 von 1 verschieden vorausgesetzt, so ist allgemein

$$45)\qquad \varphi=\left(\frac{1}{a_0}\right)^P\Sigma Ca_0^{\lambda_0}a_1^{\lambda_1}\ldots a_n^{\lambda_n},$$

und man hat den vorigen Satz in der Form:

Die Funktion φ ist bezüglich der Koefficienten bis auf eine Potenz von a_0 homogen und vom Grade P, isobarisch und vom Gewicht $p_1+p_2+\ldots$

6. Man kann umgekehrt die Koefficienten und die Aggregate der Koefficienten durch die symmetrischen Funktionen der Wurzeln ausdrücken.

In diesem Falle kann der höchste Exponent in den symmetrischen Funktionen der Wurzeln die Anzahl der Koefficienten, die in dem betreffenden Aggregat vorkommen, nicht überschreiten, und die Anzahl der Wurzeln in den symme-

trischen Funktionen ist höchstens dem Gewicht des Aggregates gleich.*

Man kann diesen Satz daraus folgern, dass die Koefficienten der Gleichung lineare Funktionen jeder Wurzel sind. So sei

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}$$

das gegebene Koefficientenaggregat, $P = p_1 + 2p_2 + \dots + kp_k$ das Gewicht desselben, so hat man die Relation

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k} = (-1)^P (\Sigma \alpha_1)^{p_1} (\Sigma \alpha_1 \alpha_2)^{p_2} \dots (\Sigma \alpha_1 \dots \alpha_k)^{p_k}.$$

Entwickelt man aber die Produkte, so tritt in dem entwickelten Ausdruck eine Wurzel nur so oft auf, als sie in allen Summen vorkommt, und ausserdem sind beide Ausdrücke isobarisch, was die erwähnte Eigenschaft liefert.

Beispiele:

a) Gewicht = 1.

$$-a_1 = \Sigma \alpha_1.$$

b) Gewicht = 2.

$$a_2 = \Sigma \alpha_1 \alpha_2$$
$$a_1^2 = \Sigma \alpha_1^2 + 2 \Sigma \alpha_1 \alpha_2.$$

c) Gewicht = 3.

$$-a_3 = \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$
$$-a_1 a_2 = \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 + 3 \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$
$$-a_1^3 = \Sigma \alpha_1^3 + 3 \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 + 6 \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3.$$

d) Gewicht = 4.

$$a_4 = \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$$
$$a_1 a_3 = \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 + 4 \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$$
$$a_2^2 = \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2^2 + 2 \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 + 6 \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$$
$$a_1^2 a_2 = \Sigma \alpha_1^3 \alpha_2 + 2 \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2^2 + 5 \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 + 12 \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$$
$$a_1^4 = \Sigma \alpha_1^4 + 4 \Sigma \alpha_1^3 \alpha_2 + 6 \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2^2 + 12 \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 + 24 \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$$

u. s. w.

In jeder Gruppe der vorstehenden Gleichungen müssen, da beide Teile isobarisch sind, ebensoviel von einander verschiedene Wurzelaggregate vorkommen, als auf der linken Seite Aggregate von Koefficienten, d. h. so viele, als die Anzahl der in jeder Gruppe vorhandenen Gleichungen beträgt. Jede Gruppe liefert also ein System linearer Gleichungen für die verschiedenen Funktionen $\varphi(\alpha)$, das jede Funktion $\varphi(\alpha)$ von gegebenem Gewicht zu berechnen gestattet; z. B.

---

* Diesen Satz verdankt man Cayley, Phil. Trans. 1857 pag. 490 und 491. Man hätte daraus den Satz 5. ableiten können.

$$\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -a_3$$
$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2 = -a_1a_2 + 3a_3$$
$$\Sigma\alpha_1^3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3, \text{ u. s. w.}$$

7. Zur Berechnung der symmetrischen Funktion $\Sigma\varphi(\alpha_1)$, wo $\varphi(\alpha_1)$ eine ganze rationale Funktion einer Wurzel α_1 bedeutet, dient der folgende Satz von Cauchy:*

Die symmetrische Funktion $\Sigma\varphi(\alpha_1)$ der sämtlichen Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$ ist gleich dem Koefficienten von x^{-1} in der Entwicklung von

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\varphi(x).$$

Beweis. Setzt man

$$\varphi(x) = \theta_i(x).(x-\alpha_i) + \varphi(\alpha_i),$$

so folgt aus

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \ldots$$

die Gleichung

$$46)\quad \frac{f'(x)}{f(x)}.\varphi(x) = \psi(x) + \frac{\varphi(\alpha_1)}{x-\alpha_1} + \frac{\varphi(\alpha_2)}{x-\alpha_2} + \ldots = \psi(x) + \frac{1}{x}\Sigma\varphi(\alpha_1) + \ldots,$$

wo $\psi(x)$ eine ganze Funktion von x bedeutet.

Anmerkung 1. Setzt man

$$\varphi(\alpha_1) = \Sigma b_k\alpha_1^k,$$

so folgt aus Formel 14)

$$47)\quad \Sigma\varphi(\alpha_1) = -\Sigma b_k\frac{k}{\Pi(k)}.\left\{\frac{\partial^k}{\partial y^k}log(a_0 + a_1y + \ldots)\right\}_{y=0},$$

und setzt man symbolisch

$$kb_k = B^k,$$

so kommt

$$48)\quad \Sigma\varphi(\alpha_1) = -log(a_0 + a_1B + a_2B^2 + \ldots),$$

worin nach Ausführung der Operationen B^k wieder in kb_k zu verwandeln ist.

Anmerkung 2. Die vorstehenden Formeln genügen zur Berechnung jeder symmetrischen Funktion der Wurzeln. Meyer Hirsch hat in seiner Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen bereits im Jahre 1809 mit geringeren Hilfs-

* Dieser Satz wird vielfach Transon zugeschrieben. (Nouv. Ann. de Math. t. 9.) Die Priorität gebührt jedoch Cauchy, der denselben bereits 1826 (Exerc. de Math.) als speciellen Fall seiner Formeln des Residuen-Kalküls behandelt.

mitteln als sie die vorstehenden Formeln bieten, alle symmetrischen Funktionen bis zum zehnten Grad berechnet. Allein besonders seit den Arbeiten von Cayley und Brioschi sind wir im Stande mit Hilfe neuer Eigenschaften der symmetrischen Funktionen auf rascherem und sichererem Weg zum Ziel zu gelangen.* Diese Eigenschaften sollen nun entwickelt werden.

§ 2. Partielle Differentialgleichungen, denen die symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung genügen.

1. Die symmetrische Funktion φ, einerseits als Funktion der Koefficienten, anderseits als Funktion der Potenzsummen betrachtet, genügt der partiellen Differentialgleichung

$$1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_{k+1}} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_{k+2}} + \ldots + a_{n-k} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} + k \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} = 0.$$

Beweis. Nach den Regeln der Differentialrechnung ist

$$2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial s_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial s_k} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} \cdot \frac{\partial a_n}{\partial s_k},$$

$$3) \quad \frac{\partial a_i}{\partial s_k} = \frac{\partial a_i}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_k} + \frac{\partial a_i}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_k} + \ldots + \frac{\partial a_i}{\partial \alpha_n} \cdot \frac{\partial \alpha_n}{\partial s_k}.$$

Ferner ist

$$4) \quad -\frac{\partial a_i}{\partial \alpha_\lambda} = a_{i-1} + a_{i-2}\alpha_\lambda + a_{i-3}\alpha_\lambda^2 + \ldots + a_1 \alpha_\lambda^{i-2} + \alpha_\lambda^{i-1},$$

denn der Koefficient a_i hängt linear von den Wurzeln ab, also kommt in $\frac{\partial a_i}{\partial \alpha_\lambda}$ die Wurzel α_λ nicht mehr vor und $\frac{\partial a_i}{\partial \alpha_\lambda}$ ist die Kombination der übrigen Wurzeln zu $i-1$. Entwickelt man daher die Gleichung

$$\frac{f(x)}{x - \alpha_\lambda} = 0,$$

so ist $\frac{\partial a_i}{\partial \alpha_\lambda}$ der Koefficient von $x^{n-1-(i-1)}$ d. h. von x^{n-i} multipliziert mit $\frac{(-1)^i}{(-1)^{i-1}} = -1$.

---

* Die Abhandlung Cayley's Phil. Trans. 1857 p. 489. A memoir on the symmetric functions u. s w. enthält die Tabellen von Meyer Hirsch (*b*); sowie von ihm selbst neu entworfene Tabellen (*a*). Beide umfassen die symmetrischen Funktionen bis zum zehnten Grad incl.

Brioschi, Annali di Tortolini t. 5, 1854: „sulle funzioni simmetriche delle radici di un' equazione".

Setzen wir die Werte für $\frac{\partial a_i}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial a_i}{\partial \alpha_2}, \ldots, \frac{\partial a_i}{\partial \alpha_n}$ in die Gleichung 3) ein, so kommt

$$5) \quad -\frac{\partial a_i}{\partial s_k} = a_{i-1}\sum_1^n{}^{\mu} \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial s_k} + a_{i-2}\sum \alpha_\mu \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial s_k} + a_{i-3}\sum \alpha_\mu{}^2 \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial s_k}$$
$$+ \ldots + a_1 \sum \alpha_\mu{}^{i-2} \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial s_k} + \sum \alpha_\mu{}^{i-1} \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial s_k},$$

wo die Summen alle ganzzahligen Werte von μ von 1 bis n umfassen. Diese Summen können durch die Ableitungen der Grössen $s_1, s_2, \ldots, s_i$ nach s_k ersetzt werden. Denn es wird

$$\sum{}^{\mu} \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial s_k} = \frac{\partial s_1}{\partial s_k}$$
$$\sum \alpha_\mu \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial s_k} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial s_2}{\partial s_k}$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\sum \alpha_\mu{}^{i-1} \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial s_k} = \frac{1}{i} \frac{\partial s_i}{\partial s_k},$$

also

$$6) \quad -\frac{\partial a_i}{\partial s_k} = a_{i-1}\frac{\partial s_1}{\partial s_k} + \tfrac{1}{2}\, a_{i-2}\frac{\partial s_2}{\partial s_k} + \tfrac{1}{3}\, a_{i-3}\frac{\partial s_3}{\partial s_k} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{i-1} a_1 \frac{\partial s_{i-1}}{\partial s_k} + \frac{1}{i}\frac{\partial s_i}{\partial s_k}.$$

Für $i > k$ verschwinden alle Ableitungen $\frac{\partial s_h}{\partial s_k}$ dieses Ausdrucks 6) bis auf $\frac{\partial s_k}{\partial s_k} = 1$, und die Ableitung $\frac{\partial a_i}{\partial s_k}$ nimmt die einfache Form an

$$\frac{\partial a_i}{\partial s_k} = -\frac{1}{k} a_{i-k}.$$

Für $i = k$ ist $a_{i-k} = 1$ und

$$\frac{\partial a_k}{\partial s_k} = -\frac{1}{k}.$$

Für $i < k$ verschwinden alle Ableitungen und es ist

$$\frac{\partial a_i}{\partial s_k} = 0.$$

Führen wir diese Werte für $\frac{\partial a_i}{\partial s_k}$ in die Gleichung 2) ein, so geht dieselbe unmittelbar in die zu beweisende Gleichung 1) über.

Anmerkung. Multipliziert man die Gleichung 4) mit α_λ^μ, erteilt λ alle Werte von 1 bis n und summiert, so kommt

$$7) \quad -\sum_1^n{}_\lambda \frac{\partial a_i}{\partial \alpha_\lambda} \cdot \alpha_\lambda^\mu = \sum{}_\lambda (a_{i-1}\alpha_\lambda^\mu + a_{i-2}\alpha_\lambda^{\mu+1} + \ldots + a_1 \alpha_\lambda^{\mu+i-2} + \alpha_\lambda^{\mu+i-1}) =$$
$$= s_{\mu+i-1} + a_1 s_{\mu+i-2} + \ldots + a_{i-1} s_\mu.$$

Diese Formel 7) dient zur Berechnung von φ, wenn dasselbe die Form hat

$$8) \quad \varphi = \Sigma \alpha_1^\mu \alpha_2 \ldots \alpha_i,$$

wo alle Wurzeln mit Ausnahme einer einzigen linear vorkommen.

Man kann aber diese Formel 7) auch direkt ableiten, denn man hat die Identität

$$\Sigma \alpha_1^{\mu-1} \Sigma \alpha_1 \ldots \alpha_i = \Sigma \alpha_1^\mu \alpha_2 \ldots \alpha_i + \Sigma \alpha_1^{\mu-1} \alpha_2 \ldots \alpha_{i+1},$$

wo das zweite Glied rechts $i+1$ Wurzeln enthält. Daraus folgt aber

$$9) \quad \begin{cases} \Sigma \alpha_1^\mu \alpha_2 \ldots \alpha_i = s_{\mu-1}(-1)^i a_i - \Sigma \alpha_1^{\mu-1} \alpha_2 \ldots \alpha_{i+1} \\ \Sigma \alpha_1^{\mu-1} \alpha_2 \ldots \alpha_{i+1} = s_{\mu-2}(-1)^{i+1} a_{i+1} - \Sigma \alpha_1^{\mu-1} \alpha_2 \ldots \alpha_{i+2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \ldots \alpha_{\mu+i} = s_1 (-1)^{\mu+i-2} . a_{\mu+i-2} - (\mu+i-1) \Sigma \alpha_1 \ldots \alpha_{\mu+i-1}. \end{cases}$$

Multipliziert man die Gleichungen dieses Systems abwechselnd mit $+1$, -1, ... und addiert, so ist

$$\Sigma \alpha_1^\mu \alpha_2 \ldots \alpha_i = (-1)^i \{ s_{\mu-1} a_i + s_{\mu-2} a_{i+1} + \ldots + s_1 a_{\mu+i-2} + (\mu+i-1) a_{\mu+i-1} \}$$

und mit Berücksichtigung der Newtonschen Identitäten (§ 1, 5)

$$\Sigma \alpha_1^\mu \alpha_2 \ldots \alpha_i = (-1)^{i+1} (s_{\mu+i-1} + a_1 s_{\mu+i-2} + \ldots + s_\mu a_{i-1}),$$

was die obige Formel 7) ist.

Beispiele.

$$\Sigma \alpha_1^4 \alpha_2 = (-1)^3 (s_5 + a_1 s_4) = -s_5 - a_1 s_4$$
$$\Sigma \alpha_1^5 \alpha_2 \alpha_3 = (-1)^4 (s_7 + a_1 s_6 + a_2 s_5) = s_7 + a_1 s_6 + a_2 s_5$$
$$\Sigma \alpha_1^6 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = (-1)^5 (s_9 + a_1 s_8 + a_2 s_7 + a_3 s_6)$$
$$\Sigma \alpha_1^7 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 = (-1)^6 (s_{11} + a_1 s_{10} + a_2 s_9 + a_3 s_8 + a_4 s_7).$$

Die Newtonschen Identitäten liefern endlich

$$\Sigma \alpha_1^4 \alpha_2 = a_2 s_3 + a_3 s_2 + a_4 s_1 + 5 a_5$$
$$\Sigma \alpha_1^5 \alpha_2 \alpha_3 = -a_3 s_4 - a_4 s_3 - a_5 s_2 - a_6 s_1 - 7 a_7$$

u. s. w.

2. Bezeichnet man die Summe der Exponenten der in φ enthaltenen Wurzeln mit p, so kann φ durch die Determinante dargestellt werden:

10)
$$p\varphi = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . & pa_p \\ 1\dfrac{\partial\varphi}{\partial s_1} & 1 & a_1 & a_2 & . & a_{p-1} \\ 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial s_2} & 0 & 1 & a_1 & . & a_{p-2} \\ 3\dfrac{\partial\varphi}{\partial s_3} & 0 & 0 & 1 & . & a_{p-3} \\ . & . & . & . & . & . \\ p\dfrac{\partial\varphi}{\partial s_p} & 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{vmatrix}.$$

Beweis. Da $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ isobarisch und vom Gewicht p ist, so hat man

$$k^p\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \varphi(k^1 a_1, k^2 a_2, \ldots, k^n a_n);$$

also durch Differentiation nach k, wenn man nachher $k=1$ setzt, die folgende Gleichung

11)
$$p\varphi = a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + na_n\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}.$$

Ferner ist 1)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_k} + a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_{k+1}} + a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_{k+2}} + \ldots + a_{n-k}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n} + k\frac{\partial\varphi}{\partial s_k} = 0,$$

woraus ein System von p Gleichungen gebildet werden kann, wenn man für k der Reihe nach die Werte 1, 2, ..., p einsetzt, nämlich

12)
$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + a_{p-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_p} + \frac{\partial\varphi}{\partial s_1} &= 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + a_{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial a_p} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial s_2} &= 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \\ \frac{\partial\varphi}{\partial a_p} + p\frac{\partial\varphi}{\partial s_p} &= 0. \end{aligned}$$

Bestimmt man aus diesem System die Werte von $\dfrac{\partial\varphi}{\partial a_1}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_p}$ und führt dieselben in 11) ein, so ergiebt sich $p\varphi$ in der Form 10).

Anmerkung. Eine besondere Vereinfachung der Rechnung wird durch Anwendung von 10) nicht erreicht, weil sich diese Formel von der in § 1 aufgestellten Formel 34) nur der Form nach unterscheidet.

Dagegen kann das in 1) zusammengefasste System partieller Differentialgleichungen 12) mit Vorteil zur Bestimmung der numerischen Koefficienten von φ verwandt werden, sobald man die symmetrische Funktion auf Grund der entwickelten Eigenschaften als Funk-

tion der Koefficienten $a_1, \ldots, a_n$ in unbestimmter Form angeschrieben hat. Zur Erläuterung diene das folgende Beispiel, das, wie die beiden vorstehenden Sätze, einer Abhandlung von Brioschi in Tortolinis Annalen 1854 entnommen ist.

Es soll die symmetrische Funktion

$$\varphi = \Sigma \alpha_1^4 \alpha_2^3 \alpha_3$$

durch die Koefficienten $a_1, \ldots$ ausgedrückt werden.

Die allgemeine Form von φ ist

$$\begin{aligned}\varphi = {} & A a_1^3 a_5 + B a_1^2 a_6 + C a_1^2 a_2 a_4 + D a_1^2 a_3^2 + E a_1 a_7 + F a_1 a_2 a_5 + \\ & + G a_1 a_3 a_4 + H a_1 a_2^2 a_3 + J a_2 a_6 + K a_2^2 a_4 + L a_3 a_5 + M a_2 a_3^2 + \\ & + N a_4^2 + P a_8.\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Koefficienten $A, B, \ldots$ dient das System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_4} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_5} + a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_6} + a_4 \frac{\partial \varphi}{\partial a_7} + a_5 \frac{\partial \varphi}{\partial a_8} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial s_3} &= 0 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial a_4} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_5} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_6} + a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_7} + a_4 \frac{\partial \varphi}{\partial a_8} + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial s_4} &= 0 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial a_5} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_6} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_7} + a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_8} + 5 \frac{\partial \varphi}{\partial s_5} &= 0 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial a_7} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_8} + 7 \frac{\partial \varphi}{\partial s_7} &= 0 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial a_8} + 8 \frac{\partial \varphi}{\partial s_8} &= 0.
\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial s_3}, \frac{\partial \varphi}{\partial s_4}, \ldots$ können leicht mit Hilfe der Formel

$$\varphi = s_1 s_3 s_4 - s_4^2 - s_3 s_5 - s_1 s_7 + 2 s_8$$

bestimmt werden. Es ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial s_3} &= s_1 s_4 - s_5 = \Sigma \alpha_1^4 \alpha_2 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial s_4} &= s_1 s_3 - 2 s_4 = \Sigma \alpha_1^3 \alpha_2 - \Sigma \alpha_1^4 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial s_5} &= - s_3 = - \Sigma \alpha_1^3 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial s_7} &= - s_1 = - \Sigma \alpha_1 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial s_8} &= 2.
\end{aligned}$$

Mit Benutzung der Tabellen erhält man das System von Bedingungsgleichungen

$$\begin{array}{lll} A+C-3=0, & B+2D+G+3=0, & E+G+2N-3=0, \\ F+H+K+9=0, & J+L+2M-15=0, & L+P+15=0, \\ B+C+F+20=0, & E+G+L-20=0, & K+J-16=0, \\ 2N+P+32=0, & A-4=0, & A+B+5=0, \\ E+F+J-15=0, & E+P+7=0, & P+16=0, \end{array}$$

woraus

$$A=4,\quad B=-9,\quad C=-1,\quad D=-2,\quad E=9,\quad F=-10,\quad G=10,$$
$$H=1,\quad J=16,\quad K=0,\quad L=1,\quad M=-1,\quad N=-8,\quad P=-16.$$

Die betrachtete symmetrische Funktion lautet also

$$\varphi = 4a_1^3a_5 - 9a_1^2a_6 - a_1^2a_2a_4 - 2a_1^2a_3^2 + 9a_1a_7 - 10a_1a_2a_5 + 10a_1a_3a_4 + \\ + 16a_1a_2^2a_3 + a_2a_6 + a_3a_5 - a_2a_3^2 - 8a_4^2 - 16a_8.$$

3. Die Funktion φ, als Funktion der Potenzsummen s betrachtet, genügt der partiellen Differentialgleichung

$$13) \qquad p\varphi = s_1\frac{\partial\varphi}{\partial s_1} + 2s_2\frac{\partial\varphi}{\partial s_2} + \ldots + ps_p\frac{\partial\varphi}{\partial s_p}.$$

Beweis. Multipliziert man die Gleichungen des Systems 12) bezüglich mit $s_1, s_2, \ldots, s_p$ und addiert die so vorbereiteten Gleichungen zu 11), so erhält man

$$(a_1+s_1)\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + (2a_2+a_1s_1+s_2)\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + s_1\frac{\partial\varphi}{\partial s_1} + s_2\frac{\partial\varphi}{\partial s_2} + \ldots = p\varphi$$

und hieraus im Verein mit den Newtonschen Identitäten unmittelbar die Gleichung 13). Dieselbe liefert unabhängig von dem § 1, 3 bewiesenen Satz den Nachweis, dass die Funktion φ auch bezüglich der Potenzsummen isobarisch ist, unter der Voraussetzung, dass sie diese Eigenschaft für die Koefficienten a bereits besitzt. Man braucht zu diesem Nachweise nur auf die unbestimmt geschriebene Form φ' die Gleichung 13) anzuwenden.

4. Die Funktion φ, einerseits als Funktion der Wurzeln, anderseits als Funktion der Koefficienten betrachtet, genügt der partiellen Differentialgleichung

$$14) \qquad -\sum\nolimits_k \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_k} = n\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + (n-1)a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + a_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}.$$

Beweis. Die Identität

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_k} = \frac{\partial\varphi}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_k} + \frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial\alpha_k} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial a_n}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial\alpha_k}$$

liefert im Verein mit dem Ausdruck für $\frac{\partial a_i}{\partial\alpha_k}$ 4) die Gleichung

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}(a_1 + \alpha_k) + \frac{\partial \varphi}{\partial a_3}(a_2 + a_1\alpha_k + \alpha_k^2) +$$
$$+ \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}(a_{n-1} + a_{n-2}\alpha_k + \ldots + \alpha_k^{n-1}).$$

Erteilt man k die Werte von 1 bis n und summiert, so erhält man mit Berücksichtigung der Newtonschen Identitäten die Gleichung 14).

Anmerkung. Setzt man

$$\varphi = \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots,$$

so liefert die Gleichung 14) den Ausdruck

15) $$n\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (n-1)a_1\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + a_{n-1}\frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = -\sum\nolimits_k \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} =$$
$$= -p_1 \sum \alpha_1^{p_1-1}\alpha_2^{p_2}\ldots - p_2 \sum \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2-1}\alpha_3^{p_3}\ldots - \ldots$$

Z. B. sei

$$\varphi = \Sigma \alpha_1^3 \alpha_2 = a_1^2 a_2 - a_1 a_3 - 2a_2^2 + 4a_4,$$

so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = 2a_1 a_2 - a_3, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = a_1^2 - 4a_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} = -a_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_4} = 4,$$

und durch direkte Ausrechnung

$$4\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 3a_1\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 2a_2\frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + a_3\frac{\partial \varphi}{\partial a_4} = 3a_1^3 - 6a_1 a_2.$$

Gleichzeitig ist aber

$$-\sum\nolimits_k \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = -3\sum \alpha_1^2 \alpha_2 - 3\sum \alpha_1^3 =$$
$$= -3(-a_1 a_2 + 3a_3) - 3(-a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3) =$$
$$= 3a_1^3 - 6a_1 a_2,$$

woraus man sieht, dass die Gleichungen 14) und 15) erfüllt sind.

Mit Hilfe der Formel 15) könnte eine symmetrische Funktion berechnet werden, sobald man die symmetrischen Funktionen niederer Ordnung als bekannt voraussetzt.

5. Man kommt noch auf anderen Wegen zur Gleichung 14).

a) Differentiiert man die vorgelegte Gleichung $f(x) = 0$ nach a_i und setzt dann $x = \alpha_k$, so ergiebt sich

16) $$\frac{\partial \alpha_k}{\partial a_i} = -\frac{1}{f'(\alpha_k)} \cdot \alpha_k^{n-i},$$

wo i die Werte 1, 2, ..., n annehmen kann. Multipliziert man die daraus entspringenden n Gleichungen der Reihe nach mit

$$n, \quad (n-1)a_1, \quad (n-2)a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1},$$

so erhält man

17) $$n\frac{\partial \alpha_k}{\partial a_1}+(n-1)a_1\frac{\partial \alpha_k}{\partial a_2}+\ldots+a_{n-1}\frac{\partial \alpha_k}{\partial a_n}+1=0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}$ und erteilt k alle Werte von 1 bis n, so erhält man die Gleichung 14).

b) Noch einfacher folgt die Formel 14) aus folgender Betrachtung: Lässt man x in $x+h$ übergehen und entwickelt die Funktion φ nach Potenzen von h, so geht φ über in

18) $$\varphi-\sum\nolimits_k \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}\cdot h+\ldots,$$

während die Koefficienten $a_1, \ldots, a_n$ übergehen in

$$\begin{aligned} A_1&=a_1+nh\\ A_2&=a_2+(n-1)a_1h+\ldots\\ A_3&=a_3+(n-2)a_2h+\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\\ A_n&=a_n+a_{n-1}h+\ldots \end{aligned}$$

Entwickelt man die transformierte Funktion $\varphi(A_1, \ldots, A_n)$, ausgedrückt als Funktion der Koefficienten der gegebenen Gleichung, so ergiebt sich

19) $$\varphi(A_1, \ldots, A_n)=\varphi+\left(n\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}+(n-1)a_1\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}+\ldots+a_{n-1}\frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\right)h+\ldots$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke 18) und 19) und setzt die Koefficienten von h einander gleich, so ergiebt sich die Gleichung 14).

Hätte man die Koefficienten der vorgelegten Gleichung mit Binomialfaktoren geschrieben (vergl. zweiter Abschnitt, § 5, 1), so würde 14) die Form annehmen

20) $$-\sum\nolimits_k \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial \varphi}{\partial a_3}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial \varphi}{\partial a_n}.$$

6. Die Gleichung 17) führt auf eine bemerkenswerte Eigenschaft der Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung.

Multipliziert man nämlich die Gleichung 17) mit α_k^{i-1}, erteilt k alle Werte von 1 bis n und addiert die dadurch entstehenden Gleichungen, so kommt

21) $$n\frac{\partial s_i}{\partial a_1}+(n-1)a_1\frac{\partial s_i}{\partial a_2}+\ldots+a_{n-1}\frac{\partial s_i}{\partial a_n}+i\,.\,s_{i-1}=0,$$

wodurch s_i mit Hilfe von s_{i-1} ausgedrückt werden kann.

Man hätte dieselbe Gleichung erhalten, wenn man in 14) $\varphi=s_i$ gesetzt hätte.

7. **Die partielle Differentialgleichung 1) liefert noch weitere interessante Eigenschaften der Funktion φ.**

Bildet man nämlich aus 1) durch successive Multiplikation mit

$$s_i, \quad s_{i+1}, \quad s_{i+2}, \quad \ldots, \quad s_{i+n-k},$$

das System von partiellen Differentialgleichungen

$$s_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} + a_1 s_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_{k+1}} + a_2 s_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_{k+2}} + \ldots + a_{n-k} s_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = - k s_i \frac{\partial \varphi}{\partial s_k}$$

$$s_{i+1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{k+1}} + a_1 s_{i+1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{k+2}} + \ldots + a_{n-k-1} s_{i+1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = -(k+1) s_{i+1} \frac{\partial \varphi}{\partial s_{k+1}}$$

$$s_{i+2} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{k+2}} + \ldots + a_{n-k-2} s_{i+2} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = -(k+2) s_{i+2} \frac{\partial \varphi}{\partial s_{k+2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_{i+n-k} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = - n s_{i+n-k} \frac{\partial \varphi}{\partial s_n}$$

und addiert, so kommt

$$22)\quad \begin{cases} s_i \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_k} + (s_{i+1} + a_1 s_i) \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_{k+1}} + (s_{i+2} + a_1 s_{i+1} + a_2 s_i) \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_{k+2}} + \ldots + \\ \qquad + (s_{i+n-k} + a_1 s_{i+n-k-1} + \ldots + a_{n-k} s_i) \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_n} = \\ \qquad = - \left(k s_i \dfrac{\partial \varphi}{\partial s_k} + (k+1) s_{i+1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial s_{k+1}} + \ldots + n s_{i+n-k} \dfrac{\partial \varphi}{\partial s_n} \right). \end{cases}$$

Diese Gleichung 22) soll nun für specielle Werte von i und k betrachtet werden.

a) Setzt man in 22) $i = 0$ und berücksichtigt die Newtonschen Identitäten, so erhält man die einfache Relation

$$23)\quad n \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} + (n-1) a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_{k+1}} + \ldots + k a_{n-k} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = \\ = - \left(nk \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} + (k+1) . s_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s_{k+1}} + \ldots + n s_{n-k} \frac{\partial \varphi}{\partial s_n} \right).$$

b) Setzt man in 22) $i = k = 1$, so ergiebt sich

$$24)\quad a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + n a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = \\ = s_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} + 2 s_2 \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} + \ldots + n s_n \frac{\partial \varphi}{\partial s_n},$$

woraus man wiederum sieht, dass φ sowohl in Bezug auf die Koefficienten $a_1, \ldots, a_n$, als auch in Bezug auf die Potenzsummen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ **isobarisch** ist (vergl. Nr. 3 dieses Paragraphen).

c) Setzt man in 23) $k = 1$, so kommt

25) $$n\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+(n-1)a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots+a_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}=$$
$$=-\left(n\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}+2s_1\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}+\ldots+ns_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial s_n}\right).$$

d) Setzt man in 25) s_k an Stelle von φ, so verschwinden alle Glieder rechts bis auf

$$k s_{k-1}\frac{\partial s_k}{\partial s_k}=k s_{k-1}$$

und man erhält wieder die Gleichung 21).

8. Die Funktion φ, einerseits als Funktion der Wurzeln, anderseits als Funktion der Koefficienten betrachtet, genügt der partiellen Differentialgleichung

26) $$\sum\nolimits_k \alpha_k^i\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_k}=\lambda_{i,1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+\lambda_{i,2}\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots+\lambda_{i,n}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n},$$

wo

27) $$-\lambda_{i,r}=-\sum\nolimits_k\frac{\partial a_r}{\partial\alpha_k}\cdot\alpha_k^i=s_{i+r-1}+a_1s_{i+r-2}+\ldots+a_{r-1}s_i$$

bedeutet.

Beweis. Wir benutzen die beiden Identitäten

28) $$\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial\alpha_k}+\ldots+\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_n}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial\alpha_k}=1,$$

29) $$\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_m}+\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial\alpha_m}+\ldots+\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_n}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial\alpha_m}=0.$$

Geben wir in 29) dem Index m alle Werte von 1 bis n und multiplizieren die Gleichungen des dadurch entstehenden Systems der Reihe nach mit

$$\alpha_1^i,\quad \alpha_2^i,\quad \ldots,\quad \alpha_n^i$$

und addieren, so erhalten wir mit Rücksicht auf 28)

30) $$\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_1}\sum\nolimits_m\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_m}\cdot\alpha_m^i+\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_2}\sum\nolimits_m\frac{\partial a_2}{\partial\alpha_m}\cdot\alpha_m^i+\ldots+$$
$$+\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_n}\sum\nolimits_m\frac{\partial a_n}{\partial\alpha_m}\cdot\alpha_m^i=\alpha_k^i.$$

Nun ist allgemein

31) $$-\sum\nolimits_m\frac{\partial a_r}{\partial\alpha_m}\cdot\alpha_m^i=-\sum\nolimits_k\frac{\partial a_r}{\partial\alpha_k}\cdot\alpha_k^i=$$
$$=s_{i+r-1}+a_1s_{i+r-2}+\ldots+a_{r-1}s_i=-\lambda_{i,r}$$

in Übereinstimmung mit Gleichung 7) dieses Paragraphen.

Führt man das Symbol $\lambda_{i,r}$ in die Gleichung 30) ein, so ergiebt sich die bemerkenswerte Relation

32) $$\lambda_{i,1}\frac{\partial \alpha_k}{\partial a_1}+\lambda_{i,2}\frac{\partial \alpha_k}{\partial a_2}+\ldots+\lambda_{i,n}\frac{\partial \alpha_k}{\partial a_n}=\alpha_k^i.*$$

Multiplizieren wir nun noch diese Gleichung 32) mit $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}$ und erteilen wir dem Index k alle Werte von 1 bis n, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Identität

$$\sum\nolimits_k \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}\cdot\frac{\partial \alpha_k}{\partial a_i}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_i}$$

die Gleichung 26).

Anmerkung. Die Gleichung 26) führt für specielle Werte des Index i auf bekannte Relationen.

a) Ist $i=1$ und nennt man p das Gewicht von φ, so liefert 26)

33) $$p\varphi=\lambda_{1,1}\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}+\lambda_{1,2}\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}+\ldots+\lambda_{1,n}\frac{\partial \varphi}{\partial a_n},$$

und wenn man berücksichtigt, dass

$$\lambda_{1,r}=-(s_r+a_1 s_{r-1}+\ldots+a_{r-1}s_1)=r a_r,$$

so erhält man die bekannte Relation 11)

$$p\varphi=a_1\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}+2a_2\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}+\ldots+n a_n\frac{\partial \varphi}{\partial a_n}.$$

b) Für $i=0$ ist

$$-\lambda_{0,r}=s_{r-1}+a_1 s_{r-2}+\ldots+a_{r-2}s_1+n a_{r-1}=(n-r+1)\,a_{r-1},$$

wodurch man erhält 26)

34) $$\sum\nolimits_k \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}+n\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}+(n-1)\,a_1\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}+\ldots+a_{n-1}\frac{\partial \varphi}{\partial a_n}+1=0.$$

c) Für $i=2$ hat man

35) $$\sum\nolimits_k \alpha_k^2\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}=\sum\nolimits_r[-a_r a_1+(r+1)\,a_{r+1}]\frac{\partial \varphi}{\partial a_r};$$

denn es ist

$$\lambda_{2,r}=-(s_{r+1}+a_1 s_r+a_2 s_{r-1}+\ldots+a_{r-1}s_2)=a_r s_1+(r+1)\,a_{r+1}.$$

Z. B. für $\varphi=\Sigma\alpha_1^2\alpha_2=-a_1 a_2+3a_3$ giebt 35)

$$2\Sigma\alpha_1^3\alpha_2+2\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2=$$

$$=(-a_1^2+2a_2)\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}+(-a_1 a_2+3a_3)\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}+(-a_1 a_3+4a_4)\frac{\partial \varphi}{\partial a_3}=$$

$$=2\,(a_1^2 a_2-a_1 a_3-2a_2^2+4a_4)+2\,(a_2^2-2a_1 a_3+2a_4),$$

wo die in den Klammern stehenden Ausdrücke bez. die Werte der symmetrischen Funktionen

---

* Diese wichtige Beziehung ist von Raabe, Crelles Journal 48 p. 167 gefunden worden.

$$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2 \text{ und } \Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2$$

angeben.

d) Setzt man in der Raabeschen Gleichung 32) $i=0$, so kommt

$$36) \qquad n\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_1}+(n-1)a_1\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_2}+\ldots+a_{n-1}\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_n}+1=0.$$

Setzt man hierin

$$\alpha_k=-\frac{a_1}{n}+\psi,$$

so geht 36) über in

$$37) \qquad n\frac{\partial\psi}{\partial a_1}+(n-1)a_1\frac{\partial\psi}{\partial a_2}+\ldots+a_{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial a_n}=0,$$

was nach Formel 14), die nach ihrem Beweisgang auch für nichtsymmetrische Funktionen gilt, identisch ist mit der Gleichung

$$38) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_n}=0.$$

Nun wird unten § 4, 3 bewiesen werden, dass jede Funktion ψ, die der Gleichung 38) genügt, eine Funktion der Wurzeldifferenzen ist. Also hat jede Wurzel einer Gleichung, ausgedrückt als Funktion der Koefficienten, die Form $\alpha_k=\frac{-a_1}{n}+$ eine Funktion der Wurzeldifferenzen.

9. Es möge hier noch eine kurze Bemerkung Platz finden über eine Methode zur Berechnung der symmetrischen Funktionen, die von Gauss in seiner berühmten Abhandlung, Demonstratio nova altera etc. 1816 Werke 3. Bd. zu Beweiszwecken, nicht zur Ausrechnung selbst, angeführt worden ist.*

Setzen wir $p_1\geqq p_2\geqq p_3\geqq\ldots$ voraus, so dass die Differenzen p_1-p_2, p_2-p_3, ... positiv und ganz sind, so lässt sich von der symmetrischen Funktion

$$\Sigma\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots$$

ein Produkt der Koefficienten der gegebenen Gleichung subtrahieren, so dass in der Differenz die p_1^{te} Potenz der Wurzeln nicht mehr vorkommt.

Dieses Produkt ist von der Form

$$a_1^{p_1-p_2}a_2^{p_2-p_3}a_3^{p_3-p_4}\ldots$$

und kann bis aufs Zeichen ausgedrückt werden durch

* Diese Methode ist schon von Waring, Meditat. algebr. ed. 3. pag. 13 angegeben worden.

$$(\Sigma\alpha_1)^{p_1-p_2}(\Sigma\alpha_1\alpha_2)^{p_2-p_3}(\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{p_3-p_4}\ldots$$

Entwickelt man dieses Produkt, so findet man darin auch die gegebene symmetrische Funktion $\Sigma\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots$ enthalten, und es wird das höchste Glied der Differenz niederer Ordnung als das höchste Glied der vorgelegten Funktion.

Verfährt man mit der Differenz ebenso, so erniedrigt sich auf gleiche Weise der Grad derselben, und man kommt schliesslich auf symmetrische Funktionen, die in Bezug auf jede Wurzel linear sind, d. h. auf die Koefficienten der Gleichung. Also kann leicht die gegebene symmetrische Funktion durch die Koefficienten dargestellt werden. (Gauss, Werke 3. Bd. pag. 37.)

Beispiel zur Gaussschen Methode. Es sei die symmetrische Funktion

$$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3$$

gegeben. Das zu subtrahierende Produkt lautet

$$a_1^{3-1}.a_2^{1-1}.a_3^{1-0}=a_1^2a_3$$

oder bis aufs Zeichen

$$(\Sigma\alpha_1)^2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Die Differenz ist

$$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3-(\Sigma\alpha_1)^2.\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3=$$
$$=-(3\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4+2\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3+2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)^*.$$

Ferner bilde man die Differenzen

$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4-\Sigma\alpha_1.\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=-5\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$$
$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3-\Sigma\alpha_1\alpha_2.\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-(3\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4+10\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5).$$

Man findet aus diesen Gleichungen die Werte

$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4=-a_1a_4+5a_5,$$
$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3=-a_2a_3+3a_1a_4-5a_5,$$
$$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3=-a_1^2a_3+2a_2a_3+a_1a_4-5a_5.$$

§ 3. Bestimmung der symmetrischen Verbindungen vermittelst der erzeugenden Funktion von Borchardt.

1. Satz von Borchardt. „Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung

1) $$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0,$$

so ist die symmetrische Funktion der Wurzeln

2) $$\Sigma\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots\alpha_n^{p_n}$$

gleich dem Koefficienten des Gliedes

* Die Entwicklung ist hier abzubrechen, weil das Gewicht 5 ist.

$$t_1^{-(p_1+1)} t_2^{-(p_2+1)} \dots t_n^{-(p_n+1)}$$

in der nach fallenden Potenzen von $t_1, \dots, t_n$ geordneten Entwicklung des Ausdrucks

$$3)\quad \theta(t_1, t_2, \dots, t_n) = (-1)^n \frac{f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n)}{\Delta(t_1, t_2, \dots, t_n)} \cdot \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \left| \frac{\Delta(t_1, t_2, \dots, t_n)}{f(t_1) \dots f(t_n)} \right|,$$

wo

$$4)\quad \Delta(t_1, t_2, \dots, t_n) = (t_2 - t_1)(t_3 - t_1) \dots (t_n - t_1)(t_3 - t_2) \dots (t_n - t_2) \dots \dots \dots (t_n - t_{n-1})$$

das Produkt aller Differenzen der Grössen $t_1, t_2, \dots, t_n$ bedeutet."*

2. Zunächst beweisen wir den folgenden Satz:

Bildet man den Ausdruck

$$5)\quad T = \Sigma \frac{1}{t_1 - \alpha_i} \cdot \frac{1}{t_2 - \alpha_k} \cdots \frac{1}{t_n - \alpha_q},$$

welcher alle Glieder umfassen soll, die aus dem angeschriebenen dadurch entstehen, dass man für $i, k, \dots, q$ alle Permutationen der Nummern 1, 2, 3, ..., n setzt; bildet man ferner die Ausdrücke

$$6)\quad B = \begin{vmatrix} \frac{1}{(t_1-\alpha_1)^2} & \frac{1}{(t_1-\alpha_2)^2} & \frac{1}{(t_1-\alpha_3)^3} & \cdots & \frac{1}{(t_1-\alpha_n)^2} \\ \frac{1}{(t_2-\alpha_1)^2} & \frac{1}{(t_2-\alpha_2)^2} & \frac{1}{(t_2-\alpha_3)^2} & \cdots & \frac{1}{(t_2-\alpha_n)^2} \\ \frac{1}{(t_3-\alpha_1)^2} & \frac{1}{(t_3-\alpha_2)^2} & \frac{1}{(t_3-\alpha_3)^2} & \cdots & \frac{1}{(t_3-\alpha_n)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(t_n-\alpha_1)^2} & \frac{1}{(t_n-\alpha_2)^2} & \frac{1}{(t_n-\alpha_3)^2} & \cdots & \frac{1}{(t_n-\alpha_n)^2} \end{vmatrix},$$

$$7)\quad C = \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1-\alpha_1} & \frac{1}{t_1-\alpha_2} & \frac{1}{t_1-\alpha_3} & \cdots & \frac{1}{t_1-\alpha_n} \\ \frac{1}{t_2-\alpha_1} & \frac{1}{t_2-\alpha_2} & \frac{1}{t_2-\alpha_3} & \cdots & \frac{1}{t_2-\alpha_n} \\ \frac{1}{t_3-\alpha_1} & \frac{1}{t_3-\alpha_2} & \frac{1}{t_3-\alpha_3} & \cdots & \frac{1}{t_3-\alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{t_n-\alpha_1} & \frac{1}{t_n-\alpha_2} & \frac{1}{t_n-\alpha_3} & \cdots & \frac{1}{t_n-\alpha_n} \end{vmatrix},$$

so ist

* Borchardt, Berl. Monatsbericht 1855 pag. 165, Crelles Journ. 53 pag. 193.

8) $$B = T.C.$$

Beweis. Die Ausdrücke B und $T.C$ haben den gemeinsamen Nenner

$$N^2 = f(t_1)^2 . f(t_2)^2 \dots f(t_n)^2,$$

und die Determinanten B und C sind teilbar sowohl durch $\Delta(t_1, \dots, t_n)$, als auch durch $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, denn sowohl für $t_i = t_k$, als auch für $\alpha_i = \alpha_k$ verschwinden beide Determinanten. Diese letztere Eigenschaft kann direkt nachgewiesen werden, wenn man in den Determinanten B und C von einer Zeile oder Kolonne eine andere Zeile oder Kolonne subtrahiert. Dadurch treten die Differenzen $\alpha_i - \alpha_k$, $t_i - t_k$ als Faktoren in B und C ein. Denn man hat

$$\frac{1}{(t_h - \alpha_i)^2} - \frac{1}{(t_h - \alpha_k)^2} = (\alpha_i - \alpha_k) \cdot \frac{2t_h - \alpha_i - \alpha_k}{(t_h - \alpha_i)^2 (t_h - \alpha_k)^2},$$

$$\frac{1}{t_h - \alpha_i} - \frac{1}{t_h - \alpha_k} = (\alpha_i - \alpha_k) \cdot \frac{1}{(t_h - \alpha_i)(t_h - \alpha_k)},$$

$$\frac{1}{(t_i - \alpha_h)^2} - \frac{1}{(t_k - \alpha_h)^2} = (t_i - t_k) \cdot \frac{2\alpha_h - t_i - t_k}{(t_i - \alpha_h)^2 (t_k - \alpha_h)^2},$$

$$\frac{1}{t_i - \alpha_h} - \frac{1}{t_k - \alpha_h} = (t_k - t_i) \cdot \frac{1}{(t_i - \alpha_h)(t_k - \alpha_h)}.$$

Also ist B im allgemeinen von der Form

$$B = \frac{M}{N^2}.$$

M ist sowohl durch $\Delta(t_1, \dots, t_n)$, als auch durch $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ teilbar, mithin eine ganze alternierende Funktion sowohl von $t_1, \dots, t_n$, als auch von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und hat die Form

$$M = \Delta(t_1, \dots, t_n) . \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) . M',$$

wo M' eine symmetrische Funktion der Variabeln $t_1, \dots, t_n$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ist.

Um sich über die Form von M' zu vergewissern, soll der specielle Fall $n = 3$ untersucht werden.*

B ist dann von der Form

$$B = \begin{vmatrix} \frac{1}{(t_1 - \alpha_1)^2} & \frac{1}{(t_1 - \alpha_2)^2} & \frac{1}{(t_1 - \alpha_3)^2} \\ \frac{1}{(t_2 - \alpha_1)^2} & \frac{1}{(t_2 - \alpha_2)^2} & \frac{1}{(t_2 - \alpha_3)^2} \\ \frac{1}{(t_3 - \alpha_1)^2} & \frac{1}{(t_3 - \alpha_2)^2} & \frac{1}{(t_3 - \alpha_3)^2} \end{vmatrix} = \frac{M}{N^2},$$

wo

* Vergl. über den folgenden Beweis Cayley, Philos. Transact. 1857, pag. 493.

$$N = f(t_1) f(t_2) f(t_3) = (t_1 - \alpha_1)(t_1 - \alpha_2)(t_1 - \alpha_3) \cdot (t_2 - \alpha_1)(t_2 - \alpha_2)(t_2 - \alpha_3) \cdot (t_3 - \alpha_1)(t_3 - \alpha_2)(t_3 - \alpha_3).$$

$M = B \cdot N^2$ ist eine ganze, alternierende Funktion zwölften Grades bezüglich der sämtlichen Variabeln t_1, t_2, t_3, α_1, α_2, α_3, und vierten Grades in Bezug auf jede der Variabeln, und ist von der Form

$$M = \Delta(t_1, t_2, t_3) \cdot \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot M',$$

wo M' eine Funktion sechsten Grades in Bezug auf sämtliche Variabeln t_1, t_2, t_3, α_1, α_2, α_3, und zweiten Grades in Bezug auf jede der Variabeln ist. Als Funktion zweiten Grades von jeder der Grössen t_1, t_2, t_3 kann M' der Reihe nach auch als lineare Funktion je der drei Produkte

$$\begin{array}{lll} (t_1 - \alpha_2)(t_1 - \alpha_3), & (t_1 - \alpha_3)(t_1 - \alpha_1), & (t_1 - \alpha_1)(t_1 - \alpha_2), \\ (t_2 - \alpha_2)(t_2 - \alpha_3), & (t_2 - \alpha_3)(t_2 - \alpha_1), & (t_2 - \alpha_1)(t_2 - \alpha_2), \\ (t_3 - \alpha_2)(t_3 - \alpha_3), & (t_3 - \alpha_3)(t_3 - \alpha_1), & (t_3 - \alpha_1)(t_3 - \alpha_2), \end{array}$$

die der Reihe nach durch

$$\begin{array}{lll} u_1, & u_2, & u_3, \\ v_1, & v_2, & v_3, \\ w_1, & w_2, & w_3, \end{array}$$

bezeichnet werden sollen, aufgefasst werden. Ferner weis man, dass M' eine symmetrische Funktion der Wurzeln α_1, α_2, α_3 ist. Aus dem letzteren Grunde wird M' durch das Produkt darzustellen sein

$$M' = (\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3)(\lambda' v_1 + \mu' v_2 + \nu' v_3)(\lambda'' w_1 + \mu'' w_2 + \nu'' w_3),$$

wo λ, μ, ν, λ', μ', ν', λ'', μ'', ν'' noch zu bestimmende numerische Koefficienten bedeuten.

Die Funktion M' ist aber auch symmetrisch in Bezug auf die Variabeln t_1, t_2, t_3 und folglich auch symmetrisch in Bezug auf die Systeme

$$(u_1, u_2, u_3), \quad (v_1, v_2, v_3), \quad (w_1, w_2, w_3),$$

so dass die unbestimmten Koefficienten

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda' = \lambda'', \\ \mu &= \mu' = \mu'', \\ \nu &= \nu' = \nu'' \end{aligned}$$

vorausgesetzt werden können. Mithin hat M' die Form

$$M' = (\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3)(\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3)(\lambda w_1 + \mu w_2 + \nu w_3).$$

Weil ferner M' bezüglich der Variabeln α_1, α_2, α_3 vom zweiten Grade ist, so können Glieder der Form

$$u_1 v_1 w_1, \quad u_1 v_1 w_2, \quad u_1 v_1^2, \quad \ldots$$

nicht vorkommen, sondern nur Glieder, deren Koefficient gleich $\lambda\mu\nu$ ist. Setzen wir nun

$$\lambda\mu\nu = K,$$

$$u_1(v_2w_3 + v_3w_2) + v_1(w_2u_3 + w_3u_2) + w_1(u_2v_3 + u_3v_2) = U$$

oder symbolisch

$$U = \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \right\|,$$

wo jedoch festgesetzt werden muss, dass nach Entwicklung der Determinante alle Minuszeichen in Pluszeichen verwandelt werden, so ist

$$M' = K.U.$$

Wir haben also B in der Form

$$B = \frac{\Delta(t_1, t_2, t_3) \cdot \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{N} \cdot \frac{KU}{N}.$$

Mit Berücksichtigung der Identität

$$(-1)^3 \frac{\Delta(t_1, t_2, t_3) \cdot \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{f(t_1) \cdot f(t_2) \cdot f(t_3)} = C = \left| \begin{matrix} \frac{1}{t_1 - \alpha_1} & \frac{1}{t_1 - \alpha_2} & \frac{1}{t_1 - \alpha_3} \\ \frac{1}{t_2 - \alpha_1} & \frac{1}{t_2 - \alpha_2} & \frac{1}{t_2 - \alpha_3} \\ \frac{1}{t_3 - \alpha_1} & \frac{1}{t_3 - \alpha_2} & \frac{1}{t_3 - \alpha_3} \end{matrix} \right| *$$

folgt

$$B = C.(-1)^3.\frac{KU}{N}.$$

Nun ist aber symbolisch

$$\frac{U}{N} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{t_1 - \alpha_1} & \frac{1}{t_1 - \alpha_2} & \frac{1}{t_1 - \alpha_3} \\ \frac{1}{t_2 - \alpha_1} & \frac{1}{t_2 - \alpha_2} & \frac{1}{t_2 - \alpha_3} \\ \frac{1}{t_3 - \alpha_1} & \frac{1}{t_3 - \alpha_2} & \frac{1}{t_3 - \alpha_3} \end{matrix} \right\|,$$

wenn wir wieder festsetzen, dass nach Entwicklung der Determinante alle Minuszeichen in Pluszeichen umgeändert werden. Man erhält diesen symbolischen Ausdruck leicht, wenn man die für die gleiche Voraussetzung giltige Determinante für U Zeile für Zeile der Reihe nach durch

$$f(t_1),\quad f(t_2),\quad f(t_3)$$

dividiert.

---

* Vergleiche unten Nr. 3.

Der symbolische Ausdruck für $\frac{U}{N}$ ist aber gleich

$$T = \sum \frac{1}{t_1 - \alpha_h} \cdot \frac{1}{t_2 - \alpha_i} \cdot \frac{1}{t_3 - \alpha_k},$$

wenn man für h, i, k alle Permutationen der Nummern 1, 2, 3 einsetzt. Ferner findet man durch Vergleichung beider Seiten der oben für B aufgestellten Gleichung, dass $K = (-1)^3$ ist; also

$$B = C.T.$$

Diese Betrachtung kann allgemein durchgeführt werden.*

3. Wir gehen zum Beweis des **Borchardtschen Satzes** über.

Die Determinante C kann durch folgenden Ausdruck dargestellt werden**

$$9) \qquad C = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{\Delta(t_1, \ldots, t_n) \cdot \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{f(t_1) \ldots f(t_n)}.$$

Denn multipliciert man die Zeilen der Determinante C der Reihe nach mit

$$f(t_1), \quad f(t_2), \quad \ldots, \quad f(t_n),$$

so erhält man

$$C.f(t_1) \ldots f(t_n) = \begin{vmatrix} \frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_1} & \cdots & \frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_n} \\ \frac{f(t_2)}{t_2 - \alpha_1} & \cdots & \frac{f(t_2)}{t_2 - \alpha_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_1} & \cdots & \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_n} \end{vmatrix},$$

wo nun beide Seiten für $t_i = \alpha_k$ nicht verschwinden.

Die rechte Seite dieser Gleichung ist teilbar durch $\Delta(t_1, \ldots, t_n)$ und $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Der von den t und α unabhängige Quotient wird dadurch ermittelt, dass man den Grössen t_i bez. die Werte α_i zuerteilt. Hierdurch bleiben nur die Elemente der Diagonale in der Determinante übrig und diese wird gleich

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2,$$

der Faktor also zu

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

Wenn man nun die Determinante C nach den Variabeln $t_1, \ldots, t_n$ differentiiert, so erhält man die Determinante***

---

* Borchardt, Crelle Journal 53 pag. 195, und Baltzer, Determ. § 10, 20.

** Cauchy, Exerc. d'analyse, 2, p. 154; vgl. Baltzer, Determ. § 10, 15 u. 16.

*** Borchardt, Crelle Journal 53 pag. 195.

$$10) \qquad B = (-1)^n \frac{\partial^n C}{\partial t_1 \dots \partial t_n}.$$

Also hat man

$$T = \frac{B}{C} = \frac{\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(-1)^n \cdot \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \cdot \left\{ \frac{\Delta(t_1, \dots, t_n)}{f(t_1) \dots f(t_n)} \right\}}{\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot \frac{\Delta(t_1, \dots, t_n)}{f(t_1) \dots f(t_n)}}$$

oder

$$11) \qquad T = (-1)^n \frac{f(t_1) \dots f(t_n)}{\Delta(t_1, \dots, t_n)} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \left\{ \frac{\Delta(t_1, \dots, t_n)}{f(t_1) \dots f(t_n)} \right\}.$$

Entwickelt man jetzt die Funktion

$$T = \sum \frac{1}{t_1 - \alpha_i} \frac{1}{t_2 - \alpha_k} \cdots \frac{1}{t_n - \alpha_q},$$

wo man für $i, k, \dots, q$ alle Permutationen der Nummern $1, 2, 3, \dots, n$ zu setzen hat, nach fallenden Potenzen von $t_1, \dots, t_n$, so ist die symmetrische Funktion der Wurzeln

$$\Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_n^{p_n}$$

der Koefficient von

$$\left(\frac{1}{t_1}\right)^{p_1+1} \left(\frac{1}{t_2}\right)^{p_2+1} \cdots \left(\frac{1}{t_n}\right)^{p_n+1},$$

wie sich mit Berücksichtigung der Identität

$$\frac{1}{t_i - \alpha_k} = \frac{1}{t_i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\alpha_k}{t_i}} = \sum\nolimits_p \frac{\alpha_k^p}{t_i^{p+1}}$$

ergiebt.

Die rechte Seite der Gleichung 11) enthält aber nicht mehr die Wurzeln, sondern nur die Koefficienten der Gleichung, und es folgt daraus, dass man jede symmetrische Funktion auf diese Weise mit Hilfe des Koefficienten des entsprechenden Gliedes in den t auf der rechten Seite berechnen kann. Aus diesem Grunde heisst die betrachtete Funktion T die erzeugende Funktion aller ganzen symmetrischen Funktionen von den Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

Versuchen wir die erzeugende Funktion T direct zu entwickeln. Zunächst schreiben wir T in der Form

$$T = \frac{\sum \frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_i} \cdots \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_q}}{f(t_1) \dots f(t_n)}$$

und entwickeln den Ausdruck

$$\frac{f(t)}{t-\alpha_i}$$

nach fallenden Potenzen von t, nämlich

$$\frac{f(t)}{t-\alpha_i} = t^{n-1} - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_n)\, t^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} \cdot \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in T ein, so würde T sich in eine Funktion von der Form entwickeln lassen

$$T = \frac{\Pi(n) t_1^{n-1} \ldots t_n^{n-1} + (n-1)\Pi(n-2) a_1 \Sigma t_1^{n-1} \ldots t_n^{n-2} + \ldots + 2\Pi(n-1) a_n^{n-2} a_2 \Sigma t + \Pi(n) a_n^{n-1}}{f(t_1) \ldots f(t_n)}$$

wo $\Pi(n) = 1.2 \ldots n$.

Wir schreiben nur die beiden ersten und die beiden letzten Entwicklungsglieder hin, weil die Berechnung der allgemeinen Form eines beliebigen Gliedes der Entwicklung viel zu compliciert ist.

4. Die Differentiationen, welche die Formel 11) erheischt, führen auf ausgedehnte Rechnungen, so dass die in 11) angegebene Form der erzeugenden Funktion zur Berechnung der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung nicht geeignet ist. Im Folgenden soll der erzeugenden Funktion T eine für die Rechnung etwas geeignetere Form gegeben werden.*

Das Differenzenprodukt

$$\Delta(t_1, \ldots, t_n)$$

kann in Form einer Determinante geschrieben werden**, nämlich

$$12) \qquad \Delta(t_1, \ldots, t_n) = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Dividiert man beiderseits durch

$$f(t_1) \ldots f(t_n)$$

so kommt

$$\frac{\Delta(t_1, \ldots, t_n)}{f(t_1) \ldots f(t_n)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{f(t_1)} & \frac{t_1}{f(t_1)} & \frac{t_1^2}{f(t_1)} & \ldots & \frac{t_1^{n-1}}{f(t_1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{f(t_n)} & \frac{t_n}{f(t_n)} & \frac{t_n^2}{f(t_n)} & \ldots & \frac{t_n^{n-1}}{f(t_n)} \end{vmatrix}.$$

---

* Cayley a. a. O. pag. 494 bemerkt bezüglich der Borchardtschen Formel: „wenn ein passender Ausdruck für T gefunden werden könnte, so wären wir im Stande, alle symmetrischen Funktionen der Wurzeln als Funktionen der Koefficienten auszudrücken."

** Baltzer, Determ. § 10, 1.

Durch Differentiation nach sämtlichen Variabeln $t_1, \ldots, t_n$ findet man*

$$13) \quad \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n}\left(\frac{\Delta(t_1, \ldots, t_n)}{f(t_1)\ldots f(t_n)}\right) = \frac{-1}{f(t_1)^2 \ldots f(t_n^2)} \begin{vmatrix} f'(t_1) & f(t_1)-t_1 f'(t_1) & 2t_1 f(t_1)-t_1^2 f'(t_1) \ldots (n-1)t_1^{n-2} f(t_1)-t_1^{n-1} f'(t_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f'(t_n) & f(t_n)-t_n f'(t_n) & 2t_n f(t_n)-t_n^2 f'(t_n) \ldots (n-1)t_n^{n-2} f(t_n)-t_n^{n-1} f'(t_n) \end{vmatrix}.$$

Nach diesen Entwicklungen geht die Formel 11) für T über in

$$14) \quad T = \frac{(-1)^{n+1}}{f(t_1)\ldots f(t_n).\Delta(t_1,\ldots,t_n)} \begin{vmatrix} f'(t_1) & f(t_1)-t_1 f'(t_1) \ldots (n-1)\,t_1^{n-2} f(t_1)-t_1^{n-1} f'(t_1) \\ \ldots & \ldots \\ f'(t_n) & f(t_n)-t_n f'(t_n) \ldots (n-1)t_n^{n-2} f(t_n)-t_n^{n-1} f'(t_n) \end{vmatrix}.$$

Die Determinante ist durch das Produkt

$$\Delta(t_1, \ldots, t_n)$$

teilbar, so dass der Divisor $\Delta(t_1, \ldots, t_n)$ nur scheinbar in der Formel 14) vorkommt.

5. Man kann ferner auch (vergl. Formel 11 pag. 36)

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \sum\nolimits_p \frac{s_p}{t^{p+1}} \quad (p = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

setzen, wodurch die Borchardtsche Formel für die erzeugende Funktion eine andere bemerkenswerthe Form annimmt, nämlich

$$15) \quad T = \frac{(-1)^{n+1}}{\Delta(t_1,\ldots,t_n)} \begin{vmatrix} \sum\frac{s_{p_1}}{t_1^{p_1+1}} & 1-t_1\sum\frac{s_{p_1}}{t_1^{p_1+1}} \cdots (n-1)t_1^{n-2} - t_1^{n-1}\sum\frac{s_{p_1}}{t_1^{p_1+1}} \\ \sum\frac{s_{p_2}}{t_2^{p_2+1}} & 1-t_2\sum\frac{s_{p_2}}{t_2^{p_2+1}} \cdots (n-1)t_2^{n-2} - t_2^{n-1}\sum\frac{s_{p_2}}{t_2^{p_2+1}} \\ \ldots & \ldots \\ \sum\frac{s_{p_n}}{t_n^{p_n+1}} & 1-t_n\sum\frac{s_{p_n}}{t_n^{p_n+1}} \cdots (n-1)t_n^{n-2} - t_n^{n-1}\sum\frac{s_{p_n}}{t_n^{p_n+1}} \end{vmatrix}.$$

Diese Formel, die an und für sich zur Berechnung weniger geeignet ist als die Formel 14), liefert doch eine Methode, die erzeugende Funktion T nach fallenden Potenzen der Variabeln $t_1, \ldots, t_n$, deren Koefficienten als Funktionen von s auftreten, zu entwickeln. Man erhält so durch die erzeugende Funktion nur den Ausdruck der symmetrischen Funktionen in den s wieder, der früher (§ 1, Formel 34) direkter gefunden worden war.

6. Anwendungen der Borchardtschen erzeugenden Funktion auf specielle Gleichungen.

---

* Baltzer, Determ. § 3, 15.

a) Es soll die erzeugende Funktion T der symmetrischen Funktionen der Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

durch die Koefficienten der Gleichung bestimmt werden. Die Wurzeln seien α_1, α_2.*

Wir bilden den Ausdruck

$$T = \frac{1}{t_1 - \alpha_1} \cdot \frac{1}{t_2 - \alpha_2} + \frac{1}{t_1 - \alpha_2} \cdot \frac{1}{t_2 - \alpha_1} = \frac{2t_1 t_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)(t_1 + t_2) + 2\alpha_1 \alpha_2}{(t_1 - \alpha_1)(t_1 - \alpha_2)(t_2 - \alpha_1)(t_2 - \alpha_2)} =$$

$$= \frac{2a_0^2 t_1 t_2 + a_0 a_1 (t_1 + t_2) + 2a_0 a_2}{(a_0 t_1^2 + a_1 t_1 + a_2)(a_0 t_2^2 + a_1 t_2 + a_2)}.$$

Dieser Ausdruck ist auch der Quotient der beiden Determinanten B und C, nämlich

$$T = \begin{vmatrix} \frac{1}{(t_1 - \alpha_1)^2} & \frac{1}{(t_1 - \alpha_2)^2} \\ \frac{1}{(t_2 - \alpha_1)^2} & \frac{1}{(t_2 - \alpha_2)^2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1 - \alpha_1} & \frac{1}{t_1 - \alpha_2} \\ \frac{1}{t_2 - \alpha_1} & \frac{1}{t_2 - \alpha_2} \end{vmatrix}.$$

Die Borchardtsche Formel 11) liefert für T den Ausdruck

$$T = a_0^2 \frac{f(t_1) f(t_2)}{t_2 - t_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \left\{ \frac{t_2 - t_1}{f(t_1) f(t_2)} \right\} =$$

$$= a_0^2 \frac{f(t_1) f(t_2)}{t_2 - t_1} \cdot \frac{f(t_1) f'(t_2) - f(t_2) f'(t_1) + (t_2 - t_1) f'(t_1) f'(t_2)}{f(t_1)^2 \cdot f(t_2)^2}$$

$$= a_0^2 \frac{1}{f(t_1) f(t_2)} \left[\frac{f(t_1) f'(t_2) - f(t_2) f'(t_1)}{t_2 - t_1} + f'(t_1) \cdot f'(t_2) \right].$$

Substituiert man für $f(t_1)$ und $f(t_2)$ die Werte, so ist

$$\frac{f(t_1) f'(t_2) - f(t_2) f'(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{a_0^2} \{ -2a_0^2 t_1 t_2 - a_0 a_1 (t_1 + t_2) + 2a_0 a_2 - a_1^2 \}$$

und

$$f'(t_1) f'(t_2) = \frac{1}{a_0^2} \{ 4a_0^2 t_1 t_2 + 2a_0 a_1 (t_1 + t_2) + a_1^2 \}.$$

Also hat T den Wert wie oben

$$T = \frac{2a_0^2 t_1 t_2 + a_0 a_1 (t_1 + t_2) + 2a_0 a_2}{(a_0 t_1^2 + a_1 t_1 + a_2)(a_0 t_2^2 + a_1 t_2 + a_2)}.$$

Wenden wir schliesslich noch Formel 14) an, so hat man für T

---

* Vergleiche über dieses Beispiel: Cayley a. a. O. pag. 493.

$$T = \frac{-1}{(t_2-t_1)f(t_1)f(t_2)} \begin{vmatrix} f'(t_1) & f(t_1)-t_1f'(t_1) \\ f'(t_2) & f(t_2)-t_2f'(t_2) \end{vmatrix}$$
$$= \frac{f(t_1)f'(t_2)-f(t_2)f'(t_1)+(t_2-t_1)f'(t_1)f'(t_2)}{(t_2-t_1)f(t_1).f(t_2)} =$$
$$= \frac{2a_0^2t_1t_2+a_0a_1(t_1+t_2)+2a_0a_2}{(a_0t_1^2+a_1t_1+a_2)(a_0t_2^2+a_1t_2+a_2)}.$$

Schon dieses Beispiel zeigt, dass Formel 14) am raschesten zum Ziele führt.

b) Es soll die erzeugende Funktion T durch die Koefficienten der kubischen Gleichung

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

ausgedrückt werden. Die Formel 14) ergiebt

$$T=\frac{1}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)f(t_1)f(t_2)f(t_3)} \begin{vmatrix} f'(t_1) & f(t_1)-t_1f'(t_1) & 2t_1f(t_1)-t_1^2f'(t_1) \\ f'(t_2) & f(t_2)-t_2f'(t_2) & 2t_2f(t_2)-t_2^2f'(t_2) \\ f'(t_3) & f(t_3)-t_3f'(t_3) & 2t_3f(t_3)-t_3^2f'(t_3) \end{vmatrix}.$$

Substituieren wir die Werte für $f(t_1)$, $f(t_2)$, $f(t_3)$, $f'(t_1)$ $f'(t_2)$, $f'(t_3)$, so ergiebt sich

$$16)\ \Delta(t_1,t_2,t_3)\,T = \begin{vmatrix} 3a_0t_1^2+2a_1t_1+a_2 & 2a_0t_1^3+a_1t_1^2-a_3 & a_0t_1^4-a_2t_1^2-2a_3t_1 \\ 3a_0t_2^2+2a_1t_2+a_2 & 2a_0t_2^3+a_1t_2^2-a_3 & a_0t_2^4-a_2t_2^2-2a_3t_2 \\ 3a_0t_3^2+2a_1t_3+a_2 & 2a_0t_3^3+a_1t_3^2-a_3 & a_0t_3^4-a_2t_3^2-2a_3t_3 \end{vmatrix}.$$

Schreiben wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1^\lambda & t_1^\mu \\ 1 & t_2^\lambda & t_2^\mu \\ 1 & t_3^\lambda & t_3^\mu \end{vmatrix}$$

zur Abkürzung in der Form

$$\Sigma \pm 1 t_2^\lambda t_3^\mu,$$

ferner statt

$$\Sigma \pm 1 t_2 t_3^2, \quad \Delta(t_1, t_2, t_3),$$

so ergiebt sich die Formel

$$-\Delta(t_1,t_2,t_3)f(t_1)f(t_2)f(t_3).T = [6a_0^3t_1^2t_2^2t_3^2+(4a_0a_1a_2-12a_0^2a_3)t_1t_2t_3+$$
$$+6a_0a_3^2].\Delta(t_1,t_2,t_3)+(2a_0a_1^2t_1t_2t_3+4a_0a_2a_3).\Sigma\pm 1t_2t_3^3+$$
$$+2a_0a_1a_3\,\Sigma\pm 1t_2t_3^4+(4a_0^2a_1t_1t_2t_3+2a_0a_2^2)\,\Sigma\pm 1t_2^2t_3^3+$$
$$+(a_0a_1a_2+3a_0^2a_3)\,\Sigma\pm 1t_2^2t_3^4.$$

Nun hat man die folgenden Identitäten

$$\Sigma\pm 1t_2t_3^3 = \Delta(t_1,t_2,t_3)(t_1+t_2+t_3)$$
$$\Sigma\pm 1t_2^2t_3^3 = \Delta(t_1,t_2,t_3)(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)$$
$$\Sigma\pm 1t_2t_3^4 = \Delta(t_1,t_2,t_3)(t_1^2+t_1t_2+t_1t_3+t_2^2+t_2t_3+t_3^2)$$
$$\Sigma\pm 1t_2^2t_3^4 = \Delta(t_1,t_2,t_3)(t_1+t_2)(t_2+t_3)(t_3+t_1),$$

mit Hilfe deren man den Ausdruck erhält

$$f(t_1)f(t_2)f(t_3)\,T = 6a_0a_3^2 + 4a_0a_2a_3(t_1+t_2+t_3) + 2a_0a_1a_3(t_1^2+t_2^2+t_3^2) + \\ + (2a_0a_1a_3 + 2a_0a_2^2)(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1) + \\ + (6a_0a_1a_2 - 6a_0^2a_3)t_1t_2t_3 + (3a_0^2a_3 + a_0a_1a_2)[t_1^2(t_2+t_3) + \\ + t_2^2(t_3+t_1) + t_3^2(t_1+t_2)] + 2a_0a_1^2(t_1^2t_2t_3 + t_2^2t_3t_1 + \\ + t_3^2t_1t_2) + 4a_0^2a_1(t_1^2t_2^2t_3 + t_2^2t_3^2t_1 + t_3^2t_1^2t_2) + \\ + 6a_0^3t_1^2t_2^2t_3^2.$$

§ 4. Symmetrische Funktionen der Wurzeldifferenzen.

1. Die Summe der Potenzen der sämtlichen Differenzen je zweier Wurzeln einer Gleichung

$$\sum_{h,\,i}(\alpha_i - \alpha_h)^k \qquad \begin{pmatrix} h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ h < i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}$$

kann bei **geradem** k direkt als Funktion der Potenzsummen s, mithin als Funktion der Koefficienten der Gleichung ausgedrückt werden, nämlich

$$1)\quad 2\sum_{i,\,h}(\alpha_i - \alpha_h)^k = s_0s_k - \binom{k}{1}s_1s_{k-1} + \binom{k}{2}s_2s_{k-2} \mp \ldots + s_ks_0,$$

wo

$$\binom{k}{\mu} = \frac{k(k-1)\ldots(k-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}.$$

Die rechte Seite von $\sum_{i,\,h}(\alpha_i - \alpha_h)^k$ kann auch durch die Hälfte der Entwicklung des symbolischen Ausdrucks

$$(s-s)^k$$

dargestellt werden, wenn man, wie üblich, festsetzt, dass die Exponenten nach der Entwicklung in Indices verwandelt werden.

Die Summe

$$\sum_{i,\,h}(\alpha_i - \alpha_h)^k$$

soll durch σ_k bezeichnet werden; so ist z. B.

$$\sigma_4 = \sum_{i,\,h}(\alpha_i - \alpha_h)^4 = s_0s_4 - 4s_1s_3 + 3s_2^2$$

$$\sigma_6 = \sum_{i,\,h}(\alpha_i - \alpha_h)^6 = s_0s_6 - 6s_1s_5 + 15s_2s_4 - 10s_3^2.$$

Beweis. Bildet man nach dem Newtonschen Binomialtheorem die Summe

$$\sum\nolimits_h (x-\alpha_h)^k = s_0 x^k - \binom{k}{1} s_1 x^{k-1} + \binom{k}{2} s_2 x^{k-2} \mp \dots$$
$$(h = 1, 2, 3, \dots, n)$$

und ersetzt darin x der Reihe nach durch die sämtlichen Wurzeln der Gleichung $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, nämlich

$$\sum_h (\alpha_1 - \alpha_h)^k = s_0 \alpha_1{}^k - \binom{k}{1} s_1 \alpha_1{}^{k-1} + \binom{k}{2} s_2 \alpha_1{}^{k-2} - \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sum_h (\alpha_n - \alpha_h)^k = s_0 \alpha_n{}^k - \binom{k}{1} s_1 \alpha_n{}^{k-1} + \binom{k}{2} s_2 \alpha_n{}^{k-2} - \dots,$$

so verschwindet die Summe dieser Gleichungen

$$\sum_{i,h} (\alpha_i - \alpha_h)^k \quad (i, h = 1, 2, \dots, n)$$

für ein ungerades k wegen der entgegengesetzten Zeichen von

$$(\alpha_i - \alpha_h)^k \text{ und } (\alpha_h - \alpha_i)^k.$$

Bei geradem k ist

$$(\alpha_i - \alpha_h)^k = (\alpha_h - \alpha_i)^k$$

und auf beiden Seiten können je zwei gleiche Glieder der Summe zusammengefasst werden, wobei das mittelste Glied rechts übrig bleibt. Dieses Glied erhält also nach der Division durch 2 den Faktor $\frac{1}{2}$.

Aus den $\frac{1}{2}n(n-1)$ Quadraten der Wurzeldifferenzen kann man nun wieder symmetrische Funktionen bilden und diese mittelst der in § 1, 3 angegebenen Formel 31) genau ebenso durch die Potenzsummen σ_{2k} ausdrücken, wie die symmetrischen Funktionen der n Wurzeln α_h durch die Potenzsummen s_k. Die Gleichung 1) liefert alsdann die Darstellung jener symmetrischen Funktionen durch die Grössen s.

Beispiele. a) Es soll die symmetrische Funktion der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Differenzenquadrate

$$\Sigma(\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\alpha_4 - \alpha_3)^2$$

durch die Koefficienten $a_1, a_2, \dots$ ausgedrückt werden.

Nach § 1, 3 hat man

$$2\Sigma(\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\alpha_4 - \alpha_3)^2 = \sigma_2{}^2 - \sigma_4.$$

Nach 1) ist aber (vergl. § 2, 3)

$$\sigma_2 = 4s_2 - s_1{}^2 = 3a_1{}^2 - 8a_2$$
$$\sigma_4 = 4s_4 - 4s_1 s_3 + 3s_2{}^2 = 3a_1{}^4 - 16a_1{}^2 a_2 + 4a_1 a_3 - 16a_4 + 20a_2{}^2.$$

Also ergiebt sich für die gesuchte Funktion

$$\Sigma(\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\alpha_4 - \alpha_3)^2 = 3a_1{}^4 - 16a_1{}^2 a_2 - 2a_1 a_3 + 8a_4 + 22a_2{}^2.$$

b) Es soll die symmetrische Funktion aller Differenzenquadrate

$$\psi = \Sigma(\alpha_2 - \alpha_1)^2(\alpha_4 - \alpha_3)^2(\alpha_5 - \alpha_4)^2$$

für $n = 5$ durch die Koefficienten a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ausgedrückt werden. Zunächst hat man

$$6\psi = \sigma_2^3 - 3\sigma_2\sigma_4 + 2\sigma_6.$$

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Für $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6$ ergeben sich die Werte

$$\sigma_2 = 5s_2 - s_1^2,$$
$$\sigma_4 = 5s_4 - 4s_1s_3 + 3s_2^2,$$
$$\sigma_6 = 5s_6 - 6s_1s_5 + 15s_2s_4 - 10s_3^2.$$

Setzt man diese Werte ein, so ist schliesslich

$$\psi = 4a_1^6 - 30a_1^4a_2 + 81a_1^2a_2^2 - 16a_1^3a_3 - 80a_2^3 + 50a_1a_2a_3 + \\ + 20a_1^2a_4 - 25a_3^2 - 50a_2a_4.$$

Nach vorstehender Methode kann auf bequeme Weise die Gleichung gebildet werden, deren Wurzeln die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Quadrate der Differenzen zwischen den Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ sind.* Einfacher noch ist die folgende Methode.**

2. Bezeichnet man wieder das Produkt aller Differenzen der Grössen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ durch

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

so hat man wie oben bemerkt

$$2) \qquad \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Das Quadrat von Δ stellt sich nach der Multiplikationsregel der Determinanten als Funktion der Grösse s ebenfalls in Form einer Determinante dar, nämlich

$$3) \qquad \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante soll durch S_n bezeichnet werden, so dass

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2 = S_n.$$

Insbesondere wäre für $n = 2, 3, \ldots$

$$4) \qquad S_2 = \Delta(\alpha_1, \alpha_2)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix},$$

* Lagrange Mém. de Berlin 1767; Résolution des équations 8.

** Vgl. Baltzer, Determ. § 10, 4.

5) $$S_3 = \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

u. s. w.

Greift man aus der Reihe der n Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ einer Gleichung n^{ten} Grades auf alle möglichen Arten immer je m Wurzeln heraus und bildet das Quadrat sämtlicher Produkte der Differenzen dieser m Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ und summiert über alle Permutationen dieser m Grössen, nämlich

$$\Sigma \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2,$$

so kann offenbar auch diese Summe durch eine Determinante dargestellt werden, die aus den zu n gehörigen Grössen $s_0, s_1, \ldots$ gebildet ist

6) $$\Sigma \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-2} \end{vmatrix},$$

wie aus der Zerlegung dieser Determinante in solche, deren Elemente nur Summen von je m Grössen sind, folgt. Diese Determinante bezeichnen wir wieder mit S_m.

Insbesondere ist

$$S_2 = \Sigma \Delta(\alpha_1, \alpha_2)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix},$$

$$S_3 = \Sigma \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

u. s. w.

Die Determinante S_m kann unter der Voraussetzung $a_0 = 1$ mit Hilfe der Newtonschen Identitäten (§ 1, 2) durch die Koefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der Gleichung $f(x) = 0$ ausgedrückt werden.

Zunächst bildet man S_2, S_3 wie folgt

$$S_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 + a_1 s_0 \\ s_1 & s_2 + a_1 s_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} n & (n-1)a_1 \\ a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_0 & s_1 & s_2 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}.$$

Diese letztere Determinante wird dadurch transformiert, dass man zur zweiten Kolonne die mit a_1 multiplizierte erste Kolonne, zur dritten Kolonne die mit a_1 multiplizierte zweite und die mit a_2 multiplizierte erste Kolonne, zur vierten Kolonne die mit a_1 multiplizierte dritte, die mit a_2 multiplizierte zweite und die mit a_3 multiplizierte erste Kolonne addiert. Dadurch entsteht die Determinante

$$S_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & s_0 & s_1 + a_1 s_0 & s_2 + a_1 s_1 + a_2 s_0 \\ s_0 & s_1 + a_1 s_0 & s_2 + a_1 s_1 + a_2 s_0 & s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + a_3 s_0 \\ s_1 & s_2 + a_1 s_1 & s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 & s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 \end{vmatrix},$$

die mit Berücksichtigung der Newtonschen Identitäten übergeht in

$$-S_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & n & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 \\ n & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & (n-3)a_3 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 4a_4 \end{vmatrix}$$

u. s. w.

Um die Determinante m^{ten} Grades

$$S_m = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1} & s_m & \dots & s_{2m-2} \end{vmatrix}$$

durch die Koefficienten auszudrücken, schreiben wir dieselbe zunächst in der Form einer Determinante $(2m-2)^{\text{ten}}$ Grades

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & & & & \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & & & & \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & & & & \\ . & . & . & . & 1 & . & & & & \\ 0 & 0 & . & . & 0 & s_0 & s_1 & . & . & s_{m-1} \\ 0 & 0 & . & . & s_0 & s_1 & s_2 & . & . & s_m \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ s_0 & s_1 & . & . & . & . & . & . & . & s_{2m-3} \\ s_1 & s_2 & . & . & . & . & . & . & . & s_{2m-2} \end{vmatrix},$$

die von S_m nicht verschieden ist.

Diese Determinante wird dadurch transformiert, dass man zur zweiten Kolonne die mit a_1 multiplizierte erste Kolonne, zur dritten Kolonne die mit a_1 multiplizierte zweite und die mit a_2 multiplizierte

erste Kolonne, ..., zur $(k+1)^{\text{ten}}$ Kolonne die mit a_1 multiplizierte k^{te}, die mit a_2 multiplizierte $(k-1)^{\text{te}}$, ..., die mit a_k multiplizierte erste Kolonne addiert.

Dadurch entsteht die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{2m-3} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & . \\ . & . & 1 & \dots & . \\ . & . & . & . & . \\ s_0 & s_1+a_1 s_0 & s_2+a_1 s_1+a_2 s_0 & \dots & s_{2m-3}+a_1 s_{2m-4}+\dots+a_{2m-3} s_0 \\ s_1 & s_2+a_1 s_1 & s_3+a_1 s_2+a_2 s_1 & \dots & s_{2m-2}+a_1 s_{2m-3}+\dots+a_{2m-3} s_1 \end{vmatrix},$$

die mit Berücksichtigung der Newtonschen Identitäten übergeht in

$$-S_m = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 1 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & & \\ 0 & n & (n-1)a_1 & \dots \\ n & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \dots \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \dots \end{vmatrix}.$$

3. Partielle Differentialgleichungen, denen die symmetrischen Funktionen der Wurzeldifferenzen genügen. Die linke Seite der für symmetrische Funktionen φ der Wurzeln einer Gleichung giltigen partiellen Differentialgleichung (§ 2, 5 14)

$$-\sum_k^1 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = n a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (n-1) a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + a_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}$$

verschwindet, sobald φ eine Funktion der Wurzeldifferenzen ist. Denn nimmt man irgend ein Glied von φ heraus und setzt dasselbe gleich

$$\psi = (\alpha_i - \alpha_k)\, \Phi,$$

so ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} = \Phi + (\alpha_i - \alpha_k) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_k} = -\Phi + (\alpha_i - \alpha_k) \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k},$$

und in der Summe $\sum \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_k}$ zerstören sich also die beiden aus der Differentiation des Faktors $\alpha_i - \alpha_k$ herrührenden Glieder und ebenso die übrigen Glieder gegenseitig.

Also genügt jede symmetrische Funktion ψ den Wurzeldifferenzen der partiellen Differentialgleichung

$$7) \qquad n a_0 \frac{\partial \psi}{\partial a_1} + (n-1) a_1 \frac{\partial \psi}{\partial a_2} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial a_n} = 0.$$

Schreibt man die Koefficienten der vorgelegten Gleichung $f = 0$ mit Binomialfaktoren, nämlich

$$f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \ldots = 0,$$

so wird aus 7)

$$8) \qquad a_0 \frac{\partial \psi}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \psi}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial \psi}{\partial a_3} + \ldots + n a_{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial a_n} = 0.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung die Operation

$$a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + n a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n}$$

durch das Symbol δ, so kann 8) in der einfachen Form

$$\delta \psi = 0$$

geschrieben werden.

Insbesondere ist

$$\delta a_k = k a_{k-1}, \quad \delta a_0 = 0.$$

Berücksichtigt man die bekannte Identität

$$\delta (uv) = u \delta v + v \delta u,$$

so hat man noch

$$\delta (a_k^m) = mk \, . \, a_k^{m-1} a_{k-1},$$
$$\delta^i a_k = k(k-1) \ldots (k-i+1) a_{k-i}.$$

Man kann also δ als einfaches Differentialzeichen behandeln, wenn man a_k symbolisch als Potenz a^k schreibt, differentiiert und nach vollzogener Differentiation den Exponenten wieder in einen Index verwandelt; z. B.

$$\delta (a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) = a_0 \delta a_4 + a_4 \delta a_0 - 4 (a_1 \delta a_3 + a_3 \delta a_1) + 6 a_2 \delta a_2 =$$
$$= 4 a_0 a_3 - 4 (3 a_1 a_2 + a_0 a_3) + 12 a_1 a_2 = 0.$$

Führt man den Prozess δ an der Summe s_i aus, so hat man (§ 2, 7)

$$\delta s_i = i s_{i-1}.$$

Beispiele. Nach Formel 6) dieses Paragraphen hat man

$$\delta \Sigma \Delta (\alpha_1, \alpha_2)^2 = \delta S_2 = \delta \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & s_1 \\ s_0 & s_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_0 & s_0 \\ s_1 & 2 s_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\delta S_3 = \delta \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & s_1 & s_2 \\ s_0 & s_2 & s_3 \\ 2 s_1 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_0 & s_0 & s_2 \\ s_1 & 2 s_1 & s_3 \\ s_2 & 3 s_2 & s_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & 2 s_1 \\ s_1 & s_2 & 3 s_2 \\ s_2 & s_3 & 4 s_3 \end{vmatrix} = 0$$

u. s. w.

4. a) Ist ψ eine symmetrische Funktion der Wurzeldifferenzen einer Gleichung n^{ten} Grades, so ist auch

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_n}$$

eine symmetrische Funktion der Wurzeldifferenzen. Denn die Ableitung von ψ nach a_n genügt ebenso wie ψ der partiellen Differentialgleichung 7), wie man sieht, wenn man 7) nach a_n differentiiert.

Beispiel. Für eine kubische Gleichung

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

deren Wurzeln α_1, α_2, α_3 sind, hat man die symmetrische Funktion der Wurzeldifferenzen

$$\psi = a_0^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2 (\alpha_3 - \alpha_2)^2 =$$
$$= 18 a_0 a_1 a_2 a_3 - 4 a_0 a_2^3 - 4 a_1^3 a_3 + a_1^2 a_2^2 - 27 a_0^2 a_3^2.$$

Nun ist

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial a_3} = 9 a_0 a_1 a_2 - 2 a_1^3 - 27 a_0^2 a_3.$$

Der Ausdruck für $\dfrac{\partial \psi}{\partial a_3}$ ist aber gleich der symmetrischen Funktion der Wurzeldifferenzen

$$-\tfrac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial a_3} = a_0^3 \{(\alpha_2 - \alpha_1)[(\alpha_3 - \alpha_1)^2 - (\alpha_3 - \alpha_2)^2] + (\alpha_3 - \alpha_1)[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 - (\alpha_3 - \alpha_2)^2] +$$
$$+ (\alpha_3 - \alpha_2)[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 - (\alpha_3 - \alpha_1)^2]\},$$

die durch die Determinante

$$a_0^3 \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 - \alpha_1 & (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \\ 1 & \alpha_1 - \alpha_3 & (\alpha_1 - \alpha_3)^2 \\ 1 & \alpha_3 - \alpha_2 & (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \end{vmatrix}$$

dargestellt werden kann.

b) Ersetzt man in einer symmetrischen Funktion der Wurzeldifferenzen die Koefficienten a_0, a_1, a_2, ... resp. durch s_0, s_1, s_2, ..., so ist die dadurch erzeugte Funktion ebenfalls symmetrisch in Bezug auf die Wurzeldifferenzen. In der That ist die Differentialgleichung 8) noch giltig in der Form

$$9) \qquad s_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} + 2 s_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_2} + \ldots + n s_{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial s_n} = 0;$$

denn die Anwendung des δ-Prozesses auf die Funktion ψ, welche als abhängig von s_0, s_1, ... zu betrachten ist, ergiebt mit Rücksicht auf die Identität

$$\delta s_i = i s_{i-1},$$

$$\delta \psi = s_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} + 2 s_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_2} + \ldots + n s_{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial s_n},$$

was nach Formel 9) gleich Null ist.

Die Gleichung

$$\delta \psi = 0$$

zeigt aber an, dass $\psi(s)$, ausgedrückt in den Wurzeln, ebenfalls eine symmetrische Funktion der Wurzeldifferenzen ist.

Zweiter Abschnitt.

Resultanten und Diskriminanten.

§ 5. Über die Bildung der Resultanten.

1. Den neueren algebraischen Methoden liegt die Betrachtung von Funktionen zu Grunde, die in Bezug auf die Variabeln homogen sind.

Bevor wir daher in die Theorie der Funktionen eintreten, die unter den Namen Resultanten, Invarianten, Kovarianten u. s. w. bekannt sind, soll einiges über die Darstellung homogener Funktionen vorausgeschickt werden.

Es sei

1) $$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n$$

eine homogene Funktion n^{ter} Ordnung der beiden Variabeln x und y oder eine binäre Form. Setzt man in dieser Form $y = 1$, so entsteht die der Theorie der symmetrischen Funktionen zu Grunde liegende nicht homogene Funktion

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Verschwindet die binäre Form $f(x, y)$, so entsteht die homogene Gleichung

2) $$f(x, y) = 0,$$

die unseren Betrachtungen von jetzt an zu Grunde gelegt werden soll.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x, y) = 0$, so kann die binäre Form geschrieben werden

3) $$f(x, y) = a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \ldots (x - \alpha_n y).$$

Dasselbe Resultat erreicht man, wenn man in der nicht homogenen Gleichung

$$f(z) = a_0 (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n)$$

für z den Quotienten $\frac{x}{y}$ substituiert und den gemeinsamen Nenner y^n weglässt. Also gelten die Sätze über die symmetrischen Funktionen

der Wurzeln nicht homogener Gleichungen, vorausgesetzt dass keine der Wurzeln unendlich ist, auch für die binären Formen.

Cayley bezeichnet die binäre Form*

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n$$

symbolisch durch

4) $$(a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, y)^n.$$

Fügt man den einzelnen Koefficienten der Reihe nach die Binomialfaktoren bei, so nimmt $f(x, y)$ die Form an

5) $$f(x,y) = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n,$$

die nach Cayley durch die Symbole

6) $$\begin{matrix}(a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, y)^n \\ (a_0, a_1, \ldots, a_n)^n(x, y)^n\end{matrix}$$

bezeichnet wird.

Man kann die mit Binomialfaktoren versehene binäre Form auch noch symbolisch durch die n^{te} Potenz eines linearen Binoms darstellen, nämlich durch

7) $$f(x, y) = (x + ay)^n,$$

wenn man festsetzt, dass nach Entwicklung des Binoms an Stelle von a^i wieder a_i geschrieben wird, d. h. dass die Exponenten wieder in Indices verwandelt werden.

Ebenso kann man sich die binäre Form n^{ter} Ordnung, deren Koefficienten mit Binomialfaktoren versehen sind, aus der n^{ten} Potenz eines linearen Ausdrucks

$$(ax + by)^n$$

dadurch entstanden denken, dass nach Entwicklung der n^{ten} Potenz an Stelle der Produkte

$$a^n, \quad a^{n-1} b, \quad a^{n-2} b^2, \quad \ldots, \quad a^{n-i} b^i, \quad \ldots$$

der Reihe nach die Koefficienten

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_i, \quad \ldots$$

gesetzt werden. Führt man statt der Variabeln x, y die mit Indices versehenen Variabeln x_1, x_2, statt a, b die Koefficienten b_1, b_2 ein, so kann der symbolische Ausdruck für f

---

* Diese symbolische Bezeichnung findet sich insbesondere durchgeführt in den zahlreichen „Memoirs upon Quantics", die in den Philosophical Transactions von Bd. 144 (1854) an erschienen sind. Vergl. auch Cayley in Crelle Journal 34.

$$f = (b_1 x_1 + b_2 x_2)^n$$

noch kürzer durch das Symbol

$$f = b_x^n$$

dargestellt werden.*

Jede homogene binäre Form n^{ter} Ordnung erfüllt die Gleichung

$$nf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

identisch, was das sogenannte Eulersche Theorem ist.

2. Es seien die Gleichungen vorgelegt

$$8) \qquad \varphi = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

$$9) \qquad \psi = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0,$$

wobei $m \geqq n$ vorausgesetzt wird.

Sollen die beiden Gleichungen zusammen bestehen können, so müssen dieselben wenigstens eine Wurzel gemeinsam haben, wofür offenbar wenigstens eine Bedingung zwischen den Koefficienten von φ und ψ nötig ist.

Umgekehrt ist auch, wie in Nr. 3 gezeigt wird, nur eine Bedingung notwendig, damit eine einzige Wurzel den beiden Gleichungen gemein ist.

Leitet man also auf irgend eine Weise aus 8) und 9) eine solche Gleichung ab, welche kein x mehr enthält, so hat man damit die Bedingung für das Zusammenbestehen der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Diese Ableitung heisst „Elimination der Variabeln“ und die gesuchte Funktion, die, gleich Null gesetzt, die Bedingung für das Zusammenbestehen der Gleichungen ausdrückt, die „Resultante von φ und ψ“.

Eine genauere Definition der Resultante und eine Behandlung, welche zugleich den Fall mehrerer gemeinsamen Wurzeln umfasst, wird unten Nr. 7 gegeben werden.

3. Um die Resultante R der beiden Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ aufzustellen, bezeichnen wir zunächst die Wurzeln von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ resp. durch

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n,$$

von denen wir voraussetzen, dass keine unendlich ist, und schreiben die Geichungen in der Form

---

* Diese symbolische Bezeichnungsweise ist von Aronhold, Crelle Journal 55 pag. 97, zuerst eingeführt worden. Durch Clebsch und Gordan ist sie in der Folge zu umfassender Anwendung gelangt. Vergl. darüber Clebsch, Crelle Journal 59, ferner Clebsch, Binäre Formen pag. 28.

10) $$\varphi = a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_m) = 0.$$

11) $$\psi = b_0 (x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n) = 0.$$

Haben φ und ψ eine einzige Wurzel gemein, so muss eine Wurzel α einer der Wurzeln β gleich werden, etwa

$$\alpha_i = \beta_j.$$

Dies kommt damit überein, dass unter den sämtlichen Differenzen

$$\alpha_i - \beta_j$$

eine einzige verschwindet. Man braucht also nur das Produkt sämtlicher Differenzen $\alpha_i - \beta_j$ zu bilden, um die Funktion zu erhalten, die in der That verschwindet, wenn irgend eine Wurzel α einer beliebigen Wurzel β gleich wird.

Umgekehrt muss auch wenigstens ein Faktor dieses Produktes verschwinden, wenn der Wert des Produktes Null ist. Also haben in diesem Fall φ und ψ mindestens eine gemeinsame Wurzel. Wenn anderseits kein Faktor des Produktes verschwindet, so schliessen wir, dass auch das Produkt von Null verschieden sein muss, dass also die Gleichungen φ und ψ keine gemeinschaftliche Lösung haben können. Die angegebene Bedingung ist also notwendig und hinreichend, wenn wir schliesslich noch bedenken, dass weder a_0 noch b_0 verschwinden können, weil keine Wurzel der Gleichungen unendlich sein darf.

Das Produkt der Differenzen der sämtlichen Wurzeln von φ und ψ, nämlich

12)
$$\begin{aligned} R = a_0^n b_0^m &(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_1)\dots(\alpha_m-\beta_1) \\ &(\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_2)\dots(\alpha_m-\beta_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(\alpha_1-\beta_n)(\alpha_2-\beta_n)\dots(\alpha_m-\beta_n)* \end{aligned}$$

ist also die Resultante der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$. R ist eine symmetrische ganze Funktion einerseits der Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, anderseits der Wurzeln $\beta_1, \dots, \beta_n$. Als symmetrische Funktion der Wurzeln ist R aber auch eine Funktion sowohl der Koefficienten $a_0, a_1, \dots, a_m$, als auch der Koefficienten $b_0, b_1, \dots, b_n$.

4. R als Funktion der Koefficienten.

Die Resultante R lässt sich je nach zeilen- oder kolonnenweiser Anordnung in doppelter Weise zusammenfassen:

---

* Der Faktor $a_0^n b_0^m$ musste eingeführt werden, um die Nenner wegzuschaffen, die durch den Ausdruck der Wurzeln als Funktionen der Koefficienten $\frac{a_i}{a_0}$, $\frac{b_i}{b_0}$ auftreten.

13) $$R = a_0^n \psi(\alpha_1) . \psi(\alpha_2) \dots \psi(\alpha_m).$$

14) $$R = (-1)^{mn} b_0^m \varphi(\beta_1) \varphi(\beta_2) \dots \varphi(\beta_n).$$

Diese Formen der Resultante sind nun geeignet, mit Hilfe des Cauchychen Satzes (I, § 1, 7) Aufschluss zu geben über die Art, wie die Resultante als Funktion der Koefficienten auftritt. Aus dem Entwicklungsgang jenes Satzes lassen sich die folgenden Schlüsse ziehen:

a) Die Resultante R der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ist eine homogene ganze Funktion sowohl der Koefficienten $a_0, \dots, a_m$ vom Grade n, als auch der Koefficienten $b_0, \dots, b_n$ vom Grade m. Sie ist ferner isobarisch und vom Gewicht mn bezüglich sämtlicher Koefficienten $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n$.

b) Sind φ und ψ beide m^{ter} Ordnung, so entsprechen sich in der Resultante gewisse Glieder mit gleichen oder entgegengesetzt gleichen numerischen Koefficienten. Man findet aus einem Glied der Resultante das entsprechende, wenn man die im Glied stehenden Koefficienten jeder der beiden Gleichungen entweder durch die gleich hohen Koefficienten der anderen oder durch die symmetrisch gelegenen Koefficienten derselben Gleichung ersetzt. Die Koefficienten dieser Glieder sind gleich oder entgegengesetzt, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Also gehört bei geradem m ein und derselbe Koefficient zu vier Gliedern der Resultante. Bei ungeradem m sind von den vier Gliedern zwei positiv, zwei negativ.

Beweis von b). Statt die gleich hohen Koefficienten in φ und ψ zu vertauschen, kann man auch statt α_i, β_j bez. β_i, α_j in den Differenzen setzen. Dadurch geht die Differenz

$$\alpha_i - \beta_j \text{ über in } \beta_i - \alpha_j = -(\alpha_j - \beta_i)$$

und jede Differenz in R erhält den Faktor -1, die Resultante also den Faktor $(-1)^{mm}$.

Um in jeder Gleichung die symmetrisch gelegenen Koefficienten zu vertauschen, braucht man nur an Stelle von α, β bez. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ einzusetzen. Dadurch geht aber

$$\alpha_i - \beta_j \text{ über in } -\frac{\alpha_i - \beta_j}{\alpha_i \beta_j},$$

$$a_0^m b_0^m \text{ über in } a_m^m b_m^m,$$

und R erhält den Faktor $(-1)^{mm}$.

In beiden Fällen aber behält oder wechselt die Resultante das Zeichen, je nachdem m gerade oder ungerade ist.

5. Die beiden in 4) behandelten Theoreme gestatten bereits die allgemeine Form der Resultante für $n = m$ anzugeben. Man verfährt folgendermassen: Zunächst schreibt man in eine Zeile A) alle Produkte der Koefficienten a vom Gewicht p und vom Grad m. Dann schreibt man die analogen Produkte der Koefficienten b vom complementären Gewicht $q = m^2 - p$ und m^{ten} Grad in eine zweite Zeile B) unter die Produkte von A). Man findet dieselben, wenn man in einem Produkt der Zeile A) an Stelle von a_i den symmetrisch gelegenen Koefficienten a_{m-i} setzt und alsdann die a in b verwandelt. Die Produkte dieser beiden Zeilen sind Glieder der Resultante.

Nun stellt man in zwei weiteren Zeilen A′) und B′) die Produkte (b) vom Gewicht p und vom Grad m, und die Produkte (a) vom Gewicht q und vom Grad m untereinander. Dann sind die Produkte dieser beiden Zeilen ebenfalls Glieder der Resultante. Die Glieder der Resultante, die durch Multiplikation der übereinander stehenden Produkte entstehen, sind in Bezug auf die Koefficienten a und b einzeln vom Grade m, in Bezug auf sämtliche Koefficienten a und b vom Gewicht mm.

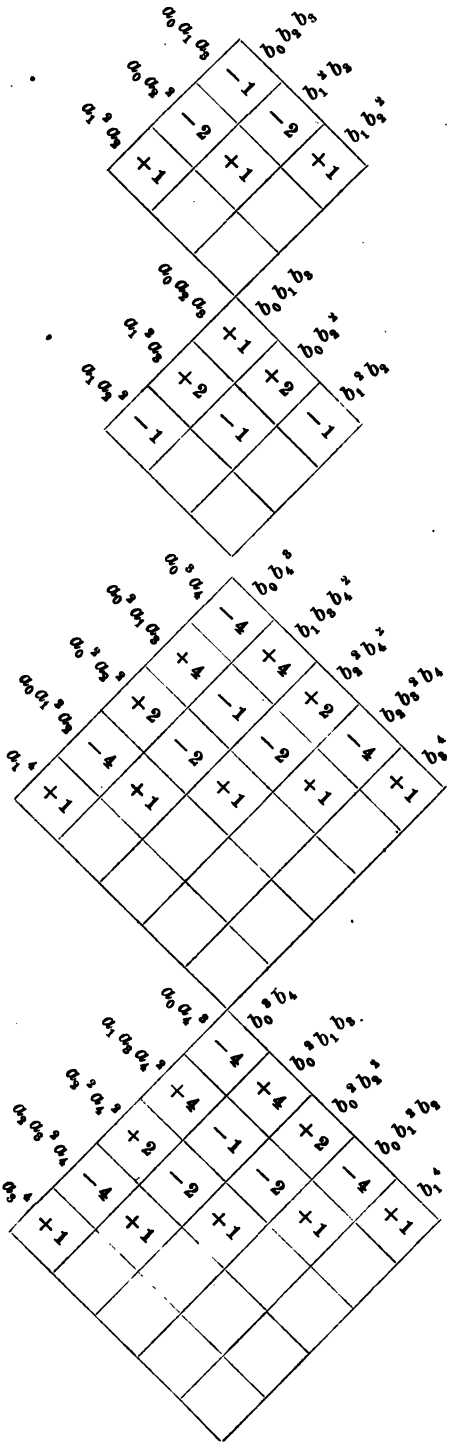
Beispiel.

A)	$a_0 a_1 a_3$,	$a_0 a_2^2$,	$a_1^2 a_2$,
B)	$b_3 b_2 b_0$,	$b_3 b_1^2$,	$b_2^2 b_1$,
A′)	$b_0 b_1 b_3$,	$b_0 b_2^2$,	$b_1^2 b_2$,
B′)	$a_3 a_2 a_0$,	$a_3 a_1^2$,	$a_2^2 a_1$.

Nun verteilt man die für die Gewichte p und q und den Grad m berechneten Produkte der Zeilen A) und B) auf zwei zusammenstossende Seiten eines Quadrats und teilt gleichzeitig dasselbe in soviel kleinere Quadrate, als die Anzahl der Produkte vom Gewicht p beträgt, und füllt dieselben der Reihe nach mit den noch zu bestimmenden numerischen Koefficienten aus. Dasselbe geschieht mit den Produkten der Zeilen A′) und B′). Nach Cayleys Anordnung stehen diese Quadrate so, dass ihre Diagonalen in eine vertikale Gerade fallen.*

Die Anordnung ist für $m = 3$ $(p = 4,\ q = 5)$ und $m = 4$ $(p = 4,\ q = 12)$ aus dem folgenden Schema ersichtlich:

* Cayley, Phil. Trans. 1857 pag. 703: Memoir on the Resultant of a system of two equations.



6. Berechnung der Resultante R mit Hilfe symmetrischer Funktionen.

Die Resultante R kann in doppelter Form geschrieben werden:

15)
$$\begin{aligned} R = a_0^n (b_0\alpha_1^n + b_1\alpha_1^{n-1} + \ldots + b_n) \\ (b_0\alpha_2^n + b_1\alpha_2^{n-1} + \ldots + b_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (b_0\alpha_m^n + b_1\alpha_m^{n-1} + \ldots + b_n). \end{aligned}$$

16)
$$\begin{aligned} R = (-1)^{mn} b_0^m (a_0\beta_1^m + a_1\beta_1^{m-1} + \ldots + a_m) \\ (a_0\beta_2^m + a_1\beta_2^{m-1} + \ldots + a_m) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (a_0\beta_n^m + a_1\beta_n^{m-1} + \ldots + a_m). \end{aligned}$$

Berechnet man diese Produkte, so treten darin symmetrische Funktionen der Wurzeln α und β auf, die sämtlich von der Form sind

$$\Sigma\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots, \quad \Sigma\beta_1^{p_1}\beta_2^{p_2}\ldots,$$

und nach den im ersten Abschnitt angegebenen Methoden als Funktionen der Koefficienten $a_0, \ldots, a_m$, $b_0, \ldots, b_n$ berechnet werden können.*

7. Eine naturgemässe Untersuchung aller Fälle des Zusammenbestehens der beiden Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ muss sich auf die Betrachtung der beiden Formen

17)
$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m \\ \psi &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n \end{aligned}\right. \qquad (m > n)$$

selbst stützen, ohne die Begriffe der Wurzeln der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ einzuführen.

Zu dem Zwecke verbinden wir die beiden Formen φ und ψ nach der Methode des grössten gemeinsamen Divisors.

Durch successive Division erhalte man

18)
$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= S\ \psi + \psi_1 \\ \psi &= S_1\psi_1 + \psi_2 \\ \psi_1 &= S_2\psi_2 + \psi_3 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \psi_{\mu-1} &= S_\mu\psi_\mu + \psi_{\mu+1}, \end{aligned}\right.$$

wo S der Quotient der Division von φ durch ψ, also von der Ordnung $m-n$ in x ist, ψ_1 der Rest dieser Division, von einer niedrigeren

---

* Diese Methode ist äusserst mühsam. Man vergleiche hierüber Cramer, Analyse des lignes courbes 1750, wo selbst die einfachsten Fälle nur mit grosser Mühe bewältigt werden.

Ordnung als der n^{ten}, etwa von der Ordnung n_1; ebenso S_1 der Quotient der Division von ψ durch ψ_1, also von der Ordnung $n-n_1$, ψ_2 der Rest dieser Division von der Ordnung $n_2 < n_1$ u. s. w., u. s. w.; schliesslich S_μ der Quotient der Division von $\psi_{\mu-1}$ durch ψ_μ, von der Ordnung $n_{\mu-1}-n_\mu$, $\psi_{\mu+1}$ der Rest dieser Division von der Ordnung $n_{\mu+1}$, wo

$$n_{\mu+1} < n_\mu < \ldots < n_1 < n.$$

Die Koefficienten in den hier auftretenden Formen S, S_1, ..., S_μ, ψ_1, ψ_2, ..., $\psi_{\mu+1}$ sind alle rationale Funktionen der Koefficienten a_i und b_i.

Rückwärts kann man aus dieser Kette von Gleichungen 18) irgend eine der Funktionen ψ_ϱ durch φ und ψ ausdrücken. Man findet:

$$\begin{aligned}\psi_{\mu+1} &= \psi_{\mu-1} - S_\mu \psi_\mu \\ &= \psi_{\mu-1} - S_\mu(\psi_{\mu-2} - S_{\mu-1}\psi_{\mu-1}) \\ &= -S_\mu \psi_{\mu-2} + (1 + S_\mu S_{\mu-1})\psi_{\mu-1} \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und endlich, indem man die Gleichungen 18) für $\psi_{\mu-1}$, $\psi_{\mu-2}$, ..., ψ_2, ψ_1 successiv rückwärts benutzt, für $\psi_{\mu+1}$ die Gleichungsform

19) $$\psi_{\mu+1} = P_\mu \cdot \varphi + Q_\mu \cdot \psi,$$

wo P_μ und Q_μ ganze Funktionen von x sind, P_μ von der Ordnung $n-n_\mu$, Q_μ von der Ordnung $m-n_\mu$ und mit Koefficienten, die rational sind in den a_i und b_i.

8. Bei der fortgesetzten Division wird man endlich auf einen Rest stossen, der gleich Null ist; dieser sei $\psi_{\mu+2}$. Der vorhergehende Rest $\psi_{\mu+1}$ wird dann entweder eine von Null verschiedene Konstante sein, also $n_{\mu+1}=0$, oder eine ganze Funktion von x für $n_{\mu+1}>0$. Wir behandeln der Übersichtlichkeit halber zunächst den ersten Fall

$$n_{\mu+1} = 0,$$

also $n_\mu \geq 1$.

Dividiert man dann 19) durch die nicht verschwindende Konstante $\psi_{\mu+1}$, so ergiebt sich die Aufgabe, zwei ganze Funktionen von x, P und Q, bezüglich höchstens von den Ordnungen $n-1$ und $m-1$, so zu bestimmen, dass die Identität besteht

20) $$1 = P \cdot \varphi + Q \cdot \psi,$$

eine Aufgabe, die nach unserer Annahme, $n_{\mu+1}=0$, $\psi_{\mu+1}$ nicht $=0$, immer lösbar sein muss.

Um P und Q zu bestimmen, setze man

21) $$\begin{cases} P = p_0 x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} \\ Q = q_0 x^{m-1} + q_1 x^{m-2} + \ldots + q_{m-1} \end{cases}$$

und vergleiche in obiger Identität 20) die Koefficienten aller Potenzen von x von der $(m+n-1)^{\text{ten}}$ bis zur 0ten. So ergiebt sich für die $m+n$ Unbekannten

$$p_0,\ p_1,\ \cdots,\ p_{n-1},\ q_0,\ q_1,\ \cdots,\ q_{m-1}$$

das System von $m+n$ linearen Gleichungen

22)
$$\begin{cases} 0 = a_0 p_0 & + b_0 q_0 \\ 0 = a_1 p_0 + a_0 p_1 & + b_1 q_0 + b_0 q_1 \\ 0 = a_2 p_0 + a_1 p_1 + a_0 p_2 & + b_2 q_0 + b_1 q_1 + b_0 q_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 = a_m p_{n-2} + a_{m-1} p_{n-1} & + b_n q_{m-2} + b_{n-1} q_{m-1} \\ 1 = a_m p_{n-1} & + b_n q_{m-1}. \end{cases}$$

Die Determinante dieses Systems:

23)
$$D_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & \cdots & . \\ & a_0 & a_1 & a_2 & . & \cdots & . \\ & & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & . \\ . & . & . & . & . & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & \cdots & . \\ & b_0 & b_1 & b_2 & . & \cdots & . \\ & & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & . \\ & & & & . & \cdots & b_n \end{vmatrix},$$

welche aus n Reihen der a_i und m Reihen der b_i besteht, verschwindet nicht, da die Gleichungen 22) andernfalls nicht zusammen existieren könnten. Bezeichnet man die Unterdeterminanten von D_0, genommen nach den Elementen der letzten Kolonne, bezüglich durch

24) $D_{0,0},\ D_{0,1},\ \cdots,\ D_{0,n-1},\ \Delta_{0,0},\ \Delta_{0,1},\ \cdots,\ \Delta_{0,m-1}$,

so wird

$$D_0 \cdot p_j = D_{0,j},\quad D_0 \cdot q_j = \Delta_{0,j}$$

und die Gleichung 20) wird

25)
$$D_0 = \varphi \cdot \sum_{j=0}^{j=n-1} D_{0,j}\, x^{n-j-1} + \psi \cdot \sum_{j=0}^{j=m-1} \Delta_{0,j}\, x^{m-j-1},$$

wo nun die

$$D_0,\quad D_{0,j},\quad \Delta_{0,j}$$

alle ganze Funktionen der Grössen a_i und b_i sind.

Umgekehrt kann man auch die Determinante D_0 immer, gleichviel ob sie verschwindet oder nicht, in der Form 25) darstellen. Zu diesem Zweck braucht man nur die erste Kolonne mit x^{m+n-1}, die zweite mit x^{m+n-2}, etc. zu multiplizieren und alle so vorbereiteten Reihen zur letzten Kolonne zu addieren. Es ergiebt sich

25a) $$D_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & \dots & . & x^{n-1}\varphi \\ & a_0 & a_1 & a_2 & . & \dots & . & x^{n-2}\varphi \\ & & . & . & . & \dots & . & . \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_m & x\varphi \\ & & & & a_0 & \dots & a_{m-1} & \varphi \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & \dots & . & x^{m-1}\psi \\ & b_0 & b_1 & b_2 & . & \dots & . & x^{m-2}\psi \\ & & . & . & . & \dots & . & . \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_n & x\psi \\ & & & & b_0 & \dots & b_{n-1} & \psi \end{vmatrix},$$

was, nach der letzten Kolonne geordnet, genau die Gleichung 25) ist.

9. Wir wollen nun ebenso die Gleichung 19) für irgend einen der Reste ψ_i, etwa X_ϱ von der Ordnung ϱ, explicite herstellen, gleichviel ob der letzte Rest $\psi_{\mu+1}$ konstant ist oder nicht. Der Faktor von x^ϱ in X_ϱ sei dabei gleich 1 gesetzt. Es muss dann immer möglich sein, die folgende Gleichung identisch zu erfüllen:

26) $$X_\varrho = P.\varphi + Q.\psi,$$

wo nun P und Q ganze Funktionen von x, höchstens bezüglich von den Ordnungen $n-\varrho-1$, $m-\varrho-1$, sind $(m \geq n > \varrho)$, nämlich

27) $$\begin{cases} P = p_0 x^{n-\varrho-1} + p_1 x^{n-\varrho-2} + \dots + p_{n-\varrho-1} \\ Q = q_0 x^{m-\varrho-1} + q_1 x^{m-\varrho-2} + \dots + q_{m-\varrho-1} \\ X_\varrho = x^\varrho \quad + r_1 x^{\varrho-1} \quad + \dots + r_\varrho. \end{cases}$$

Die Vergleichung der Koefficienten gleich hoher Potenzen von x von der $(m+n-\varrho-1)^{\text{ten}}$ an bis zur 0ten ergiebt dann aus 26) für die $m+n-2\varrho$ Unbekannten

$$p_0,\ p_1,\ \dots,\ p_{n-\varrho-1},\ q_0,\ q_1,\ \dots,\ q_{m-\varrho-1}$$

das System von $m+n-\varrho$ linearen Gleichungen

28) $$\begin{cases} 0 = a_0 p_0 + b_0 q_0 \\ 0 = a_1 p_0 + a_0 p_1 + b_1 q_0 + b_0 q_1 \\ 0 = a_2 p_0 + a_1 p_1 + a_0 p_2 + b_2 q_0 + b_1 q_1 + b_0 q_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = a_{m+n-2\varrho-2} p_0 + \dots + a_{m-\varrho-1} p_{n-\varrho-1} + b_{m+n-2\varrho-2} q_0 + \dots + b_{n-\varrho-1} q_{m-\varrho-1} \\ 1 = a_{m+n-2\varrho-1} p_0 + \dots + a_{m-\varrho} p_{n-\varrho-1} + b_{m+n-2\varrho-1} q_0 + \dots + b_{n-\varrho} q_{m-\varrho-1} \\ r_1 = a_{m+n-2\varrho} p_0 + \dots + a_{m-\varrho+1} p_{n-\varrho-1} + b_{m+n-2\varrho} q_0 + \dots + b_{n-\varrho+1} q_{m-\varrho-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_\varrho = a_{m+n-\varrho-1} p_0 + \dots + a_m p_{n-\varrho-1} + b_{m+n-\varrho-1} q_0 + \dots + b_n q_{m-\varrho-1}. \end{cases}$$

Die der Deutlichkeit halber in dem System 28) stehen gelassenen Grössen a_i, b_k, deren Indices

$$i > m, \quad k > n$$

werden, sind dabei gleich Null zu setzen.

Da die Gleichungen 28) zusammen bestehen, so verschwindet die Determinante D_ϱ aus den Koefficienten der ersten $m+n-2\varrho$ Gleichungen dieses Systems nicht; aus denselben bestimmen sich die p und q eindeutig, und die letzten ϱ Gleichungen liefern dann bei gegebenen $r_1, r_2, \ldots, r_\varrho$ ϱ Relationen für die a_i, b_k, d. h. sie bestimmen diese Grössen $r_1, r_2, \ldots, r_\varrho$ eindeutig, so dass man keine andere Funktion X_ϱ als den Rest aus der Gleichungskette 18) erhält.

Die Determinante D_ϱ wird

$$29) \qquad D_\varrho = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdots & a_{m+n-2\varrho-1} \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m+n-2\varrho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-\varrho} \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdot & \cdots & b_{m+n-2\varrho-1} \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m+n-2\varrho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ & & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-\varrho} \end{vmatrix}$$

$(a_i = 0,\ b_k = 0 \text{ für } i > m,\ k > n).$

Die Unterdeterminanten von D_ϱ nach den Elementen der letzten Kolonne genommen, seien bezeichnet bezüglich durch

$$30) \quad D_{\varrho,0},\ D_{\varrho,1},\ \ldots,\ D_{\varrho,n-\varrho-1},\ \Delta_{\varrho,0},\ \Delta_{\varrho,1},\ \ldots,\ \Delta_{\varrho,m-\varrho-1},$$

so wird

$$D_\varrho \cdot p_j = D_{\varrho,j}, \quad D_\varrho \cdot q_j = \Delta_{\varrho,j}$$

und die Gleichung 26) stellt sich so dar

$$31) \quad D_\varrho \cdot X_\varrho = \varphi \cdot \sum_{j=0}^{j=n-\varrho-1} D_{\varrho,j}\, x^{n-\varrho-j-1} + \psi \cdot \sum_{j=0}^{j=m-\varrho-1} \Delta_{\varrho,j} \cdot x^{m-\varrho-j-1}.$$

Bestimmt man die Werte der r aus 28), so ergiebt sich X_ϱ noch in ausgerechneter Form, die sich so schreiben lässt:

$$32) D_\varrho \cdot X_\varrho = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots a_{m+n-2\varrho-2} & (a_{m+n-2\varrho-1}x^\varrho + a_{m+n-2\varrho}x^{\varrho-1} + \ldots) \\ & a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_{m+n-2\varrho-3} & (a_{m+n-2\varrho-2}x^\varrho + a_{m+n-2\varrho-1}x^{\varrho-1} + \ldots) \\ & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ & & a_0 & a_1 \ldots a_{m-\varrho-1} & (a_{m-\varrho}x^\varrho + a_{m-\varrho+1}x^{\varrho-1} + \ldots + a_m) \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots b_{m+n-2\varrho-2} & (b_{m+n-2\varrho-1}x^\varrho + b_{m+n-2\varrho}x^{\varrho-1} + \ldots) \\ & b_0 & b_1 & b_2 \ldots b_{m+n-2\varrho-3} & (b_{m+n-2\varrho-2}x^\varrho + b_{m+n-2\varrho-1}x^{\varrho-1} + \ldots) \\ & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ & & b_0 & b_1 \ldots b_{n-\varrho-1} & (b_{n-\varrho}x^\varrho + b_{n-\varrho+1}x^{\varrho-1} + \ldots + b_n) \end{vmatrix}$$

$(a_i = 0,\ b_k = 0 \text{ für } i > m,\ k > n).$

Hierbei sind also sowohl $D_\varrho \cdot X_\varrho$, als auch die Grössen $D_{\varrho,j}$ und $\Delta_{\varrho,j}$ in 31) ganze Funktionen der a und b.

Umgekehrt lässt sich die durch 32) definierte Funktion ϱ^{ter} Ordnung $D_\varrho . X_\varrho$ immer in der Form 31) darstellen, gleichviel ob D_ϱ (und die übrigen Koefficienten dieser Funktion) verschwindet oder nicht. Zu diesem Zwecke braucht man nur wieder die Kolonnen der Determinante 32) der Reihe nach mit

$$x^{m+n-\varrho-1},\quad x^{m+n-\varrho-2},\quad \ldots,\quad x^{\varrho+1}$$

zu multiplizieren und zur letzten Kolonne zu addieren, so tritt an Stelle dieser letzten Kolonne bezüglich

$$x^{n-\varrho-1}\varphi,\quad x^{n-\varrho-2}\varphi,\quad \ldots,\quad \varphi,\quad x^{m-\varrho-1}\psi,\quad x^{m-\varrho-2}\psi,\quad \ldots,\quad \psi,$$

und man hat die verlangte Darstellung von 32) in der Form 31).

Aus 28) und 32) folgt noch das Theorem:

Bei der Entwicklung 18) tritt ein Rest vom Grade ϱ auf oder nicht, je nachdem D_ϱ (29) nicht verschwindet oder verschwindet.

10. Die Theorie der Resultante und der gemeinsamen Faktoren von φ und ψ ist eine unmittelbare Anwendung der Formeln von Nr. 7, 8 und 9.

Sobald die Funktion

$$\psi_{\mu+1}$$

in 18) identisch verschwindet, ψ_μ aber nicht, so ist ψ_μ ein Faktor von $\psi_{\mu-1}$, $\psi_{\mu-2}$, ..., also von φ und ψ, und jeder φ und ψ gemeinsame Faktor ist auch nach den Formeln 26) und 31) ein solcher von ψ_μ; also ist dann ψ_μ der gesuchte grösste gemeinsame Faktor. Ist $\psi_{\mu+1}$ konstant und von Null verschieden, so haben φ und ψ keinen gemeinsamen Faktor.

Beachtet man nun die Darstellung der Reste in 32) und das Theorem am Schlusse des vorigen Artikels 9, so ergiebt sich der Hauptsatz für das Zusammenbestehen von φ und ψ in folgender Form:

Wenn D_0 (29) nicht Null ist, so haben φ und ψ keinen Faktor gemein.

Wenn $D_0 = 0$ ist und D_1 (29) nicht Null, so haben φ und ψ einen Faktor erster Ordnung, nämlich $D_1 X_1$ in 32) und keinen höherer Ordnung gemein.

Wenn $D_0 = 0$, $D_1 = 0$, D_2 nicht Null, so haben φ und ψ genau einen Faktor zweiter Ordnung, $D_2 X_2$, gemein u. s. w. Allgemein:

Wenn $D_0 = 0$, $D_1 = 0$, ..., $D_{\varrho-1} = 0$, D_ϱ aber nicht Null ist, so haben φ und ψ einen Faktor ϱ^{ter} Ordnung, $D_\varrho X_\varrho$, (32), und keinen Faktor höherer Ordnung gemeinsam. Dabei ist $D_\varrho X_\varrho$

eine ganze Funktion der Koefficienten von φ und ψ. Ebenso sind die Quotienten $\frac{\varphi}{X_\varrho}$, $\frac{\psi}{X_\varrho}$ bis auf Potenzen von D_ϱ ganze Funktionen der Koefficienten von φ und ψ. Wird endlich

$$D_0 = 0, \quad D_1 = 0, \quad \ldots, \quad D_{n-1} = 0,$$

so ist ψ selbst Faktor von φ. Hiernach ist

$$D_0 = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung, dass φ und ψ überhaupt einen Faktor gemein haben.

Man nennt deshalb die ganze Funktion D_0 der Koefficienten a_i und b_i

die Resultante der beiden Formen φ und ψ.

Wir werden unten (Nr. 15 in diesem Paragraphen) zeigen, dass D_0 dieselbe Funktion ist, welche in Nr. 3 dieses Paragraphen als Funktion R aufgestellt worden ist.

11. Anmerkung. Die Bedingungen, dass φ und ψ einen Faktor ϱ^{ter} Ordnung gemeinsam haben, lassen sich noch in anderer Weise ausdrücken.

Bringt man nämlich in diesem Fall die Funktion $(\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die aus 32) durch Vertauschung von ϱ mit $\varrho-1$ entsteht, auf die Form 31), so zeigt sich, da der gemeinsame Faktor ϱ^{ter} Ordnung nicht in diese Funktion teilbar sein kann, dass alle Koefficienten derselben verschwinden, und man hat die Identität

33) $$0 = P\varphi + Q\psi,$$

wo nun P eine ganze Funktion von der Ordnung $n-\varrho$, Q eine ganze Funktion von der Ordnung $m-\varrho$ vorstellt, nämlich

34) $$\begin{cases} P = p_0 x^{n-\varrho} + p_1 x^{n-\varrho-1} + \ldots + p_{n-\varrho} \\ Q = q_0 x^{m-\varrho} + q_1 x^{m-\varrho-1} + \ldots + q_{m-\varrho}. \end{cases}$$

Dabei können p_0 und q_0 nicht Null sein, da diese beiden Grössen nach 31) mit $D_{\varrho-1,0}$, $\Delta_{\varrho-1,0}$, d. h. bezüglich mit $b_0 D_\varrho$ und $a_0 D_\varrho$, die nach dem Theorem in Nr. 10 nicht verschwinden, übereinstimmen.

Um nun die Identität

35) $$0 = P'\varphi + Q'\psi$$

zu lösen, wo P' und Q' zu bestimmende ganze Funktionen von den Ordnungen $n-1$ und $m-1$ sind, nämlich

36) $$\begin{cases} P' = p'_0 x^{n-1} + p'_1 x^{n-2} + \ldots + p'_{n-1} \\ Q' = q'_0 x^{m-1} + q'_1 x^{m-2} + \ldots + q'_{m-1} \end{cases}$$

kann man die Identität 33) mit einer beliebigen ganzen Funktion $(\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

37) $$L = \lambda_0 x^{\varrho-1} + \lambda_1 x^{\varrho-2} + \ldots + \lambda_{\varrho-1}$$

multiplizieren und setzen

38) $$P' = P.L, \quad Q' = QL,$$

und man wird immer Lösungen von 35) haben.

Durch Vergleichung der Koefficienten in den beiden Identitäten 38) findet man aber die Lösungen

39)
$$\begin{cases} p'_0 = p_0\lambda_0 \\ p'_1 = p_1\lambda_0 + p_0\lambda_1 \\ p'_2 = p_2\lambda_0 + p_1\lambda_1 + p_0\lambda_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p'_{n-1} = p_{n-\varrho}\lambda_{\varrho-1} \\ q'_0 = q_0\lambda_0 \\ q'_1 = q_1\lambda_0 + q_0\lambda_1 \\ q'_2 = q_2\lambda_0 + q_1\lambda_1 + q_0\lambda_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ q'_{m-1} = q_{m-\varrho}\lambda_{\varrho-1}. \end{cases}$$

Diese durch das System 39) gegebenen Lösungen enthalten die ϱ willkürlichen Parameter

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_{\varrho-1}$$

in linearer und homogener Weise und ferner auch in von einander unabhängiger Weise, wie schon die ersten ϱ Gleichungen des Systems wegen des nicht verschwindenden p_0 zeigen.

Dieses sagt weiter aus, dass das aus 35) entstehende System von $m+n$ linearen Gleichungen — das in 22) gegeben ist, wenn man dort die linken Seiten alle gleich Null setzt und die p, q mit p', q' vertauscht — das System 39) von Lösungen mit ϱ von einander unabhängigen, linear und homogen eingehenden Parametern zulässt. Nach einem bekannten Satze über die Auflösung linearer Gleichungen* verschwindet also nicht nur die Determinante D_0 dieses Systems, sondern auch sämtliche Unterdeterminanten von D_0 erster, zweiter, ..., bis zur $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Ordnung inclusive.

Umgekehrt folgt aus diesem Verschwinden der Unterdeterminanten von D_0 auch das Verschwinden von

$$D_1, \quad D_2, \quad \ldots, \quad D_{\varrho-1},$$

da diese Grössen, mit Potenzen von a_0 oder b_0 multipliziert, zu jenen Unterdeterminanten gehören.

---

* Baltzer, Determ., § 8, 2, IV.

Die Unterdeterminanten ϱ^{ter} Ordnung von D_0 verschwinden nicht sämtlich, da aus demselben Grunde sonst auch D_ϱ verschwinden würde, woraus noch folgt, dass man in 39) alle Lösungen von 35) hat.

Schliesst man also wieder den Fall unendlicher Wurzeln, d. h. das Verschwinden von a_0 und b_0 aus, so hat man an Stelle unseres Theorems auch das folgende:

Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass φ und ψ einen Faktor ϱ^{ter} Ordnung und keinen höheren gemeinsam haben, ist die, dass sämtliche Unterdeterminanten $(\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Resultante D_0 verschwinden, aber nicht sämtliche ϱ^{ter} Ordnung.

Während aber das Haupttheorem genau ϱ von einander unabhängige Bedingungen angab, liefert dieses Theorem mehr als ϱ Bedingungen, die aber noch von einander abhängig sind.

12. Wir betrachten nun die einzelnen Methoden der Elimination, die von den Mathematikern vorgeschlagen worden sind, nämlich die sogenannte dialytische Methode von Sylvester* und die abgekürzte Methode von Bézout**.

Sylvesters dialytische Methode lässt sich unmittelbar an unsere obigen Entwicklungen anknüpfen. Mit dem Gleichungssystem (22) dieses Paragraphen besteht nämlich offenbar auch eines von folgender Form für $m+n$ Unbekannte:

$$x_0,\quad x_1,\quad \ldots,\quad x_{m+n-1}$$

$$40)\quad \begin{cases} a_0 x_{m+n-1} + a_1 x_{m+n-2} + a_2 x_{m+n-3} + \ldots + a_{m+n-1} x_0 = f_0 \\ a_0 x_{m+n-2} + a_1 x_{m+n-3} + \ldots + a_{m+n-2} x_0 = f_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 x_m + \ldots + a_m x_0 = f_{n-1} \\ b_0 x_{m+n-1} + b_1 x_{m+n-2} + b_2 x_{m+n-3} + \ldots + b_{m+n-1} x_0 = f'_0 \\ b_0 x_{m+n-2} + b_1 x_{m+n-3} + \ldots + b_{m+n-2} x_0 = f'_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0 x_n + \ldots + b_n x_0 = f'_{m-1} \end{cases}$$

$$(a_i = 0,\quad b_k = 0 \text{ für } i > m,\ k > n).$$

Aber die Form dieses Systems führt sogleich darauf, dasselbe durch ein anderes zu ersetzen. Setzt man nämlich überall

$$x^\varrho \text{ statt } x_\varrho,$$

so geht auf der rechten Seite des Systems 40)

* Sylvester, Philos. Magazine 1840, Nr. 101.

** Bézout, Mém. de Paris 1764, pag. 317. Vergl. Jacobi, Crelle J. 15.

$$f_h \text{ in } x^{n-h-1}\varphi$$
$$f'_h \text{ in } x^{n_1-h-1}\psi$$

über und man hat das System

$$41)\quad \begin{cases} a_0x^{m+n-1}+a_1x^{m+n-2}+a_2x^{m+n-3}+\ldots & =x^{n-1}.\varphi \\ a_0x^{m+n-2}+a_1x^{m+n-3}+\ldots & =x^{n-2}.\varphi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_0x^m+\ldots+a_m & =\varphi \\ b_0x^{m+n-1}+b_1x^{m+n-2}+b_2x^{m+n-3}+\ldots & =x^{m-1}.\psi \\ b_0x^{m+n-2}+b_1x^{m+n-3}+\ldots & =x^{m-2}.\psi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_0x^n+\ldots+b_n & =\psi. \end{cases}$$

Dieses ist das System, von welchem die dialytische Methode direkt ausgeht. Man kann nämlich auf der linken Seite x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, ..., x^0 als die $m+n$ Unbekannten eines linearen Systems betrachten und erhält dann, indem man das System insbesondere nach x^0 auflöst, die Relation

$$D_0 . x^0 = D_0 = P\varphi + Q\psi,$$

was die Gleichung 25) dieses Paragraphen ist.

Wenn nun φ und ψ einen Faktor gemein haben, so muss derselbe auch in D_0 enthalten sein, d. h. D_0 verschwindet dann: D_0 ist also die Resultante von φ und ψ. Lässt man sodann in 41) die erste und die $(n+1)^{te}$ Gleichung weg, so ergiebt sich, indem man die zwei letzten Glieder jeder Gleichung zu einem, mit dem Faktor x^0, zusammenzieht, also z. B. die $(n-1)^{te}$ Gleichung so schreibt:

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-2}x^2 + (a_{m-1}x + a_m).x^0 = \varphi,$$

ein System von $m+n-2$ Gleichungen mit den $m+n-2$ linear eingehenden Unbekannten

$$x^{m+n-2},\quad x^{m+n-1},\quad \ldots,\quad x^2,\quad x^0;$$

und löst man dieses System nach x^0 auf, so erhält man die Determinante 32) in der Form 31) ausgedrückt für $\varrho = 1$, d. h. wenn D_1 nicht Null ist, den gemeinsamen Faktor erster Ordnung.

Dieser Faktor erster Ordnung liefert also eine gemeinsame Wurzel von $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Bezeichnet man dieselbe mit α und führt α statt x in das System 41) ein, so verschwinden auf der rechten Seite alle Glieder, und vermöge $D_0 = 0$ liefert dann das System 41) noch folgende Darstellung für die Potenzen dieser gemeinsamen Wurzel

$$42)\quad \alpha^{m+n-1} : \alpha^{m+n-2} : \ldots : \alpha^1 : 1 = R_0 : R_1 : \ldots : R_{m+n-2} : R_{m+n-1},$$

wo die R_k die Unterdeterminanten von D_0 nach den Elementen irgend einer, etwa der ersten Zeile genommen, vorstellen. Diese R_k ver-

schwinden nach Artikel 11 dieses Paragraphen nicht sämtlich, da D_1 nicht Null sein soll.

Bei einem gemeinsamen Faktor zweiter Ordnung hat man in 41) die erste und zweite, sowie die $(n+1)^{te}$ und $(n+2)^{te}$ Gleichung wegzulassen, um den Ausdruck 32) in der Form 31) für $\varrho = 2$ zu erhalten; lässt man nur die erste Gleichung von 41) weg und fasst in den übrigen Gleichungen dieses Systems wieder je die zwei letzten Glieder zu einem zusammen, so verhalten sich die Potenzen irgend einer der beiden gemeinsamen Wurzeln wie die Unterdeterminanten nach den Elementen einer Zeile der $(m+n-1)$ reihigen Determinante der so modifizierten Gleichungen 41) u. s. w.*

Beispiel. Für

43)
$$\begin{cases} \varphi = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \\ \psi = b_0 x^2 + b_1 x + b_2 \end{cases}$$

wird

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 b_2 - a_2 b_0 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_0 b_1 - a_1 b_0 & a_0 b_2 - a_2 b_0 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

Ist $D_0 = 0$, D_1 nicht Null, so wird der gemeinsame Faktor

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 x + a_2 \\ b_0 & b_1 x + b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} . x + \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} .$$

Wird

$$D_0 = 0 \quad \text{und} \quad D_1 = 0,$$

so schliesst man aus bekannten Determinantensätzen, dass, wenn a_0 und b_0 nicht beide Null sind, alle ersten Unterdeterminanten von D_0 verschwinden müssen und φ durch ψ teilbar ist.

13. Die Determinante D_0 kann in eine m-reihige zusammengezogen werden.** Dasselbe wird aber auch unmittelbarer durch die Bézoutsche Eliminationsmethode geleistet.

Man kann nämlich die beiden Funktionen φ und ψ, die wir hier zunächst als von gleicher Ordnung m voraussetzen:

---

* Eine eingehende Darstellung der Beziehungen zwischen den Unterdeterminanten von D_0 und Kombinationen der gemeinsamen Wurzeln von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ findet sich bei Gordan, „Über den grössten gemeinsamen Faktor", Math. Ann. VII pag. 433.

** Vergl. über die Transformation von D_0 Baltzer, Determ. §§ 11, 12.

44) $$\begin{cases} \varphi = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m \\ \psi = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m \end{cases}$$

mit je zwei solchen Funktionen i^{ter} Ordnung (wo $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$)

$$\lambda^{(i)}, \quad \mu^{(i)}$$

multiplizieren, dass man in

45) $$\lambda^{(i)}\varphi - \mu^{(i)}\psi \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

m verschiedene ganze Funktionen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in x erhält. Zu dem Zwecke setze man

46) $$\begin{cases} \lambda^{(i)} = b_0 x^i + b_1 x^{i-1} + \ldots + b_i \\ \mu^{(i)} = a_0 x^i + a_1 x^{i-1} + \ldots + a_i, \end{cases}$$

so wird

47) $$\lambda^{(i)}\varphi - \mu^{(i)}\psi = \begin{vmatrix} b_0 x^i + \ldots + b_i & b_0 x^m + \ldots + b_m \\ a_0 x^i + \ldots + a_i & a_0 x^m + \ldots + a_m \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_0 x^i + \ldots + b_i & b_{i+1} x^{m-i-1} + b_{i+2} x^{m-i-2} + \ldots + b_m \\ a_0 x^i + \ldots + a_i & a_{i+1} x^{m-i-1} + a_{i+2} x^{m-i-2} + \ldots + a_m \end{vmatrix},$$

was nun gleich einer Funktion $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung geworden ist, die wir bezeichnen wollen durch

48) $$u_i = c_{i0} x^{m-1} + c_{i1} x^{m-2} + \ldots + c_{i,m-1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

was ein System von m Funktionen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung liefert.

Hierbei ist, wenn man

$$a_i b_k - a_k b_i = d_{ik} \quad (d_{i,i} = 0, \; d_{ik} = -d_{ki})$$

setzt,

49) $$\begin{cases} c_{i0} = d_{i+1,0} \\ c_{i1} = d_{i+2,0} + d_{i+1,1} \\ c_{i2} = d_{i+3,0} + d_{i+2,1} + d_{i+1,2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{i,m-1} = d_{m,i}. \end{cases}$$

Dabei wird für $k > i$:

$$c_{ik} - c_{ki} = d_{i+1,k} + d_{i+2,k-1} + \ldots + d_{k,i+1} = 0,$$

d. h.

$$c_{ik} = c_{ki}.$$

Versteht man unter x eine gemeinsame Wurzel von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, so hat man für dieselbe*

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad \ldots, \quad u_{m-1} = 0,$$

und wenn man aus diesen m Gleichungen die linear eingehenden Potenzen

* Cauchy, Exerc. d'Anal. 1840 pag. 393.

$$x^0,\quad x^1,\quad \ldots,\quad x^{m-1}$$

eliminiert, so ergiebt sich die Resultante als die Determinante

$$50)\qquad C_0 = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0,m-1} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1,m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & \cdots & c_{m-1,m-1} \end{vmatrix}.$$

Sei ferner gesetzt

$$51)\qquad C_\varrho = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0,m-\varrho-1} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1,m-\varrho-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-\varrho-1,0} & c_{m-\varrho-1,1} & \cdots & c_{m-\varrho-1,m-\varrho-1} \end{vmatrix}$$

und

$$52)\qquad F_\varrho = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0,m-\varrho-2} & c_{0,m-\varrho-1}x^\varrho + c_{0,m-\varrho}x^{\varrho-1} + \ldots + c_{0,m-1} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1,m-\varrho-2} & c_{1,m-\varrho-1}x^\varrho + c_{1,m-\varrho}x^{\varrho-1} + \ldots + c_{1,m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-\varrho-1,0} & c_{m-\varrho-1,1} & \cdots & c_{m-\varrho-1,m-\varrho-2} & c_{m-\varrho-1,m-\varrho-1}x^\varrho + c_{m-\varrho-1,m-\varrho}x^{\varrho-1} + \ldots + c_{m-\varrho-1,m-1} \end{vmatrix},$$

also

$$F_\varrho = C_\varrho x^\varrho + \ldots$$

so wird, indem man die Kolonnen von F_ϱ der Reihe nach mit

$$x^{m-1},\quad x^{m-2},\quad \ldots,\quad x^{\varrho+1}$$

multipliziert und zur letzten Kolonne addiert

$$53)\qquad F_\varrho = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0,m-\varrho-2} & u_0 \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1,m-\varrho-2} & u_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-\varrho-1,0} & c_{m-\varrho-1,1} & \cdots & c_{m-\varrho-1,m-\varrho-2} & u_{m-\varrho-1} \end{vmatrix}$$

oder

$$F_\varrho = P^{(\varrho)}.\varphi + Q^{(\varrho)}.\psi,$$

da $u_i = \lambda^{(i)}\varphi - \mu^{(i)}\psi$ ist. Dabei werden $P^{(\varrho)}$, $Q^{(\varrho)}$ Funktionen $(m-\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in x.

Aus dem letztern Grunde ist F_ϱ nach pag. 61, sobald C_ϱ nicht verschwindet, einer der Reste aus der Kette 18), welche durch Division von φ und ψ entstehen. Man erhält also, genau wie in 10), den Satz:

$C_0 = 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung, dass φ und ψ einen Faktor gemein haben.

Ist $C_0 = 0$, $C_1 = 0$, ..., $C_{\varrho-1} = 0$, C_ϱ aber nicht Null, so haben φ und ψ die Funktion ϱ^{ter} Ordnung F_ϱ (52) als grössten gemeinsamen Faktor.

Hiernach muss C_0 mit D_0 bis auf einen leicht zu erhaltenden Zahlenfaktor übereinstimmen, und in der That sind beide homogene,

ganze Funktionen m^{ter} Ordnung der Koefficienten jeder der beiden Formen φ und ψ. Ebenso müssen C_1, C_2, ... bezüglich mit D_1, D_2, ... bis auf numerische Faktoren übereinstimmen.

Die ersten Unterdeterminanten von C_0 haben noch eine bemerkenswerte Eigenschaft.* Seien dieselben bez. nach dem Element c_{ik} mit δ_{ik} bezeichnet. Man hat nun zunächst

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

Wenn nun $C_0 = 0$, aber die δ_{ik} nicht alle verschwinden, so haben φ und ψ eine Wurzel α gemein, für welche

$$\alpha^{m-r} : \alpha^{m-s} = \delta_{rk} : \delta_{sk}$$
$$\alpha^{m-k} : \alpha^{m-l} = \delta_{ks} : \delta_{ls}$$

also

$$\frac{\alpha^{m-r} \cdot \alpha^{m-k}}{\alpha^{m-s} \cdot \alpha^{m-l}} = \frac{\delta_{rk} \cdot \delta_{ks}}{\delta_{sk} \cdot \delta_{ls}} = \frac{\delta_{rk}}{\delta_{ls}} = \frac{\alpha^{s+l}}{\alpha^{r+k}}.$$

Wenn daher

$$s + l = r + k,$$

so wird auch

$$\delta_{sl} = \delta_{rk}$$

und man kann δ_{rk} mit δ_{r+k} bezeichnen, indem sein Wert nur von der Summe der Indices r und k abhängt.

Die Gleichungen

54) $$\delta_{rk} = \delta_{sl} = \delta_{r+k} \text{ für } r + k = s + l$$

gelten aber noch, wenn auch C_0 nicht Null ist. Denn dieselben können nicht vermöge $C_0 = 0$ erfüllt werden, weil C_0 in Bezug auf die Koefficienten von höherem Grade ist als die δ_{rk}; daher müssen 54) Identitäten werden.

Für die gemeinsame Wurzel α von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, hat man für $C_0 = 0$, C_1 nicht Null

$$\delta_0 : \delta_1 : \delta_2 : \ldots \delta_{2m-2} = \alpha^{2m-2} : \alpha^{2m-3} : \alpha^{2m-4} : \ldots : 1.$$

Anmerkung 1. Noch ist zu bemerken, dass man die Bedingungen, dass φ und ψ als grössten, gemeinsamen Faktor eine Funktion ϱ^{ter} Ordnung besitzen sollen, auch so ausdrücken kann:

Es müssen alle Unterdeterminanten $(\varrho - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von C_0 verschwinden, ohne dass alle ϱ^{ter} Ordnung verschwinden.

Anmerkung 2. Bisher war in dieser Nummer überall

$$n = m$$

vorausgesetzt. Wenn

$$n < m,$$

* Jacobi, Crelles Journal 15, pag. 106.

so gehe man doch zuerst von zwei Formen m^{ter} Ordnung aus und stelle die Funktionen C_ϱ und F_ϱ nach der in dieser Nummer angegebenen Methode auf. Alsdann setze man in

$$\psi = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$
$$b_0 = b_1 = \ldots = b_{m-n-1} = 0$$

und erhält so die Resultante etc. für die beiden Formen

$$\begin{cases} \varphi = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m \\ \psi = b_{m-n} x^n + b_{m-n+1} x^{n-1} + \ldots + b_m, \end{cases}$$

aber noch mit Faktoren behaftet. In der That ist C_0 die Determinante der m in den

$$x^0, \quad x^1, \quad \ldots, \quad x^{m-1}$$

linearen Formen

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_{m-1}$$

und von diesen werden die $m-n$ ersten zu

$$u_0 = -a_0 \psi$$
$$u_1 = -(a_0 x + a_1)\psi$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$u_{m-n-1} = -(a_0 x^{m-n-1} + a_1 x^{m-n-2} + \ldots + a_{m-n-1})\psi.$$

Man kann also, um die Determinante C_0 zu bilden, an Stelle dieser Formen auch deren lineare Kombinationen

$$a_0\psi, \quad a_0 x\psi, \quad a_0 x^2\psi, \quad \ldots, \quad a_0 x^{m-n-1}\psi$$

setzen, und C_0 hat daher a_0^{m-n} zum Faktor. $\frac{C_0}{a_0^{m-n}}$ ist dann die eigentliche Resultante von φ und ψ.

Beispiele. 1. Für $m = 2$, nämlich

$$\varphi = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$
$$\psi = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$$

wird

$$C_0 = \begin{vmatrix} d_{10} & d_{20} \\ d_{20} & d_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_0 - a_0 b_1 & a_2 b_0 - a_0 b_2 \\ a_2 b_0 - a_0 b_2 & a_2 b_1 - a_1 b_2 \end{vmatrix},$$
$$C_1 = d_{10} = a_1 b_0 - a_0 b_1, \quad F_1 = d_{10} x + d_{20}.$$

2. Für $m = 3$, nämlich

$$\varphi = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$
$$\psi = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$$

wird

$$C_0 = \begin{vmatrix} d_{10} & d_{20} & d_{30} \\ d_{20} & d_{30} + d_{21} & d_{31} \\ d_{30} & d_{31} & d_{32} \end{vmatrix},$$
$$C_1 = \begin{vmatrix} d_{10} & d_{20} \\ d_{20} & d_{30} + d_{21} \end{vmatrix}, \quad C_2 = d_{10}.$$

$$F_1 = \begin{vmatrix} d_{10} & d_{20}x + d_{30} \\ d_{20} & (d_{30} + d_{21})x + d_{31} \end{vmatrix},$$
$$F_2 = d_{10}x^2 + d_{20}x + d_{30}.$$

3. Für $m = 4$ wird

$$C_0 = \begin{vmatrix} d_{10} & d_{20} & d_{30} & d_{40} \\ d_{20} & d_{30} + d_{21} & d_{40} + d_{31} & d_{41} \\ d_{30} & d_{40} + d_{31} & d_{41} + d_{32} & d_{42} \\ d_{40} & d_{41} & d_{42} & d_{43} \end{vmatrix},$$

$$F_1 = \begin{vmatrix} d_{10} & d_{20} & d_{30}x + d_{40} \\ d_{20} & d_{30} + d_{21} & (d_{40} + d_{31})x + d_{41} \\ d_{30} & d_{40} + d_{31} & (d_{41} + d_{32})x + d_{42} \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

14. Die Bézoutsche Methode hat von Cayley eine wesentliche Umgestaltung erfahren.* Wählt man nämlich für $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(i)}$ die beiden Funktionen

$$\psi(y), \quad \varphi(y),$$

wo y eine neue Variable vorstellt, so ist die Differenz

55) $$\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)$$

teilbar durch

$$y - x.$$

Der Quotient ist eine ganze Funktion von x, y von der Ordnung $m-1$ in Bezug auf jede Variable und kann dargestellt werden in der Form

56) $$\Phi(x,y) = \sum_{i=0}^{i=m-1} \sum_{k=0}^{k=m-1} c_{ik} x^{m-k-1} y^{m-i-1}$$

oder

57) $$\begin{cases} (c_{00}x^{m-1} + c_{01}x^{m-2} + \ldots + c_{0,m-1})y^{m-1} \\ + (c_{10}x^{m-1} + c_{11}x^{m-2} + \ldots + c_{1,m-1})y^{m-2} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (c_{m-1,0}x^{m-1} + c_{m-1,1}x^{m-2} + \ldots + c_{m-1,m-1})y^0, \end{cases}$$

oder

$$\sum_i u_i y^{m-i-1}$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1).$$

Versteht man wieder unter x eine gemeinsame Wurzel von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, so verschwindet für dieses x auch die symmetrische Funktion

$$\Phi(x,y) = \frac{\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)}{y - x}$$

---

* Cayley, Crelles Journal 53 pag. 366. Note dazu von Borchardt, Crelles Journal 53 pag. 367. Eine gelegentliche Bemerkung findet sich schon bei Hermite, Brief an Borchardt, Crelles Journal 52 pag. 47, Fussnote.

für jeden Wert von y, also verschwinden für die gemeinsame Wurzel x auch die sämtlichen Funktionen

$$u_0, \quad u_1, \quad \cdots, \quad u_{m-1},$$

was unmittelbar die Bézoutsche Resultante liefert.

Beispiele. 1. Für $m=2$, nämlich

$$\varphi(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, \quad \varphi(y) = a_0y^2 + a_1y + a_2$$
$$\psi(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2, \quad \psi(y) = b_0y^2 + b_1y + b_2$$

wird

$$\Phi(x,y) = \frac{\varphi(x)\cdot\psi(y) - \psi(x)\cdot\varphi(y)}{y-x} = y\,[(a_1b_0 - a_0b_1)x + (a_2b_0 - a_0b_2)] + \\ + 1\,.\,[(a_2b_0 - a_0b_2)x + (a_2b_1 - a_1b_2)].$$

Für $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=0$ ist

$$u_0 = (a_1b_0 - a_0b_1)x + (a_2b_0 - a_0b_2) = 0,$$
$$u_1 = (a_2b_0 - a_0b_2)x + (a_2b_1 - a_1b_2) = 0,$$

woraus sich die Resultante C_0 ergiebt:

$$C_0 = \begin{vmatrix} a_1b_0 - a_0b_1 & a_2b_0 - a_0b_2 \\ a_2b_0 - a_0b_2 & a_2b_1 - a_1b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{10} & d_{20} \\ d_{20} & d_{21} \end{vmatrix}, \text{ wie oben.}$$

2. Für $m=3$, nämlich

$$\varphi(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$
$$\psi(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$$
$$\varphi(y) = a_0y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3,$$
$$\psi(y) = b_0y^3 + b_1y^2 + b_2y + b_3$$

wird

$$\Phi(x,y) = \frac{\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)}{y-x}$$
$$= y^2\{(a_1b_0 - a_0b_1)x^2 + (a_2b_0 - a_0b_2)x + (a_3b_0 - a_0b_3)\} +$$
$$+ y\{(a_2b_0 - a_0b_2)x^2 + (a_3b_0 - a_0b_3)x + (a_2b_1 - a_1b_2)x\} + (a_3b_1 - a_1b_3) +$$
$$+ 1\{(a_3b_0 - a_0b_3)x^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)x + (a_3b_2 - a_2b_3)\} =$$
$$= (c_{00}x^2 + c_{01}x + c_{02})y^2 + (c_{10}x^2 + c_{11}x + c_{12})y +$$
$$+ (c_{20}x^2 + c_{21}x + c_{22}) = u_0y^2 + u_1y + u_2.$$

Versteht man unter x eine gemeinsame Wurzel von $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=0$, so ist auch

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0.$$

Also verschwindet die Resultante

$$C_0 = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{10} & d_{20} & d_{30} \\ d_{20} & d_{30} + d_{21} & d_{31} \\ d_{30} & d_{31} & d_{32} \end{vmatrix}.$$

15. Zusammenhang zwischen den Determinanten D_0 (23) und C_0 (50) und der Funktion (13)

$$R = a_0^n \psi(\alpha_1) \dots \psi(\alpha_m).$$

Um nachzuweisen, dass das Produkt R mit der Determinante D_0 identisch ist, multipliziert man D_0 mit einer Determinante $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades, nämlich mit*

$$58) \qquad Q = \begin{vmatrix} \beta_1^{m+n-1} & \beta_1^{m+n-2} & \dots & 1 \\ \beta_2^{m+n-1} & \beta_2^{m+n-2} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{m+n-1} & \alpha_1^{m+n-2} & \dots & 1 \\ \alpha_2^{m+n-1} & \alpha_2^{m+n-2} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Das Produkt dieser beiden Determinanten ist nach der Multiplikationsregel der Determinanten wieder eine Determinante $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades:

$$59) P = \begin{vmatrix} \beta_1^{n-1}\varphi(\beta_1) & \beta_2^{n-1}\varphi(\beta_2) \dots \beta_n^{n-1}\varphi(\beta_n) & \alpha_1^{n-1}\varphi(\alpha_1) & \alpha_2^{n-1}\varphi(\alpha_2) \dots \alpha_m^{n-1}\varphi(\alpha_m) \\ \beta_1^{n-2}\varphi(\beta_1) & \beta_2^{n-2}\varphi(\beta_2) \dots \beta_n^{n-2}\varphi(\beta_n) & \alpha_1^{n-2}\varphi(\alpha_1) & \alpha_2^{n-2}\varphi(\alpha_2) \dots \alpha_m^{n-2}\varphi(\alpha_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1\varphi(\beta_1) & \beta_2\varphi(\beta_2) \dots \beta_n\varphi(\beta_n) & \alpha_1\varphi(\alpha_1) & \alpha_2\varphi(\alpha_2) \dots \alpha_m\varphi(\alpha_m) \\ \varphi(\beta_1) & \varphi(\beta_2) \dots \varphi(\beta_n) & \varphi(\alpha_1) & \varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_m) \\ \beta_1^{m-1}\psi(\beta_1) & \beta_2^{m-1}\psi(\beta_2) \dots \beta_n^{m-1}\psi(\beta_n) & \alpha_1^{m-1}\psi(\alpha_1) & \alpha_2^{m-1}\psi(\alpha_2) \dots \alpha_m^{m-1}\psi(\alpha_m) \\ \beta_1^{m-2}\psi(\beta_1) & \beta_2^{m-2}\psi(\beta_2) \dots \beta_n^{m-2}\psi(\beta_n) & \alpha_1^{m-2}\psi(\alpha_1) & \alpha_2^{m-2}\psi(\alpha_2) \dots \alpha_m^{m-2}\psi(\alpha_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1\psi(\beta_1) & \beta_2\psi(\beta_2) \dots \beta_n\psi(\beta_n) & \alpha_1\psi(\alpha_1) & \alpha_2\psi(\alpha_2) \dots \alpha_m\psi(\alpha_m) \\ \psi(\beta_1) & \psi(\beta_2) \dots \psi(\beta_n) & \psi(\alpha_1) & \psi(\alpha_2) \dots \psi(\alpha_m) \end{vmatrix}.$$

Da nun

$$\begin{matrix} \varphi(\alpha_1), & \varphi(\alpha_2), & \dots, & \varphi(\alpha_m), \\ \psi(\beta_1), & \psi(\beta_2), & \dots, & \psi(\beta_n) \end{matrix}$$

sämtlich verschwinden, so ist

$$P = \begin{vmatrix} \beta_1^{n-1}\varphi(\beta_1) & \dots & \beta_n^{n-1}\varphi(\beta_n) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(\beta_1) & \dots & \varphi(\beta_n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1^{m-1}\psi(\alpha_1) & \dots & \alpha_m^{m-1}\psi(\alpha_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \psi(\alpha_1) & \dots & \psi(\alpha_m) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1^{n-1}\varphi(\beta_1) & \dots & \beta_n^{n-1}\varphi(\beta_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(\beta_1) & \dots & \varphi(\beta_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1^{m-1}\psi(\alpha_1) & \dots & \alpha_m^{m-1}\psi(\alpha_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi(\alpha_1) & \dots & \psi(\alpha_m) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(\beta_1) \dots \varphi(\beta_n)\psi(\alpha_1) \dots \psi(\alpha_m) \begin{vmatrix} \beta_1^{n-1} & \dots & \beta_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

* Borchardt, Crelle Journal 57 pag. 183. Vorher schon hat Hesse (Tortolini Ann. Bd. 2 1858, pag. 5) den Nachweis auf analoge Weise durch Multiplikation mit der Determinante der Potenzsummen s geführt.

Also

$$60)\quad P=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{2}m(m-1)}\cdot\varphi(\beta_1)\dots\varphi(\beta_n)\cdot\psi(\alpha_1)\dots\psi(\alpha_m)\,\Delta(\beta_1,\dots,\beta_n)\cdot\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_m).$$

Nun ist identisch

$$61)\quad\begin{cases}Q=(-1)^{\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)}\cdot\Delta(\beta_1,\dots,\beta_n,\alpha_1\dots,\alpha_m)=\\ =(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}n(n-1)}\cdot\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\cdot\Delta(\beta_1,\dots,\beta_n)\cdot\dfrac{\varphi(\beta_1)\dots\varphi(\beta_n)}{a_0{}^n},\end{cases}$$

also

$$62)\quad D_0=\frac{P}{Q}=a_0{}^n\psi(\alpha_1)\dots\psi(\alpha_m)=R.$$

Um den Zusammenhang zwischen C_0 und R nachzuweisen, multipliziert man ebenso C_0 zweimal hintereinander mit der Determinante für $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ und erhält, wenn wieder

$$\frac{\varphi(x)\psi(y)-\psi(x)\cdot\varphi(y)}{y-x}=\sum_{i,k}c_{ik}x^{m-k-1}y^{m-i-1}=\Phi(x,y)$$

gesetzt wird

$$63)\quad C_0\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_m)^2=\begin{vmatrix}\Phi(\alpha_1,\alpha_1)&\Phi(\alpha_1,\alpha_2)&\dots&\Phi(\alpha_1,\alpha_m)\\ \Phi(\alpha_2,\alpha_1)&\Phi(\alpha_2,\alpha_2)&\dots&\Phi(\alpha_2,\alpha_m)\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\ \Phi(\alpha_m,\alpha_1)&\Phi(\alpha_m,\alpha_2)&\dots&\Phi(\alpha_m,\alpha_m)\end{vmatrix}.$$

Es ist aber

$$\Phi(\alpha_i,\alpha_k)=0\text{ für }k\gtrless i,$$

$$\Phi(\alpha_i,\alpha_i)=-\psi(\alpha_i)\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{x=\alpha_i}=$$

$$=-a_0\psi(\alpha_i)(\alpha_i-\alpha_1)(\alpha_i-\alpha_2)\dots(\alpha_i-\alpha_{i-1})\cdot(\alpha_i-\alpha_{i+1})\dots(\alpha_i-\alpha_m),$$

daher

$$C_0\cdot\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_m)^2=\Phi(\alpha_1,\alpha_1)\cdot\Phi(\alpha_2,\alpha_2)\dots\Phi(\alpha_m,\alpha_m)=$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}m(m+1)}a_0{}^m\cdot\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_m)^2\cdot\psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)\dots\psi(\alpha_m)$$

und

$$64)\quad\begin{cases}C_0=(-1)^{\frac{1}{2}m(m+1)}\cdot a_0{}^m\cdot\psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)\dots\psi(\alpha_m)=\\ =(-1)^{\frac{1}{2}m(m+1)}\cdot a_0{}^{m-n}\cdot R.\end{cases}$$

§ 6. Eigenschaften der Resultanten.

1. Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die vorgelegten Formen und ist

$$1)\qquad\varphi(x)=\vartheta_1(x)\cdot\vartheta_2(x)\dots,$$

so ist die Resultante von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ das Produkt

$$2)\qquad R=\theta_1\cdot\theta_2\dots,$$

wo θ_1, θ_2, ... bezüglich die Resultanten der Formen

$$\vartheta_1(x), \psi(x); \quad \vartheta_2(x), \psi(x); \quad \ldots$$

bedeuten.

Sind $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ die Wurzeln der Gleichung $\psi(x) = 0$, so kann R bekanntlich in der Form (§ 5, 4)

3) $$R = (-1)^{mn} b_0^m \varphi(\beta_1) \varphi(\beta_2) \ldots \varphi(\beta_n)$$

dargestellt werden. Ersetzt man nun die Funktion $\varphi(\beta_i)$ durch das Produkt

$$\varphi(\beta_i) = \vartheta_1(\beta_i)\, \vartheta_2(\beta_i) \ldots,$$

so erscheint R in der Form

4) $$R = (-1)^{mn} b_0^m \begin{vmatrix} \vartheta_1(\beta_1) & \vartheta_1(\beta_2) & \ldots & \vartheta_1(\beta_n) \\ \vartheta_2(\beta_1) & \vartheta_2(\beta_2) & \ldots & \vartheta_2(\beta_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Nun ist aber, wenn m_i die Ordnung von $\vartheta_i(x)$ ist,

$$(-1)^{m_i n} b_0^{m_i} \vartheta_i(\beta_1)\, \vartheta_i(\beta_2) \ldots \vartheta_i(\beta_n)$$

die Resultante θ_i der Formen ϑ_i, ψ, also, da $\Sigma m_i = m$,

$$R = \theta_1 \theta_2 \ldots$$

2. Die Resultante R der Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0,$$

wo φ von der m^{ten}, ψ von der n^{ten} Ordnung ist, genügt der partiellen Differentialgleichung

5) $$\begin{cases} m a_0 \dfrac{\partial R}{\partial a_1} + (m-1) a_1 \dfrac{\partial R}{\partial a_2} + \ldots + a_{m-1} \dfrac{\partial R}{\partial a_m} + \\ \qquad + n b_0 \dfrac{\partial R}{\partial b_1} + (n-1) b_1 \dfrac{\partial R}{\partial b_2} + \ldots + b_{n-1} \dfrac{\partial R}{\partial b_n} = 0. \end{cases}$$

Beweis. Nach § 5, 3 kann R in der Form geschrieben werden

$$R = a_0^n b_0^m \begin{vmatrix} (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_1) \ldots (\alpha_m - \beta_1) \\ (\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_2) \ldots (\alpha_m - \beta_2) \\ \ldots \\ (\alpha_1 - \beta_n)(\alpha_2 - \beta_n) \ldots (\alpha_m - \beta_n) \end{vmatrix},$$

die sich nicht ändert, wenn man x mit $x' + h$ vertauscht, weil die Konstante h in sämtlichen Differenzen verschwindet. Bezeichnen wir nun die Koefficienten der durch die Substitution $x = x' + h$ transformierten Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bezüglich durch

$$A_0, A_1, \ldots, A_m; \quad B_0, B_1, \ldots, B_n,$$

so bestehen die Identitäten

6)
$$\begin{cases} A_0 = a_0 \\ A_1 = a_1 + m a_0 h \\ A_2 = a_2 + (m-1) a_1 h + \binom{m}{2} a_0 h^2 \\ A_3 = a_3 + (m-2) a_2 h + \binom{m-1}{2} a_1 h^2 + \binom{m}{3} a_0 h^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m = a_m + a_{m-1} h + a_{m-2} h^2 + \ldots + a_0 h^m \\ B_0 = b_0 \\ B_1 = b_1 + n b_0 h \\ B_2 = b_2 + (n-1) b_1 h + \binom{n}{2} b_0 h^2 \\ B_3 = b_3 + (n-2) b_2 h + \binom{n-1}{2} b_1 h^2 + \binom{n}{3} b_0 h^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_n = b_n + b_{n-1} h + b_{n-2} h^2 + \ldots + b_0 h^n. \end{cases}$$

Durch die angegebene Substitution geht die Resultante R, die etwa durch

$$F(a_0, a_1, \ldots, a_m, b_0, b_1, \ldots, b_n)$$

bezeichnet werden möge, über in

$$R' = F(A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_n).$$

Bezeichnen wir nun die Variationen der Koefficienten $a_0, \ldots, a_m$, $b_0, \ldots, b_n$ in 6) bezüglich durch $\delta a_0, \ldots, \delta a_m, \delta b_0, \ldots, \delta b_n$, so ist

$$R' = F(a_0 + \delta a_0, \ldots, a_m + \delta a_m, b_0 + \delta b_0, \ldots, b_n + \delta b_n).$$

Entwickelt man R' nach dem Taylorschen Satz für mehrere Variable, so ergiebt sich die Differentialgleichung 5); denn R' fällt mit R zusammen und alle Koefficienten der verschiedenen Potenzen von h, das ganz beliebig ist, müssen verschwinden, insbesondere der von h^1.

Setzen wir die allgemeine Form der Resultante nach § 5, 4 als gegeben voraus und bezeichnen wir die numerischen Koefficienten der Resultante zunächst unbestimmt durch A, B, C, ..., so verschwindet für diesen Wert von R die Gleichung 5) identisch. Also verschwinden die Koefficienten der einzelnen Glieder und es entsteht ein System von Bedingungsgleichungen, aus dem die Koefficienten A, B, ..., berechnet werden können; z. B. die Resultante von

$$\varphi = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$
$$\psi = b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0$$

lautet in allgemeiner Form

$$R = A(a_0^2 b_2^2 + a_2^2 b_0^2) + B(a_0 a_1 b_1 b_2 + a_1 a_2 b_0 b_1) + C(a_0 a_2 b_1^2 + a_1^2 b_0 b_2) + D \cdot (a_0 a_2 b_0 b_2)$$

und die Gleichung 5) wird

$$2\left(a_0\frac{\partial R}{\partial a_1}+b_0\frac{\partial R}{\partial b_1}\right)+a_1\frac{\partial R}{\partial a_2}+b_1\frac{\partial R}{\partial b_2}=0.$$

Setzt man hierin den Wert für R ein und setzt die Koefficienten der einzelnen Glieder gleich Null, so hat man

$$A+B=0,$$
$$B+C=0,$$
$$2B+4C+D=0.$$

Wählen wir $A=1$, so ist

$$B=-1,\quad C=1,\quad D=-2$$

und R hat die Form

$$R=a_0^2b_2^2+a_2^2b_0^2-a_0a_1b_1b_2-a_1a_2b_0b_1+a_0a_2b_1^2+a_1^2b_0b_2-2a_0a_2b_0b_2=$$
$$=(a_0b_2-a_2b_0)^2-(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-a_2b_1).$$

3. Wenn eine gemeinsame Wurzel der Gleichungen $\varphi=0$, $\psi=0$ durch x bezeichnet wird, so ist

7) $$1:x:x^2:\ldots:x^m=\frac{\partial R}{\partial a_m}:\frac{\partial R}{\partial a_{m-1}}:\frac{\partial R}{\partial a_{m-2}}:\ldots:\frac{\partial R}{\partial a_0},$$

8) $$1:x:x^2:\ldots:x^n=\frac{\partial R}{\partial b_n}:\frac{\partial R}{\partial b_{n-1}}:\frac{\partial R}{\partial b_{n-2}}:\ldots:\frac{\partial R}{\partial b_0}.$$

Beweis. δa_i, δa_k seien solche Variationen von a_i und a_k, dass für die gemeinsame Wurzel x

$$\delta\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}\delta a_i+\frac{\partial\varphi}{\partial a_k}\delta a_k=0$$

d. h.

9) $$x^{m-i}\delta a_i+x^{m-k}\delta a_k=0.$$

$\varphi+\delta\varphi=0$ und $\psi=0$ haben dann noch immer die gemeinsame Wurzel x. Da also auch die Resultante $R+\delta R$ von $\varphi+\delta\varphi$ und ψ verschwindet, so ist

10) $$\delta R=\frac{\partial R}{\partial a_i}\delta a_i+\frac{\partial R}{\partial a_k}\delta a_k=0,$$

woraus unmittelbar mit Rücksicht auf 9) folgt

11) $$\frac{\partial R}{\partial a_i}:\frac{\partial R}{\partial a_k}=x^{m-i}:x^{m-k},$$

was auch gilt, wenn a mit b vertauscht wird. Giebt man i und k alle Werte von 0 bis m resp. n, so folgen 7) und 8). Vorausgesetzt ist aber in diesem Satze 3, dass die Differentialquotienten von R nicht identisch verschwinden, d. h. dass φ und ψ nur eine Wurzel gemeinsam haben.

Anmerkung 1. Aus den Proportionen

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} : \frac{\partial R}{\partial a_k} = x^{m-i} : x^{m-k} = \frac{\partial R}{\partial b_i} : \frac{\partial R}{\partial b_k}$$

folgt

$$12) \qquad \frac{\partial R}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial R}{\partial b_k} - \frac{\partial R}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial R}{\partial b_i} = 0,$$

eine Gleichung, die für $R = 0$ gilt, d. h. die linke Seite von 12) ist durch R teilbar.

Anmerkung 2. Weil $x^i x^k = x^{i+k}$, so ist

$$12a) \qquad \frac{\partial R}{\partial a_m} \cdot \frac{\partial R}{\partial a_{m-i-k}} - \frac{\partial R}{\partial a_{m-k}} \cdot \frac{\partial R}{\partial a_{m-i}} = 0,$$

und die linke Seite ist ebenfalls durch R teilbar; z. B. für $m = 2$

$$\frac{\partial R}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial R}{\partial a_0} - \left(\frac{\partial R}{\partial a_1}\right)^2 = (b_1^2 - 4 b_0 b_2) \cdot R.$$

Anmerkung 3. Ersetzt man in der Gleichung $\psi = 0$ die Potenzen von x durch die ihnen proportionalen Ableitungen von R nach den Koefficienten a_i, so ist

$$13) \quad b_0 \frac{\partial R}{\partial a_{m-n}} + b_1 \frac{\partial R}{\partial a_{m-n+1}} + b_2 \frac{\partial R}{\partial a_{m-n+2}} + \ldots + b_n \frac{\partial R}{\partial a_m} = 0,$$

giltig für $R = 0$. Aber die linke Seite ist durch R nicht teilbar, denn sie ist bezüglich der a_i nur vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad, sie muss also identisch verschwinden. Für $m = n$ hat man so die beiden Gleichungen

$$14) \qquad a_0 \frac{\partial R}{\partial b_0} + a_1 \frac{\partial R}{\partial b_1} + \ldots + a_m \frac{\partial R}{\partial b_m} = 0,$$

$$15) \qquad b_0 \frac{\partial R}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial R}{\partial a_1} + \ldots + b_m \frac{\partial R}{\partial a_m} = 0,$$

die identisch erfüllt sind, unabhängig davon, ob $R = 0$ oder nicht.

4. Haben die Gleichungen

$$\varphi(x, y) = 0,$$
$$\psi(x, y) = 0,$$

wo φ von der m^{ten}, ψ von der n^{ten} Ordnung ist, eine gemeinsame Lösung, so genügt dieselbe auch der Gleichung

$$16) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

denn man hat für die homogenen Formen die Gleichungen

$$17) \qquad \begin{cases} x \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + y \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = m\varphi = 0, \\ x \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + y \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = n\psi = 0. \end{cases}$$

Nun verschwinden φ und ψ für solche Werte von x, y, die nicht beide Null sind, also verschwindet für dieselben Werte die Determinante

18) $$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante heisst die Funktionaldeterminante oder die Jacobische Determinante der gegebenen binären Formen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$. Sie soll mit J bezeichnet werden.*

5. Sind die binären Formen

$$\varphi(x, y), \quad \psi(x, y)$$

beide von der m^{ten} Ordnung, und ist x, y eine gemeinsame Lösung der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, so verschwinden für diese Lösung die ersten Ableitungen nach x und y der Jacobischen Determinante der gegebenen Formen:

19) $$\frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial y} = 0.$$

Beweis. Aus den Gleichungen

$$m\varphi = x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$m\psi = x\frac{\partial \psi}{\partial x} + y\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

folgt

20) $$\begin{cases} xJ = m\left(\varphi\frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \\ yJ = m\left(-\varphi\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Bildet man nun die Ableitungen von xJ, yJ nach x und y, so kommt

21) $$\begin{cases} x\frac{\partial J}{\partial x} = (m-1)J + m\left(\varphi\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} - \psi\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\right) \\ x\frac{\partial J}{\partial y} = m\left(\varphi\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \psi\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) \\ y\frac{\partial J}{\partial x} = m\left(-\varphi\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \psi\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) \\ y\frac{\partial J}{\partial y} = (m-1)J + m\left(-\varphi\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} + \psi\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\right). \end{cases}$$

Für $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $J = 0$ ergiebt sich dann unmittelbar

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial y} = 0.$$

* „Jacobian“ nach Cayley. Crelle Journal 52, pag. 276.

Anwendung. Für $m=3$ sind $\frac{\partial J}{\partial x}$, $\frac{\partial J}{\partial y}$ ebenfalls von der dritten Ordnung. Daher kann die Resultante der kubischen Formen aus $\varphi=0$, $\psi=0$, $\frac{\partial J}{\partial x}=0$, $\frac{\partial J}{\partial y}=0$ in der Form berechnet werden

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 2a_0b_1-2a_1b_0 & 3a_0b_2-3a_2b_0 & a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1-a_3b_0 & a_1b_3-a_3b_1 \\ a_0b_2-a_2b_0 & a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1-a_3b_0 & 3a_1b_3-3a_3b_1 & 2a_2b_3-2a_3b_2 \end{vmatrix}.$$

6. Sind die binären Formen $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ bezüglich von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung $(m>n)$ und ist x, y eine gemeinsame Lösung der Gleichungen $\varphi=0$, $\psi=0$, so ist für diese Lösung

$$22)\qquad \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial x}:\frac{\partial J}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}:\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial J}{\partial x}:\frac{\partial J}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial x}:\frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{cases}$$

Beweis. Aus 17) folgt

$$23)\qquad \begin{cases} xJ=m\varphi\frac{\partial \psi}{\partial y}-n\psi\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -yJ=m\varphi\frac{\partial \psi}{\partial x}-n\psi\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{cases}$$

und durch Differentiation nach x und y

$$\begin{aligned} x\frac{\partial J}{\partial x}+J &= m\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}-n\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}+m\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-n\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \\ x\frac{\partial J}{\partial y} &= (m-n)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}+m\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-n\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \\ -y\frac{\partial J}{\partial x} &= (m-n)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}+m\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-n\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \\ -y\frac{\partial J}{\partial y}-J &= m\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}-n\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}+m\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-n\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \end{aligned}$$

woraus für $\varphi=0$, $\psi=0$, $J=0$ das folgende System sich ergiebt:

$$24)\qquad \begin{cases} x\frac{\partial J}{\partial x}=(m-n)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ x\frac{\partial J}{\partial y}=(m-n)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -y\frac{\partial J}{\partial x}=(m-n)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ -y\frac{\partial J}{\partial y}=(m-n)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{cases}$$

Daraus folgen die behaupteten Proportionen.

7. Transformiert man die binären Formen

$$\varphi(x, y), \quad \psi(x, y)$$

durch die lineare Substitution

$$25) \qquad \begin{cases} x = pu + qv \\ y = p'u + q'v \end{cases}$$

in Funktionen der Variabeln u, v, so ist die Resultante der transformierten Formen gleich der Resultante der gegebenen Formen, multipliziert mit

$$(pq' - p'q)^{mn}.$$

Beweis. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ bezüglich die Wurzeln der Gleichungen

$$\varphi = 0,$$
$$\psi = 0,$$

so können die beiden Formen als Produkte geschrieben werden (§ 5, 1), nämlich

$$26) \qquad \begin{cases} \varphi = a_0 (x - \alpha_1 y) \ldots (x - \alpha_m y) \\ \psi = b_0 (x - \beta_1 y) \ldots (x - \beta_n y). \end{cases}$$

Nun gehen die Faktoren

$$x - \alpha_i y, \quad x - \beta_j y$$

durch die Substitution 25) bezüglich über in

$$(p - \alpha_i p')\left(u - \frac{q'\alpha_i - q}{p - \alpha_i p'} \cdot v\right), \quad (p - \beta_j p')\left(u - \frac{q'\beta_j - q}{p - \beta_j p'} v\right)$$

und φ und ψ folglich in

$$27) \qquad \begin{cases} \Phi = a_0 \varphi(p, p') \left(u - \dfrac{q'\alpha_1 - q}{p - \alpha_1 p'} v\right) \ldots \left(u - \dfrac{q'\alpha_m - q}{p - \alpha_m p'} v\right), \\ \Psi = b_0 \psi(p, p') \left(u - \dfrac{q'\beta_1 - q}{p - \beta_1 p'} v\right) \ldots \left(u - \dfrac{q'\beta_n - q}{p - \beta_n p'} v\right). \end{cases}$$

Nach § 5, 3 ist aber die Resultante R von φ und ψ das Produkt von $a_0^n b_0^m$ mit allen Differenzen der Wurzeln α und β von $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Durch die angegebene Substitution geht nun die Differenz

$$\alpha_i - \beta_j$$

über in

$$\frac{q'\alpha_i - q}{p - \alpha_i p'} - \frac{q'\beta_j - q}{p - \beta_j p'} = \frac{pq' - p'q}{(p - \alpha_i p')(p - \beta_j p')} (\alpha_i - \beta_j).$$

Da bei der Transformation

$$a_0 \text{ in } a_0 \cdot \varphi(p, p')$$
$$b_0 \text{ in } b_0 \cdot \psi(p, p')$$

übergeht, so hebt sich in der transformierten Resultante der Nenner weg und R geht über in

28) $$R' = (pq' - p'q)^{mn} . R.$$

Anmerkung. Transformiert man die nicht homogenen Formen

$$\varphi(x), \quad \psi(x)$$

durch die Substitution

$$x = \frac{pz + q}{p'z + q'},$$

und bildet die Resultante der transformierten Formen, so wird dieselbe ebenfalls gleich der Resultante von φ und ψ, multipliziert mit der mn^{ten} Potenz der Substitutionsdeterminante $pq' - p'q$.

8. Wenn man an Stelle der binären Formen m^{ter} Ordnung

$$\varphi(x, y), \quad \psi(x, y)$$

die linearen Funktionen derselben

$$\Phi = p\varphi + q\psi,$$
$$\Psi = p'\varphi + q'\psi,$$

einführt, so ist die Resultante von Φ und Ψ von der Resultante der Formen φ und ψ nur um einen Faktor, der eine Potenz der Substitutionsdeterminante $pq' - p'q$ ist, verschieden.

Denn in der m-reihigen Determinante, wie sie die Bézoutsche Methode liefert, erhält unter obiger Voraussetzung jedes Element den Faktor $pq' - p'q$, die Resultante also den Faktor $(pq' - p'q)^m$.

Anmerkung. Hat man

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \psi = \frac{\partial f}{\partial y},$$

wo

29) $$f = a_0 x^\mu + \mu a_1 x^{\mu-1} y + \binom{\mu}{2} a_2 x^{\mu-2} y^2 + \ldots + a_\mu y^\mu,$$

so hängt die Resultante von φ und ψ von den Koefficienten von f ab. Transformiert man nun f durch die lineare Substitution

$$x = pX + qY$$
$$y = p'X + q'Y$$

in $F(X, Y)$, so ist die Resultante von $\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}$ gleich der Resultante von $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ d. h. gleich der Resultante von φ, ψ, multipliziert mit

$$(pq' - p'q)^{\mu(\mu-1)}.$$

Denn man hat

$$30) \qquad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial X} = p\frac{\partial f}{\partial x} + p'\frac{\partial f}{\partial y} = p\varphi + p'\psi \\ \frac{\partial F}{\partial Y} = q\frac{\partial f}{\partial x} + q'\frac{\partial f}{\partial y} = q\varphi + q'\psi, \end{cases}$$

wodurch mit Rücksicht auf die Sätze 7 und 8 die Behauptung bewiesen ist.

Also giebt es für jede binäre Form eine gewisse Funktion der Koefficienten, die bei einer linearen Transformation der Variabeln der Form sich nur um einen von den Substitutionskonstanten abhängigen, von den Koefficienten der Form aber unabhängigen Faktor ändert. Diese Funktion ist im vorliegenden Falle, wie man leicht sieht, das Produkt der Quadrate aller Differenzen der Wurzeln von $f = 0$.*

Cayley hat gezeigt, dass jeder binären Form eine unendliche Mannigfaltigkeit derartiger Funktionen zugehört, unter denen jedoch nur $\mu - 2$ von einander unabhängig sind. Für $\mu = 2, 3, 4, 5$ sind diese Funktionen unter der Bezeichnung Invarianten in den Tabellen am Schlusse dieses Werkes enthalten.

9. Transformiert man die binären Formen

$$\varphi(x, y), \quad \psi(x, y)$$

durch die Substitution

$$31) \qquad x = f(u, v), \quad y = g(u, v),$$

wo f, g beliebige binäre Formen von u, v, aber von gleicher Ordnung q bedeuten, in

$$\Phi(u, v), \quad \Psi(u, v),$$

so ist die Resultante von Φ, Ψ gleich einer Potenz der Resultante von φ, ψ, multipliziert mit einer Potenz der Resultante von f, g.

Beweis. Setzt man wieder

$$\varphi = a_0(x - \alpha_1 y)\dots(x - \alpha_m y)$$
$$\psi = b_0(x - \beta_1 y)\dots(x - \beta_n y)$$

und transformiert, so sind Φ, Ψ durch Produkte darstellbar, nämlich:

$$32) \qquad \Phi = a_0 \Pi(f - \alpha_i g), \quad \Psi = b_0 \Pi(f - \beta_j g).$$

Offenbar haben Φ und Ψ eine gemeinsame Wurzel, sobald die Gleichungen

$$f - \alpha_i g = 0, \quad f - \beta_j g = 0$$

eine gemeinsame Lösung haben, d. h. sobald die Resultante derselben

* Vergleiche den folgenden Paragraphen.

verschwindet. Die Resultante von $f-\alpha_i g$, $f-\beta_j g$ ist aber nach dem Vorhergehenden gleich der Resultante von f, g, multipliziert mit einer Potenz von $(\alpha_i-\beta_j)$, ist also von der Form

$$(\alpha_i-\beta_j)^q Q,$$

wo Q die Resultante von f, g, q die Ordnung dieser Formen bedeutet. Jeder Faktor der Produkte (32) liefert aber einen Ausdruck $(\alpha_i-\beta_j)^q Q$, dessen Verschwinden anzeigt, dass Φ und Ψ eine gemeinsame Lösung haben, also ist die eigentliche Resultante von Φ und Ψ von der Form

$$Q^{mn}.R^q,$$

wo R die Resultante von φ, ψ, Q die Resultante von f, g bedeuten.

Beispiel. Man transformiere die binären Formen

$$\varphi = a_0x^2+a_1xy+a_2y^2$$
$$\psi = b_0x^2+b_1xy+b_2y^2$$

durch die Substitution

$$x = p_0u^2+p_1uv+p_2v^2$$
$$y = q_0u^2+q_1uv+q_2v^2$$

in

$$\Phi(u,v), \quad \Psi(u,v),$$

dann ist die Resultante von Φ, Ψ:

$$[(a_0b_2-a_2b_0)^2-(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-a_2b_1)]^2.[(p_0q_2-p_2q_0)^2-(p_0q_1-p_1q_0)(p_1q_2-p_2q_1)]^4.$$

Anmerkung. Setzt man wieder

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \psi = \frac{\partial f}{\partial y},$$

wo f eine binäre Form bedeutet, so ist die Resultante von $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ eine Funktion der Koefficienten von f.

Ersetzt man nun in f x, y durch beliebige zwei Formen gleicher Ordnung von u, v, wodurch f in F übergehe, so geht dabei eine gewisse Potenz jener Funktion bis auf einen Faktor in die entsprechende Funktion von F über, z. B. für

$$f = a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3$$

die Resultante von $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$(a_0a_3-a_1a_2)^2-4(a_0a_2-a_1^2)(a_1a_3-a_2^2).$$

§ 7. Diskriminanten.

1. Sei f eine binäre Form m^{ter} Ordnung von x, y (deren Koefficienten mit den Binomialfaktoren

$$1) \qquad \binom{m}{i} = \frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{1.2\dots i}$$

angeschrieben seien) und bezeichnen φ und ψ die durch m dividierten Ableitungen von f nach x und y:

$$2) \begin{cases} f = a_0 x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \binom{m}{2} a_2 x^{m-2} y^2 + \dots + \binom{m}{1} a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m \\ \varphi = \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x} = a_0 x^{m-1} + \binom{m-1}{1} a_1 x^{m-2} y + \binom{m-1}{2} a_2 x^{m-3} y^2 + \dots + a_{m-1} y^{m-1} \\ \psi = \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y} = a_1 x^{m-1} + \binom{m-1}{1} a_2 x^{m-2} y + \binom{m-1}{2} a_3 x^{m-3} y^2 + \dots + a_m y^{m-1}, \end{cases}$$

so heisst die Resultante von $\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y}$, d. h. die Resultante von φ und ψ die Diskriminante der Form f. Sie soll durch $\Delta(f)$ bezeichnet werden.* Zunächst gelten folgende Sätze:

a) Die Diskriminante $\Delta(f)$ ist eine homogene ganze Funktion der Koefficienten a_0, a_1, ..., a_m $(2m-2)^{\text{ten}}$ Grades. Denn die Formen φ und ψ sind $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, ihre Resultante also vom Grade $m-1+m-1=2m-2$ in Bezug auf die Koefficienten a_0, ..., a_m, die in beiden Formen enthalten sind.

b) Die Diskriminante ist vom Gewicht $m(m-1)$. Denn das Gewicht ist, die Gewichte analoger Koefficienten von φ und ψ als gleich betrachtet, das Produkt der beiden Ordnungen, also gleich $(m-1)(m-1)$. Da aber die Indices von ψ um 1 höher sind als die von φ, so ist das Gewicht $(m-1)(m-1)+m-1=m(m-1)$.

2. Die Diskriminante von f, d. h. die Resultante von φ und ψ ist auch gleich der Resultante von φ und f, geteilt durch a_0, und ferner gleich der Resultante von f und ψ, geteilt durch a_m, also

$$3) \qquad \Delta(f) = R(\varphi, \psi) = \frac{1}{a_0} R(\varphi, f) = \frac{1}{a_m} R(f, \psi).$$

---

* Der Name „Diskriminante" rührt von Sylvester her, Philos. Magaz. 1851, „Extension of the dialytic method of elimination". Von Gauss war der Name „Determinante der Funktion f" gebraucht worden. Werke 3. Bd. pag. 38.

Beweis. Die binäre Form f erfüllt die Identität

$$mf = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y} y,$$

oder

$$4) \qquad f = x \,.\, \varphi + y \,.\, \psi,$$

also ist

$$5) \qquad R(\varphi, f) = R(\varphi, y \,.\, \psi) = R(\varphi, \psi) \,.\, R(\varphi, y).$$

Nun ist

$$6) \qquad \begin{cases} R(\varphi, \psi) = \Delta(f) \\ R(\varphi, y) = a_0, \end{cases}$$

also hat man

$$\Delta(f) = \frac{1}{a_0} R(\varphi, f).$$

Ebenso findet man

$$7) \qquad R(f, \psi) = R(x\varphi, \psi) = R(\varphi, \psi) \,.\, R(x, \psi).$$

Nun ist wieder

$$8) \qquad \begin{cases} R(\varphi, \psi) = \Delta(f) \\ R(x, \psi) = a_m, \end{cases}$$

also

$$\Delta(f) = \frac{1}{a_m} R(f, \psi).$$

Anmerkung. Bildet man die Resultante von f und φ nach der dialytischen Methode von Sylvester, so ist die erste Kolonne der Determinante D_0 durch a_0 teilbar. Der Faktor von a_0 ist dann die Diskriminante von f; z. B. sei

$$f = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2,$$

so ist

$$\varphi = a_0 x + a_1 y,$$

und die Resultante von f und φ hat die Form

$$R(f, \varphi) = R(\varphi, f) = \begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} 1 & 2a_1 & a_2 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_0 \,.\, R(a_0 x + a_1 y, a_1 x + a_2 y) = a_0 R(\varphi, \psi) = a_0 \Delta(f).$$

3. Setzt man in $f(x, y)$ $y = 1$ und bezeichnet die Wurzeln von $f = 0$ durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, so kann die Diskriminante $\Delta(f)$ durch das Produkt der Quadrate aller Wurzeldifferenzen von $f = 0$ dargestellt werden, nämlich

$$9) \qquad \Delta(f) = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} \cdot \frac{1}{m^m} a_0^{2m-2} \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^2,$$

wo $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ das Produkt aller Wurzeldifferenzen bedeutet (vergl. §§ 3 und 4).

Das Verschwinden der Diskriminante sagt also aus, dass $f = 0$ eine mehrfache Wurzel besitzt.

Beweis. $a_0 . \Delta(f)$ ist nach Nr. 2 gleich der Resultante von f und φ, also nach § 5, 4

$$10) \qquad R(f, \varphi) = a_0 \Delta(f) = \frac{a_0^{m-1}}{m^m} f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \dots f'(\alpha_m).$$

Nun ist aber

$$11) \qquad \begin{aligned} f'(\alpha_1) &= a_0 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \dots (\alpha_1 - \alpha_m) \\ f'(\alpha_2) &= a_0 (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3) \dots (\alpha_2 - \alpha_m) \\ f'(\alpha_3) &= a_0 (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2) \dots (\alpha_3 - \alpha_m) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

mithin

$$12) \quad a_0 \Delta(f) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{m^m} \cdot a_0^{2m-1} . (\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2 \dots (\alpha_m - \alpha_{m-1})^2 =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{m^m} \cdot a_0^{2m-1} . \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^2,$$

also schliesslich

$$13) \qquad \Delta(f) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{m^m} . a_0^{2m-2} . \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^2.$$

Anmerkung. Nach § 4, 2 kann die Diskriminante $\Delta(f)$ durch die Potenzsummen der Wurzeln s_i dargestellt werden, nämlich in der Form

$$14) \quad \Delta(f) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{m^m} a_0^{2m-2} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m-1} & s_m & \dots & s_{2m-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{m^m} \cdot a_0^{2m-2} . S_m.$$

4. Nach den Entwicklungen des § 5 kann man nun verschiedene Ausdrücke für die Diskriminante $\Delta(f)$ anschreiben. Man hat z. B. nur die Determinante D_0 für $\varphi = \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial x}$, $\psi = \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial y}$ zu nehmen und hat dann

$$15) \quad \Delta(f) = \begin{vmatrix} a_0 \binom{m-1}{1} a_1 \binom{m-1}{2} a_2 \dots . & a_{m-1} & & \\ a_0 \binom{m-1}{1} a_1 \dots . \binom{m-1}{1} a_{m-2} & a_{m-1} & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a_0 \binom{m-1}{1} a_1 & \dots & a_{m-1} & \\ a_1 \binom{m-1}{1} a_2 \binom{m-1}{2} a_3 \dots . & a_m & & \\ a_1 \binom{m-1}{1} a_2 \dots . \binom{m-1}{1} a_{m-1} & a_m & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a_1 \binom{m-1}{1} a_2 & \dots & a_m & \end{vmatrix}$$

eine aus $2m-2$ Reihen bestehende Determinante.

Auch der grösste gemeinsame Faktor von φ und ψ ergiebt sich nach § 5, 9, Formel 31) und 32).

Sei derselbe eine Funktion ϱ^{ter} Ordnung. Die Bedingungen dazu sind, dass alle $2(m-1)-(\varrho-1)=(2m-\varrho-1)$-zeiligen Unterdeterminanten von $\Delta(f)$ verschwinden, aber nicht alle $(2m-\varrho-2)$-zeiligen, Bedingungen, die sich nach § 5 auch noch anders ausdrücken liessen.

Dieser grösste gemeinsame Faktor sei

$$16) \qquad f_1 = b_0 x^\varrho + \binom{\varrho}{1} b_1 x^{\varrho-1} y + \binom{\varrho}{2} b_2 x^{\varrho-2} y^2 + \ldots + b_\varrho y^\varrho.$$

Die linearen Faktoren desselben kann man in ein Produkt ordnen, nämlich

$$17) \qquad f_1 = t_1^{p_1} t_2^{p_2} \ldots t_\mu^{p_\mu},$$

wo die t_i von einander verschiedene, ganze homogene Funktionen von x, y sind, ferner $p_1 < p_2 < \ldots < p_\mu$ ist und ein t_i aus lauter verschiedenen linearen Faktoren besteht, so dass also die Diskriminante keines der t_i verschwindet.

Alle diese Funktionen $t_i^{p_i}$ sind auch Faktoren von f und zwar t_i, das in f_1 auf der p_i^{ten} Potenz vorkommt, ist in f auf der $(p_i+1)^{\text{ten}}$ Potenz enthalten. Denn sei*

$$18) \qquad f = t_i^{p_i} . u,$$

so wird

$$19) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = t_i^{p_i} \frac{\partial u}{\partial x} + p_i t_i^{p_i-1} \frac{\partial t_i}{\partial x} \cdot u = t_i^{p_i} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + p_i \frac{\frac{\partial t_i}{\partial x} \cdot u}{t_i} \right\}.$$

Da nun die Diskriminante von t_i nicht verschwindet, so haben t_i und $\frac{\partial t_i}{\partial x}$ keinen gemeinsamen Divisor und u muss durch t_i teilbar sein.

Die verschiedenen Faktoren $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ von f_1 müssen sich ebenfalls in rationaler Weise bestimmen lassen. Zu dem Zwecke kann man entweder die μ^{ten} Differentialquotienten von f benutzen, die einen $(\mu+1)$-fachen Faktor von f enthalten müssen, oder man kann, wie die Diskriminante von f, so weiter die Diskriminante von f_1 aufstellen und den grössten gemeinsamen Faktor f_2 von $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ aufsuchen. Dieser Faktor f_2 besteht aus denjenigen Faktoren von f_1, welche nicht linear in f_1 vorkommen, nämlich

$$20) \qquad f_2 = t_1^{p_1-1} t_2^{p_2-1} \ldots t_\mu^{p_\mu-1}.$$

* Baltzer, Determ. § 11, 20.

Ebenso kann man weiter den grössten gemeinsamen Faktor f_3 von $\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$ suchen, welcher nur noch die Faktoren von f_1 enthalten wird, welche in f_1 in höherer als der zweiten Potenz vorkommen u. s. w. So kommt man zuletzt auf denjenigen Faktor t_μ allein, welcher in f_1 auf der höchsten, nämlich der p_μ^{ten} Potenz vorkommt, und dann rückwärts auf die Faktoren $t_{\mu-1}$, $t_{\mu-2}$, ..., die sämtlich ganze rationale Funktionen der Koefficienten von f sind.

Fasst man zusammen, so folgt:

Wenn die Diskriminante von f nicht verschwindet, so haben φ und ψ keinen gemeinsamen Faktor und die Wurzeln der Gleichung $f=0$ sind alle von einander verschieden.

Verschwindet die Diskriminante von f, so haben φ und ψ einen gemeinsamen Faktor f_1 und die Wurzeln der Gleichung $f=0$ sind nicht alle von einander verschieden. Bezüglich der Ordnung dieses gemeinsamen Faktors f_1 gelten die Betrachtungen des § 5. Jede μ-fache Wurzel von $f_1=0$ ist $(\mu+1)$-fache Wurzel von $f=0$. Um den Grad der Vielfachheit einer solchen Wurzel zu erkennen, hat man auf f_1 dieselbe Betrachtung anzuwenden, wie vorher auf f u. s. w.

5. Die Diskriminante des Produktes zweier binärer Formen ist bis auf einen Zahlenfaktor das Produkt der Diskriminanten der einzelnen Formen, multipliziert mit dem Quadrat ihrer Resultante.

Denn stellt man die Diskriminante des Produktes als das Produkt der Quadrate aller Wurzeldifferenzen dar, so lässt sich dieses Differenzenprodukt leicht in der angegebenen Weise zerlegen.

Anmerkungen. a) Die Diskriminante von

21) $$(x-\alpha)f(x)$$

ist gleich

22) $\frac{m^m}{(m+1)^{m+1}}$ mal Diskriminante von $f(x)$ mal $f(\alpha)^2$.

Ist $\alpha=0$, so ist $f(0)=a_m$ und die Diskriminante von $xf(x)$ $=\frac{m^m}{(m+1)^{m+1}}a_m^2 . \Delta(f)$, wo $\Delta(f)$ die Diskriminante von $f(x)$ bedeutet.

b) Die Diskriminante von f ist von der Form

23) $$\Delta(f)=a_m\theta+\frac{(m-1)^{m-1}}{m^{m-2}}.a_{m-1}^2\Gamma,$$

wo Γ die Diskriminante von

24) $$\frac{1}{x}(f-a_m y^m)=a_0x^{m-1}+\binom{m}{1}a_1x^{m-2}y+\ldots+\binom{m}{1}a_{m-1}y^{m-1}$$

bedeutet. Denn setzt man in $\Delta(f)$ $a_m = 0$, so erhält man offenbar dasselbe Resultat, als wenn man in der vorgelegten Form f $a_m = 0$ gesetzt hätte. In diesem Falle würde die Form übergehen in

$$25) \quad x\left\{a_0 x^{m-1} + \binom{m}{1} a_1 x^{m-2} y + \ldots + \binom{m}{1} a_{m-1} y^{m-1}\right\}$$

und die Diskriminante dieses Produktes wird

$$26) \quad \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m} . m^2 . a_{m-1}^2 \Gamma.$$

Offenbar stellt also $\frac{(m-1)^{m-1}}{m^{m-2}} a_{m-1}^2 \Gamma$ den von a_m unabhängigen Teil der Diskriminante $\Delta(f)$ bis aufs Vorzeichen dar.

c) Vertauscht man in f x mit y, d. h. vertauscht man die symmetrisch gelegenen Koefficienten a_0 und a_m, a_1 und a_{m-1} u. s. w., so ist die Diskriminante von der Form

$$27) \quad \Delta(f) = a_0 \theta' + \frac{(m-1)^{m-1}}{m^{m-2}} a_1^2 \Gamma',$$

wo Γ' die Diskriminante der Form

$$28) \quad a_m x^{m-1} + \binom{m}{1} a_{m-1} x^{m-2} y + \ldots + \binom{m}{1} a_1 y^{m-1}$$

bedeutet.

d) Beispiel. Die Diskriminante $\Delta(f)$ der kubischen Form

$$f = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3$$

ist

$$\Delta(f) = (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) =$$
$$= a_3(4a_1^3 + a_0^2 a_3 - 6a_0 a_1 a_2) + a_2^2(4a_0 a_2 - 3a_1^2)$$

Hier ist also

$$\theta = 4a_1^3 + a_0^2 a_3 - 6a_0 a_1 a_2$$

und die Diskriminante Γ von

$$a_0 x^2 + 3a_1 x y + 3a_2 y^2$$

wird

$$\Gamma = \tfrac{3}{4}(4a_0 a_2 - 3a_1^2).$$

Also erscheint $\Delta(f)$ in der Form

$$\Delta(f) = a_3 \theta + \tfrac{4}{3} a_2^2 \Gamma,$$

wo Γ die angegebene Bedeutung hat.

6. Beispiel. Die Diskriminante einer Form m^{ter} Ordnung, die vom Grade $2m-2$, vom Gewichte $m(m-1)$ ist, hat als Funktion der Koefficienten offenbar die Form

$$29) \quad A(a_0^{m-1} a_m^{m-1} + \ldots),$$

wo A nach 15) den Wert 1 hat. Diesen Zahlenfaktor könnte man auch an einer speziellen Annahme für f so bestimmen:

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die m^{ten} Wurzeln von 1, d. h. die Wurzeln der Gleichung

30) $$f(x) = x^m - 1 = 0,$$

so ist die Diskriminante von f hier (9):

31) $$\Delta(f) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{m^m} \cdot \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2 = (-1)^{m-1} A,$$

weil

$$a_0^{m-1} a_m^{m-1} + \ldots = (-1)^{m-1}.$$

Nun ist aber

32) $$a_0^m \cdot \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2 = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \ldots f'(\alpha_m),$$

was für unseren Fall übergeht in

33) $$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2 = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} (m\alpha_1^{m-1}) \ldots (m\alpha_m^{m-1}) =$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} \cdot m^m (\alpha_1 \ldots \alpha_m)^{m-1}.$$

Da aber

$$\alpha_1 \ldots \alpha_m = (-1)^{m-1},$$

so kommt schliesslich

34) $$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2 = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} (-1)^{(m-1)(m-1)} m^m$$

und man hat

$$A = 1.$$

7. Bezeichnet man durch α eine doppelte Wurzel von $f = 0$, so hat man

$$\alpha^m : \alpha^{m-1} : \alpha^{m-2} : \ldots = \frac{\partial \Delta(f)}{\partial a_0} : \frac{1}{\binom{m}{1}} \frac{\partial \Delta(f)}{\partial a_1} : \frac{1}{\binom{m}{2}} \frac{\partial \Delta(f)}{\partial a_2} : \ldots,$$

wo $\Delta(f)$ die Diskriminante von f bedeutet.

Beweis. Man variiere* die beiden Koefficienten a_i und a_k von f so, dass die Doppelwurzel α von f auch Wurzel von $f + \lambda \delta f = 0$ bleibe, um $\lambda \delta a_i$, $\lambda \delta a_k$, also

$$\delta f = \binom{m}{i} \delta a_i \cdot \alpha^{m-i} + \binom{m}{k} \delta a_k \cdot \alpha^{m-k} = 0.$$

Die Diskriminante $\Delta(f + \lambda \delta f)$,

$$\Delta(f + \lambda \delta f) = \lambda \left\{ \frac{\partial \Delta(f)}{\partial a_i} \delta a_i + \frac{\partial \Delta(f)}{\partial a_k} \delta a_k \right\} + \lambda^2 \{ \ldots \} + \ldots$$

muss aber durch λ^2 teilbar sein; denn da

$$f + \lambda \delta f = (x - \alpha)[F(x) + \lambda \Phi(x)], \text{ wo } F(\alpha) = 0,$$

so enthält $\Delta(f + \lambda \delta f)$ nach 22)

* Salmon, Vorlesungen zur Einführung u. s. w. pag. 118.

$$[F(\alpha)+\lambda\Phi(\alpha)]^2=\lambda^2\Phi(\alpha)^2$$

zum Faktor. Also hat man

$$\frac{\partial\Delta(f)}{\partial a_i}\delta a_i+\frac{\partial\Delta(f)}{\partial a_k}\delta a_k=0,$$

daher

$$-\delta a_i:\delta a_k=\frac{\partial\Delta(f)}{\partial a_k}:\frac{\partial\Delta(f)}{\partial a_i}=\binom{m}{k}\alpha^{m-k}:\binom{m}{i}\alpha^{m-i}.$$

Dritter Abschnitt.

Kanonische Formen.

§ 8. Der kanonische Ausdruck von Formen ungerader Ordnung.

1. Eine binäre Form $(2m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

1). $$a_0x^{2m-1}+\binom{2m-1}{1}a_1x^{2m-2}y+\ldots+a_{2m-1}y^{2m-1}$$

kann im allgemeinen auf die „kanonische Form“

2) $$b_1(x+\alpha_1y)^{2m-1}+b_2(x+\alpha_2y)^{2m-1}+\ldots+b_m(x+\alpha_my)^{2m-1}$$

durch Lösung einer Gleichung m^{ten} Grades gebracht werden.*

Beweis. Zur Identität von 1) und 2) sind die $2m$ Bedingungen erforderlich

3) $$\begin{cases} a_0 = b_1 + \ldots + b_m \\ a_1 = b_1\alpha_1 + \ldots + b_m\alpha_m \\ a_2 = b_1\alpha_1^2 + \ldots + b_m\alpha_m^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{2m-1} = b_1\alpha_1^{2m-1} + \ldots + b_m\alpha_m^{2m-1}, \end{cases}$$

woraus die $2m$ Unbekannten $b_1, \ldots, b_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ berechnet werden können.

Aus den m ersten Gleichungen folgt

4) $$b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{m-1} \\ 1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_2^{m-1} \\ 1 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_3^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_m & \ldots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix},$$

wo

5) $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{m-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha^2{}_m & \ldots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix} = \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m).$$

* Sylvester, Philos. Magazine 1851.

Lässt man die erste Gleichung in 3) weg, so folgt aus den m ersten Gleichungen des so reduzierten Systems

$$6) \qquad \Delta b_1 \alpha_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{m-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

u. s. w.

Bezeichnet man die Unterdeterminanten nach den Elementen der ersten Zeile in Δ (5) durch

$$A_0, A_1, \dots, A_{m-1},$$

so ist

$$7) \qquad \Delta = A_0 \cdot 1 + A_1 \alpha_1 + \dots + A_{m-1} \alpha_1^{m-1}$$

und man findet das System von $m+1$ Gleichungen:

$$8) \quad \begin{cases} \Delta b_1 = A_0 a_0 + A_1 a_1 + \dots + A_{m-1} a_{m-1} \\ \Delta b_1 \alpha_1 = A_0 a_1 + A_1 a_2 + \dots + A_{m-1} a_m \\ \Delta b_1 \alpha_1^2 = A_0 a_2 + A_1 a_3 + \dots + A_{m-1} a_{m+1} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta b_1 \alpha_1^m = A_0 a_m + A_1 a_{m+1} + \dots + A_{m-1} a_{2m-1}. \end{cases}$$

Eliminiert man aus diesem System die m Grössen

$$\frac{A_0}{\Delta b_1}, \quad \frac{A_1}{\Delta b_1}, \quad \dots, \quad \frac{A_{m-1}}{\Delta b_1},$$

so ergiebt sich als Resultat das Verschwinden der Determinante

$$9) \qquad K = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{m-1} & 1 \\ a_1 & \dots & a_m & \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & \dots & a_{2m-1} & \alpha_1^m \end{vmatrix} = 0.$$

Die m Wurzeln dieser Gleichung sind die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Zur Bestimmung der Grössen $b_1, b_2, \dots, b_m$ benutzt man die m ersten Gleichungen des Systems 3).

2. Der kanonische Ausdruck einer kubischen Form.

Die kubische Form

$$10) \qquad a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3$$

kann auf die kanonische Form

$$11) \qquad b_1 (x + \alpha_1 y)^3 + b_2 (x + \alpha_2 y)^3$$

durch Lösung der Gleichungen

$$12) \qquad K = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \alpha \\ a_2 & a_3 & \alpha^2 \end{vmatrix} = 0,$$

13) $$\begin{cases} b_1 + b_2 = a_0 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 = a_1 \end{cases}$$

gebracht werden.

Die kanonische Form der kubischen Formen führt zu einer bemerkenswerten Lösung der kubischen Gleichungen. Denn setzt man

14) $$\begin{cases} x + \alpha_1 y = x' \sqrt[3]{b_2} \\ x + \alpha_2 y = y' \sqrt[3]{b_1}, \end{cases}$$

so nimmt die Gleichung 11) die einfache Form an

15) $$\left(\frac{x'}{y'}\right)^3 + 1 = 0.$$

Bezeichnet man nun eine dritte Wurzel aus -1 durch ε, den Quotienten $\frac{x}{y}$ durch z, $\sqrt[3]{\frac{b_2}{b_1}}$ durch c, so ist 14)

$$\frac{z + \alpha_1}{z + \alpha_2} = \varepsilon c,$$

16) $$\frac{2z + \alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{1 + \varepsilon c}{1 - \varepsilon c}.$$

Mit Berücksichtigung der Formeln

$$1 + \varepsilon^3 = 0, \quad 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 = 0, \quad 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 2\varepsilon,$$

kann man setzen

17) $$\frac{1+\varepsilon c}{1-\varepsilon c} = \frac{(1+\varepsilon c)(1+c)(1+\varepsilon^2 c)}{(1-\varepsilon c)(1+c)(1+\varepsilon^2 c)} = \frac{1+c(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+\varepsilon c^2(1+\varepsilon+\varepsilon^2)-c^3}{1+c^3} = \frac{1+2\varepsilon c+2\varepsilon^2 c^2-c^3}{1+c^3}.$$

Setzt man in 17) die ursprünglichen Werte wieder ein, so findet man

$$\frac{1+\varepsilon\sqrt[3]{\frac{b_2}{b_1}}}{1-\varepsilon\sqrt[3]{\frac{b_2}{b_1}}} = \frac{b_1 - b_2 + 2\sqrt[3]{b_1 b_2}\,(\varepsilon\sqrt[3]{b_1} + \varepsilon^2\sqrt[3]{b_2})}{b_1 + b_2},$$

und 16) geht über in

18) $$2z + \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{a_0}\{b_1 - b_2 + 2\sqrt[3]{b_1 b_2}\,(\varepsilon\sqrt[3]{b_1} + \varepsilon^2\sqrt[3]{b_2})\} = \frac{-2a_1 + a_0(\alpha_1+\alpha_2)}{a_0} + \frac{2(\alpha_2-\alpha_1)}{a_0}\sqrt[3]{b_1 b_2}\,(\varepsilon\sqrt[3]{b_1} + \varepsilon^2\sqrt[3]{b_2}).$$

Die Grössen α_1, α_2, b_1, b_2 ergeben sich aus 12) und 13) in der Form

19)
$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{a_0a_3 - a_1a_2 + \sqrt{\Delta}}{2(a_0a_2 - a_1^2)}, \quad \alpha_2 = \dfrac{a_0a_3 - a_1a_2 - \sqrt{\Delta}}{2(a_0a_2 - a_1^2)}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{a_0a_3 - a_1a_2}{a_0a_2 - a_1^2}, \qquad \alpha_1 - \alpha_2 = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{a_0a_2 - a_1^2}, \end{cases}$$

20)
$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{a_1 - a_0\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad b_2 = -\dfrac{a_1 - a_0\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}, \\ b_1 + b_2 = a_0, \qquad b_1 - b_2 = \dfrac{2a_1 - a_0(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2}, \\ \qquad\qquad b_1b_2 = \dfrac{a_0a_2 - a_1^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}, \end{cases}$$

wenn Δ die Diskriminante von $K = 0$ bezeichnet, nämlich

21) $$\Delta = (a_0a_3 - a_1a_2)^2 - 4(a_1a_3 - a_2^2)(a_0a_2 - a_1^2).$$

Setzt man die Werte aus 19) und 20) in 18) ein, so findet man für z die Gleichung

22) $$a_0z = -a_1 - \sqrt[3]{a_0a_2 - a_1^2}\,(\varepsilon\sqrt[3]{a_1 - a_0\alpha_2} - \varepsilon^2\sqrt[3]{a_1 - a_0\alpha_1}).$$

Zur Bestimmung von $a_1 - a_0\alpha_2$, $a_1 - a_0\alpha_1$ setze man zur Abkürzung

23) $$3a_0a_1a_2 - a_0^2a_3 - 2a_1^3 = A,$$

und findet

23a) $$a_1 - a_0\alpha_1 = \frac{A - a_0\sqrt{\Delta}}{2(a_0a_2 - a_1^2)}, \quad a_1 - a_0\alpha_2 = \frac{A + a_0\sqrt{\Delta}}{2(a_0a_2 - a_1^2)},$$

so dass 22) übergeht in

$$a_0z = -a_1 - \varepsilon\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}a_0\sqrt{\Delta}} + \varepsilon^2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}a_0\sqrt{\Delta}}.$$

Für den Zusammenhang der in dieser Formel auftretenden beiden dritten Wurzeln hat man aus 20) und 23a)

24) $$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(A - a_0\sqrt{\Delta})}\cdot\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(A + a_0\sqrt{\Delta})} = a_1^2 - a_0a_2.$$

Setzt man schliesslich für ε, ε^2 die verschiedenen Werte, so wird

24a)
$$\begin{cases} a_0z_1 = -a_1 + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(A - a_0\sqrt{\Delta})} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(A + a_0\sqrt{\Delta})}, \\ a_0z_2 = -a_1 - \varepsilon\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(A - a_0\sqrt{\Delta})} + \varepsilon^2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(A + a_0\sqrt{\Delta})}, \\ a_0z_3 = -a_1 + \varepsilon^2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(A - a_0\sqrt{\Delta})} - \varepsilon\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(A + a_0\sqrt{\Delta})}. \end{cases}$$

Diese Formeln 24) und 24a), die zuerst von Eisenstein, Crelle Journal 27 pag. 81 und 319 ohne Beweis angegeben worden sind, liefern die allgemeine Auflösung der kubischen Gleichung.

Anmerkung 1. Hat die kubische Gleichung die übliche Form

$$z^3 + pz + q = 0$$

so setze man

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \tfrac{1}{3}p, \quad a_3 = q$$

und findet

$$\tfrac{1}{2}A = -\tfrac{1}{2}q, \quad \tfrac{1}{2}a_0\sqrt{\Delta} = \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3} = \sqrt{R},$$

$$z_1 = -\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{R}} - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{R}}$$

$$z_2 = \varepsilon\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{R}} - \varepsilon^2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{R}}$$

$$z_3 = -\varepsilon^2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{R}} + \varepsilon\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{R}},$$

wo

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{R}} \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{R}} = -\tfrac{1}{3}p.$$

Diese Formeln gehen in die gewöhnlichen Formeln des Tartalea über, wenn z mit $-z$ oder q mit $-q$ vertauscht wird.

Anmerkung 2. Die Gleichung 22) kann nach 16) noch in Form eines Quotienten geschrieben werden, nämlich

25) $$2(a_0a_2 - a_1^2)z + (a_0a_3 - a_1a_2) = -\sqrt{\Delta}\,\frac{\sqrt[3]{A + a_0\sqrt{\Delta}} - \varepsilon\sqrt[3]{A - a_0\sqrt{\Delta}}}{\sqrt[3]{A + a_0\sqrt{\Delta}} + \varepsilon\sqrt[3]{A - a_0\sqrt{\Delta}}}.$$

3. Der kanonische Ausdruck einer binären Form fünfter Ordnung.

Die Form fünfter Ordnung

26) $$a_0x^5 + 5a_1x^4y + 10a_2x^3y^2 + 10a_3x^2y^3 + 5a_4xy^4 + a_5y^5$$

kann auf die kanonische Form

27) $$b_1(x + \alpha_1 y)^5 + b_2(x + \alpha_2 y)^5 + b_3(x + \alpha_3 y)^5$$

gebracht werden, wo α_1, α_2, α_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung

28) $$K = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & z \\ a_2 & a_3 & a_4 & z^2 \\ a_3 & a_4 & a_5 & z^3 \end{vmatrix} = 0$$

sind. Zur Bestimmung von b_1, b_2, b_3 dient das System

29) $$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = a_0 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 = a_1 \\ b_1\alpha_1^2 + b_2\alpha_2^2 + b_3\alpha_3^2 = a_2, \end{cases}$$

dessen Auflösung ist

30) $$\begin{cases} b_1 = \dfrac{a_0\alpha_2\alpha_3 - a_1(\alpha_2 + \alpha_3) + a_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} \\ b_2 = \dfrac{a_0\alpha_1\alpha_3 - a_1(\alpha_1 + \alpha_3) + a_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} \\ b_3 = \dfrac{a_0\alpha_1\alpha_2 - a_1(\alpha_1 + \alpha_2) + a_2}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}. \end{cases}$$

Transformiert man die kanonische Form 27) durch die lineare Substitution

$$31) \quad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)u + \alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)v}{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_3)}} \\ y = -\dfrac{(\alpha_1-\alpha_3)u + (\alpha_2-\alpha_3)v}{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_3)}}, \end{cases}$$

deren Substitutionsdeterminante 1 ist, so geht dieselbe über in

$$32) \quad \frac{Db_1}{(\alpha_2-\alpha_3)^5}u^5 + \frac{Db_2}{(\alpha_3-\alpha_1)^5}v^5 + \frac{Db_3}{(\alpha_2-\alpha_1)^5}(u+v)^5,$$

wo $-D = \sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_3)}$. Setzt man

$$\frac{b_1}{(\alpha_2-\alpha_3)^5} = B_1, \quad \frac{b_2}{(\alpha_3-\alpha_1)^5} = B_2, \quad \frac{b_2}{(\alpha_2-\alpha_1)^5} = B_3,$$

ferner

$$B_1 : B_3 = B, \quad B_2 : B_3 = C,$$

so lautet schliesslich die kanonische Form

$$33) \quad Bu^5 + Cv^5 + (u+v)^5,$$

worin nur zwei Parameter vorkommen.

§ 9. Der kanonische Ausdruck von Formen gerader Ordnung.

Die allgemeine Transformation der binären Formen gerader Ordnung auf ihren kanonischen Ausdruck bietet wesentliche Schwierigkeiten.* Im Folgenden soll diese Transformation für binäre Formen vierter und achter Ordnung ausgeführt werden.

1. Der kanonische Ausdruck einer binären Form vierter Ordnung.

Die binäre Form vierter Ordnung

$$1) \quad a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4$$

kann auf die kanonische Form

$$2) \quad b_1(x+\alpha_1y)^4 + b_2(x+\alpha_2y)^4 + 6b_3(x+\alpha_1y)^2(x+\alpha_2y)^2$$

gebracht werden. Die Grössen b_1, b_2, b_3, α_1, α_2 werden durch das System bestimmt

$$3) \quad \begin{aligned} b_1 \quad + b_2 \quad + 6b_3 \quad &= a_0 \quad (\mathrm{I}) \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + 3b_3s \quad &= a_1 \quad (\mathrm{II}) \\ b_1\alpha_1^2 + b_2\alpha_2^2 + b_3(s^2+2t) &= a_2 \quad (\mathrm{III}) \\ b_1\alpha_1^3 + b_2\alpha_2^3 + 3b_3st \quad &= a_3 \quad (\mathrm{IV}) \\ b_1\alpha_1^4 + b_2\alpha_2^4 + 6b_3t^2 \quad &= a_4 \quad (\mathrm{V}), \end{aligned}$$

wo $s = \alpha_1 + \alpha_2$, $t = \alpha_1\alpha_2$.

* Sylvester, On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants. Philos. Magazine 1851. Ferner Cambridge and Dublin Math. Journal Bd. 9 (1854). Cayley, Crelle Journal 54 (1857).

Fasst man in 3) I, II, III; II, III, IV; III, IV, V zusammen und eliminiert aus diesen drei Systemen die Grössen b_1 und b_2, so erhält man ein System von drei Gleichungen, nämlich

$$\begin{aligned}
&(a_0 - 6b_3)\,t - (a_1 - 3b_3 s)\,s + [a_2 - b_3(s^2 + 2t)] = 0,\\
&(a_1 - 3b_3 s)\,t - [a_2 - b_3(s^2 + 2t)]\,s + (a_3 - 3b_3 st) = 0,\\
&[a_2 - b_3(s^2 + 2t)]\,t - (a_3 - 3b_3 st)\,s + (a_4 - 6b_3 t^2) = 0,
\end{aligned}$$

das sich auf folgendes reduziert:

$$4)\qquad \begin{cases} a_0 t - a_1 s + a_2 - 2b_3\,(4t - s^2) = 0,\\ a_1 t - a_2 s + a_3 - b_3 s\,(4t - s^2) = 0,\\ a_2 t - a_3 s + a_4 - 2b_3 t\,(4t - s^2) = 0. \end{cases}$$

Setzt man

$$\lambda = -2b_3(4t - s^2),$$

so geht 4) über in

$$5)\qquad \begin{cases} a_0 t - a_1 s + (a_2 + \lambda) = 0,\\ a_1 t - (a_2 - \tfrac{1}{2}\lambda)\,s + a_3 = 0,\\ (a_2 + \lambda)\,t - a_3 s + a_4 = 0. \end{cases}$$

Eliminiert man in 5) s und t, so erhält man die Gleichung

$$6)\quad 2\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2+\lambda \\ a_1 & a_2-\tfrac{1}{2}\lambda & a_3 \\ a_2+\lambda & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \lambda^3 - (a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2)\lambda + 2\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Mit Hilfe der Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 von 6) findet man s, t, α_1, α_2 und aus 3) b_1, b_2, b_3. Dabei sind α_1 und α_2 die Wurzeln einer quadratischen Gleichung. Also genügt zur Transformation von 1) auf 2) die Lösung einer kubischen und einer quadratischen Gleichung.

Anmerkung. Man kann die kanonische Form 2) zunächst in

$$(\beta_1 x + \beta_2 y)^4 + (\gamma_1 x + \gamma_2 y)^4 + 6\mu\,(\beta_1 x + \beta_2 y)^2 (\gamma_1 x + \gamma_2 y)^2$$

und dann durch die Substitution

$$\begin{aligned} u &= \beta_1 x + \beta_2 y\\ v &= \gamma_1 x + \gamma_2 y \end{aligned}$$

in

$$7)\qquad u^4 + v^4 + 6\mu u^2 v^2$$

transformieren. Setzt man diese Form gleich Null, so hat man eine Gleichung

$$\left(\frac{u}{v}\right)^4 + 6\mu\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 1 = 0,$$

die unmittelbar algebraisch auflösbar ist. Die Transformation der binären Formen vierter Ordnung auf ihre kanonische Form kann also zur Lösung der biquadratischen Gleichungen benutzt werden.

2. Der kanonische Ausdruck einer binären Form achter Ordnung.

Die Form achter Ordnung

$$8) \qquad a_0x^8 + 8a_1x^7y + \ldots + a_0y^8$$

kann auf die kanonische Form

$$9) \quad b_1(x+\lambda_1 y)^8 + b_2(x+\lambda_2 y)^8 + b_3(x+\lambda_3 y)^8 + b_4(x+\lambda_4 y)^8 + \\ + 70\mu(x+\lambda_1 y)^2(x+\lambda_2 y)^2(x+\lambda_3 y)^2(x+\lambda_4 y)^2$$

gebracht werden.

Setzt man

$$(x+\lambda_1 y)(x+\lambda_2 y)(x+\lambda_3 y)(x+\lambda_4 y) = x^4 + s_1x^3y + s_2x^2y^2 + s_3xy^3 + s_4y^4 = T$$

und bezeichnet den Koefficienten von $x^{8-i}y^i$ in der Entwicklung von T^2 durch $\frac{\binom{8}{i}}{70} M_i$, so findet man durch Vergleichung von 8) und 9) ein System von neun Gleichungen der Form

$$10) \qquad b_1\lambda_1{}^i + b_2\lambda_2{}^i + b_3\lambda_3{}^i + b_4\lambda_4{}^i + \mu M_i = a_i \\ (i = 0, 1, 2, \ldots, 8).$$

Fasst man immer fünf Gleichungen dieses Systems zusammen und zwar zuerst die erste bis fünfte, sodann die zweite bis sechste Gleichung u. s. w. und eliminiert aus jeder Gruppe von fünf Gleichungen die vier Grössen b_1, b_2, b_3, b_4, so ergiebt sich das System von fünf Gleichungen

$$11) \quad \begin{cases} a_0s_4 - a_1s_3 + a_2s_2 - a_3s_1 + a_4 - \mu N_1 = 0, \\ a_1s_4 - a_2s_3 + a_3s_2 - a_4s_1 + a_5 - \mu N_2 = 0, \\ a_2s_4 - a_3s_3 + a_4s_2 - a_5s_1 + a_6 - \mu N_3 = 0, \\ a_3s_4 - a_4s_3 + a_5s_2 - a_6s_1 + a_7 - \mu N_4 = 0, \\ a_4s_4 - a_5s_3 + a_6s_2 - a_7s_1 + a_8 - \mu N_5 = 0, \end{cases}$$

wo

$$\begin{aligned} N_1 &= M_0s_4 - M_1s_3 + M_2s_2 - M_3s_1 + M_4, \\ N_2 &= M_1s_4 - M_2s_3 + M_3s_2 - M_4s_1 + M_5, \\ N_3 &= M_2s_4 - M_3s_3 + M_4s_2 - M_5s_1 + M_6, \\ N_4 &= M_3s_4 - M_4s_3 + M_5s_2 - M_6s_1 + M_7, \\ N_5 &= M_4s_4 - M_5s_3 + M_6s_2 - M_7s_1 + M_8. \end{aligned}$$

Entwickelt man T^2, so findet man

$$\begin{aligned} &M_0 = 70, \quad M_1 = \tfrac{35}{2}s_1, \quad M_2 = 5s_2 + \tfrac{5}{2}s_1{}^2, \quad M_3 = \tfrac{5}{2}s_3 + \tfrac{5}{2}s_1s_2, \\ &M_4 = 2s_4 + 2s_1s_3 + s_2{}^2, \quad M_5 = \tfrac{5}{2}s_1s_4 + \tfrac{5}{2}s_2s_3, \\ &M_6 = 5s_2s_4 + \tfrac{5}{2}s_3{}^2, \qquad M_7 = \tfrac{35}{2}s_3s_4, \quad M_8 = 70s_4{}^2, \end{aligned}$$

woraus

$$
\begin{aligned}
N_1 &= 72 s_4 + 18 s_1 s_3 + 6 s_2^2,\\
N_2 &= 18 s_1 s_4 - \tfrac{9}{2} s_1^2 s_3 + \tfrac{3}{2} s_1 s_2^2,\\
N_3 &= 12 s_2 s_4 - 3 s_1 s_2 s_3 + s_2^3,\\
N_4 &= 18 s_3 s_4 - \tfrac{9}{2} s_1 s_3^2 + \tfrac{3}{2} s_2^2 s_3,\\
N_5 &= 72 s_4^2 - 18 s_1 s_3 s_4 + 6 s_2^2 s_4.
\end{aligned}
$$

Bezeichnet man die quadratische Invariante der biquadratischen Form T durch J^*, so wird

$$N_1 = 72J, \quad N_2 = 72 \cdot \frac{s_1}{4} J, \quad N_3 = 72 \frac{s_2}{6} J, \quad N_4 = 72 \cdot \frac{s_3}{4} J, \quad N_5 = 72 . s_4 J.$$

Setzt man nun

$$72 \mu J = \lambda,$$

so geht 11) über in

$$
\begin{aligned}
a_0 s_4 - a_1 s_3 + a_2 s_2 - a_3 s_1 + (a_4 - \lambda) &= 0,\\
a_1 s_4 - a_2 s_3 + a_3 s_2 - \left(a_4 + \frac{\lambda}{4}\right) s_1 + a_5 &= 0,\\
a_2 s_4 - a_3 s_3 + \left(a_4 - \frac{\lambda}{6}\right) s_2 - a_5 s_1 + a_6 &= 0,\\
a_3 s_4 - \left(a_4 + \frac{\lambda}{4}\right) s_3 + a_5 s_2 - a_6 s_1 + a_7 &= 0,\\
(a_4 - \lambda) s_4 - a_5 s_3 + a_6 s_2 - a_7 s_1 + a_8 &= 0.
\end{aligned}
$$

Also verschwindet die Determinante

12)
$$
\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 - \lambda\\
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 + \frac{\lambda}{4} & a_5\\
a_2 & a_3 & a_4 - \frac{\lambda}{6} & a_5 & a_6\\
a_3 & a_4 + \frac{\lambda}{4} & a_5 & a_6 & a_7\\
a_4 - \lambda & a_5 & a_6 & a_7 & a_8
\end{vmatrix} = 0.
$$

Diese Gleichung liefert für λ fünf Werte, also fünf Lösungen der vorgelegten Aufgabe.**

* Vergleiche § 10, 1.

** Sylvester, Philos. Magaz. 1851, wo auch noch die Form sechster Ordnung analog behandelt ist. Durch eine von Cayley herrührende Methode könnte die Reduktion aber vereinfacht werden. Wir geben diese Methode, welche zugleich die Zurückführung aller Formen gerader Ordnung auf von den obigen etwas verschiedene kanonische Ausdrücke liefert, in einem späteren Paragraphen über die Covarianten (§ 15, 7). Diese kanonischen Gleichungsformen überhaupt haben im allgemeinen bis jetzt nur für die Formen niederer Ordnung besondere Bedeutung, weil nur bei diesen die specielle Gleichungsform eine wesentliche Vereinfachung hervorbringt.

Vierter Abschnitt.

Invarianten.

§ 10. Die Invarianten einer Form als Funktionen der Koefficienten.

1. Wenn man die binäre Form m^{ter} Ordnung*

1) $$f(x,y) = a_0 x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \binom{m}{2} a_2 x^{m-2} y^2 + \ldots + a_m y^m$$

durch die lineare Substitution

2) $$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta$$

transformiert, so geht f über in

3) $$F(\xi,\eta) = A_0 \xi^m + \binom{m}{1} A_1 \xi^{m-1}\eta + \binom{m}{2} A_2 \xi^{m-2}\eta^2 + \ldots + A_m \eta^m,$$

wo $A_0, \ldots, A_m$ Funktionen der gegebenen Koefficienten $a_0, \ldots, a_m$ und der Substitutionskoefficienten p, q, p', q' sind.

Sei nun φ eine ganze rationale Funktion der Koefficienten $a_0, \ldots, a_m$, die in Φ übergehe, sobald man $a_0, \ldots, a_m$ durch $A_0, \ldots, A_m$ ersetzt. Ist dann

4) $$\Phi = (pq' - p'q)^\mu \cdot \varphi$$

bei ganzem μ, so heisst φ eine Invariante der Form f.**

---

* Es ist hier folgende Bezeichnung festgehalten: Die Dimension einer Form in den Variabeln wird Ordnung, die Dimension in den Koefficienten wird Grad genannt. Diese Bezeichnungsweise, bei den englischen Algebraikern die gewöhnliche, wird auch von Clebsch in seinen binären Formen angewandt, während Gordan in seinen Arbeiten (Formensystem u. s. w.) gerade die entgegengesetzte Definition gebraucht.

** Die Lehre von den Invarianten ist von Boole (Exposition of a general theory of linear transformations, Cambridge Math. Journal (old series) Bd. 3, 1841; ferner Bd. 4, 1844; vergl. Cayley in Crelle Journal 30 pag. 1) eingeleitet und sodann von Cayley, Sylvester, Aronhold, Hermite, Brioschi, in neuerer Zeit von Clebsch, Gordan u. A. ausgebildet worden. Der Name Invariante rührt von Sylvester her, Philos. Magazine 1851 II pag. 396. Von Cayley waren Funktionen der betrachteten Art Hyperdeterminanten genannt worden.

Eine Invariante ist also eine ganze rationale Funktion der Koefficienten einer Form, die sich nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante ändert, sobald man in ihr die Koefficienten der gegebenen Form mit den Koefficienten der durch eine lineare Substitution transformierten Form vertauscht.

Beispiele. a) Die binäre quadratische Form

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2$$

hat die Invariante

$$a_0 a_2 - a_1^2.$$

Denn transformiert man die gegebene Form durch eine lineare Substitution, so sind die Koefficienten der transformierten Form

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 p^2 + 2a_1 pp' + a_2 p'^2, \\ A_1 &= a_0 pq + a_1 (pq' + p'q) + a_2 p'q', \\ A_2 &= a_0 q^2 + 2a_1 qq' + a_2 q'^2, \end{aligned}$$

und man hat

$$A_0 A_2 - A_1^2 = (a_0 a_2 - a_1^2)(pq' - p'q)^2.$$

b) Die binäre Form vierter Ordnung

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 xy^3 + a_4 y^4$$

besitzt eine Invariante zweiten Grades

$$a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2.$$

Denn die lineare Transformation ergiebt

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 p^4 + 4a_1 p^3 p' + 6a_2 p^2 p'^2 + 4a_3 pp'^3 + a_4 p'^4 = \\ &\quad = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)(p, p')^4, * \\ A_1 &= a_0 p^3 q + a_1 (p^3 q' + 3p^2 p' q) + 3a_2 (p^2 p' q' + pp'^2 q) + \\ &\quad + a_3 (p'^3 q + 3p'^2 pq') + a_4 p'^3 q' = (a_0, \ldots, a_4)(p, p')^3 (q, q'), \\ A_2 &= a_0 p^2 q^2 + 2a_1 (p^2 qq' + pp' q^2) + a_2 (p^2 q'^2 + 4pp' qq' + p'^2 q^2) + \\ &\quad + 2a_3 (p'^2 qq' + pp' q'^2) + a_4 p'^2 q'^2 = (a_0, \ldots, a_4)(p, p')^2 (q, q')^2, \\ A_3 &= a_0 pq^3 + a_1 (p' q^3 + 3pq^2 q') + 3a_2 (p' q^2 q' + pqq'^2) + \\ &\quad + a_3 (pq'^3 + 3p' qq'^2) + a_4 p' q'^3 = (a_0, \ldots, a_4)(p, p')(q, q')^3, \\ A_4 &= a_0 q^4 + 4a_1 q^3 q' + 6a_2 q^2 q'^2 + 4a_3 qq'^3 + a_4 q'^4 = \\ &\quad = (a_0, \ldots, a_4)(q, q')^4, \end{aligned}$$

und man hat

$$A_0 A_4 - 4A_1 A_3 + 3A_2^2 = (a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2)(pq' - p'q)^4.$$

2. Die allgemeine Form der transformierten Koefficienten. Die transformierten Koefficienten $A_0, \ldots, A_m$ sind homogene ganze Funktionen m^{ten} Grades der Substitutionskon-

* Nach Cayleyscher Bezeichnung.

stanten und lineare Funktionen der ursprünglichen Koefficienten $a_0, \ldots, a_m$. Denn die gegebene Form ist m^{ter} Ordnung in x, y. Weil die Substitution linear ist, so ist die transformierte Form m^{ter} Ordnung in ξ, η und m^{ten} Grades in p, q. Die $a_0, \ldots, a_m$, auf welche die Substitution keinen Einfluss hat, können aber in der transformierten Form nun linear vorkommen.

In der transformierten Form

$$F = f(p\xi + q\eta,\ p'\xi + q'\eta)$$

ist $\binom{m}{i} A_i$ der Koefficient von $\xi^{m-i}\eta^i$ oder von $\xi^m \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^i$, wenn

$$F = \xi^m . f\left(p + q\frac{\eta}{\xi},\ \ p' + q'\frac{\eta}{\xi}\right),$$

oder von $\eta^m \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{m-i}$, wenn

$$F = \eta^m f\left(p\frac{\xi}{\eta} + q,\ \ p'\frac{\xi}{\eta} + q'\right)$$

gesetzt wird. Entwickelt man also F nach der Taylorschen Reihe, so ergiebt sich

$$\binom{m}{i} A_i = \frac{1}{\Pi(i)}\left(q\frac{\partial}{\partial p} + q'\frac{\partial}{\partial p'}\right)^i f(p, p'),$$

$$\binom{m}{m-i} A_i = \frac{1}{\Pi(m-i)}\left(p\frac{\partial}{\partial q} + p'\frac{\partial}{\partial q'}\right)^{m-i} f(q, q'),$$

woraus

$$5) \quad \begin{cases} A_i = \dfrac{\Pi(m-i)}{\Pi(m)} \cdot \left(q\dfrac{\partial}{\partial p} + q'\dfrac{\partial}{\partial p'}\right)^i f(p, p'), \\ A_i = \dfrac{\Pi(i)}{\Pi(m)} \cdot \left(p\dfrac{\partial}{\partial q} + p'\dfrac{\partial}{\partial q'}\right)^{m-i} f(q, q'), \end{cases}$$

wo $\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial p'}\right)^l f$ symbolisch für $\frac{\partial^{k+l} f}{\partial p^k \partial p'^l}$ etc. gesetzt wird und $\Pi(i) = 1.2.3 \ldots i$ ist. Nach Cayleys Symbolik ist

$$A_i = (a_0, \ldots, a_m)(p, p')^{m-i}(q, q')^i.$$

3. Die Invariante φ ist homogen in Bezug auf die Koefficienten der gegebenen Form.

Denn durch die Substitution

$$x = \lambda\xi, \quad y = \lambda\eta$$

geht a_i in $\lambda^m a_i$ über; folglich erhält jedes Glied der Invariante eine Potenz von λ als Faktor, deren Exponent m-mal der Grad dieses Gliedes ist. Da nun die Substitutionsdeterminante hier gleich λ^2 ist, so ist die durch obige Substitution transformierte Invariante von der ursprünglichen nur um eine Potenz von λ verschieden, woraus die angegebene Eigenschaft folgt.

4. Ist ϱ der Grad der Invariante, r die Substitutionsdeterminante, m die Ordnung der Form, so hat man

$$6) \qquad \Phi = r^{\frac{1}{2}m\varrho} \cdot \varphi.$$

Denn Φ ist vom Grade ϱ in Bezug auf die transformierten Koefficienten A, welche m^{ten} Grades in Bezug auf die Substitutionskonstanten p, q, p', q' sind; also ist Φ bezüglich dieser Konstanten vom Grad $m\varrho$. Da nun

$$\Phi = r^{\mu} \cdot \varphi$$

und r in Bezug auf p, q vom zweiten Grade ist, so hat man die Identität

$$m\varrho = 2\mu$$
$$\mu = \tfrac{1}{2}m\varrho.$$

Der Exponent von r, $\mu = \frac{1}{2}m\varrho$, heisst nach Hermite der Index der Invariante, so dass man den Satz aussprechen kann:

Der Index einer Invariante ist das halbe Produkt aus der Ordnung der Form und dem Grad der Invariante. Für ein ungerades m muss ϱ gerade sein.

5. Das Gewicht einer Invariante ist konstant und gleich dem Index. Nennt man die Exponenten von a_0, a_1, ..., a_m in irgend einem Glied der Invariante bezüglich

$$e_0, e_1, \ldots, e_m,$$

so ist, für jedes Glied der Invariante,

$$7) \qquad 0 \cdot e_0 + 1 \cdot e_1 + 2e_2 + \ldots + me_m = \tfrac{1}{2}m\varrho.$$

Denn durch die lineare Substitution

$$8) \qquad x = \xi, \quad y = \lambda\eta,$$

deren Determinante λ ist, findet man

$$\Phi = \lambda^{\frac{1}{2}m\varrho}\varphi.$$

Die transformierten Koefficienten lauten aber

$$A_0 = a_0\lambda^0, \quad A_1 = a_1\lambda^1, \quad A_2 = a_2\lambda^2, \quad \ldots, \quad A_m = a_m\lambda^m,$$

und man hat für irgend ein Glied von Φ

$$A_0^{e_0}A_1^{e_1}\ldots A_m^{e_m} = a_0^{e_0}a_1^{e_1}\ldots a_m^{e_m} \cdot \lambda^{0\cdot e_0 + 1e_1 + 2e_2 + \ldots + me_m}$$

und folglich

$$\Phi = \lambda^{0\cdot e_0 + 1\cdot e_1 + 2e_2 + \ldots + me_m} \cdot \varphi,$$

woraus die Identität 7) folgt.

6. Eine Funktion heisst symmetrisch in Bezug auf die Koefficienten a_0, a_1, ..., a_m, wenn sie sich durch Vertauschung solcher Koefficienten, deren Indexsumme gleich m ist, die also von den Enden

gleich weit abstehen, nicht ändert. Die Glieder der Funktion, die durch die angezeigte Vertauschung in einander übergehen, heissen konjugiert.

Die Invariante ist, bis aufs Zeichen, symmetrisch in Bezug auf die Koefficienten der Form.

Denn durch die Substitution

$$x = \eta,\ y = \xi,$$

deren Determinante -1 ist, findet man

$$\Phi = (-1)^{\frac{1}{2}m\varrho} \cdot \varphi$$

und der Koefficient a_i geht über in a_{m-i}. Die Invariante bleibt also, bis aufs Zeichen, unverändert, wenn man a_i mit a_{m-i} vertauscht.

Dass bei dieser Vertauschung das Gewicht ungeändert bleibt, lässt sich leicht zeigen. Ein Glied der Invariante von der Form

$$a_\alpha^{\alpha'} a_\beta^{\beta'} \dots$$

geht durch symmetrische Vertauschung der Koefficienten über in den Ausdruck

$$a^{\alpha'}{}_{m-\alpha}\, a^{\beta'}{}_{m-\beta} \cdots,$$

dessen Gewicht ist

$$(m-\alpha)\,\alpha' + (m-\beta)\,\beta' + \dots$$

Nun hat man die Identitäten

$$m(\alpha' + \beta' + \dots) = m \cdot \varrho$$
$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \dots = \tfrac{1}{2} m\varrho,$$

woraus folgt, dass

$$(m-\alpha)\,\alpha' + (m-\beta)\,\beta' + \dots = m\varrho - \tfrac{1}{2} m\varrho = \tfrac{1}{2} m\varrho,$$

d. h. durch symmetrische Vertauschung der Koefficienten bleibt das Gewicht der Invariante ungeändert.

Je nachdem nun eine Invariante durch symmetrische Vertauschung der Koefficienten das Zeichen nicht wechselt oder wechselt, heisst sie gerade oder ungerade (von geradem oder ungeradem Charakter nach Clebsch, binäre Formen § 16).* Eine Invariante ist also gerade oder ungerade, je nachdem der Index $\frac{1}{2} m\varrho$ gerade oder ungerade ist. So haben z. B. die Formen fünfter Ordnung eine ungerade Invariante achtzehnten Grades und die Formen sechster Ordnung eine ungerade Invariante fünfzehnten Grades (vergl. Hermite in Crelle Journal 59, pag. 304).

Anmerkung. Dass bei geraden Invarianten das Produkt $m\varrho$ durch vier teilbar ist, kann man auch so zeigen: Zufolge der Substitution

* Invariants droits, invariants gauches bei den französischen Mathematikern.

$$x = i\eta,\ y = i\xi,\ \text{wo } i = \sqrt{-1},$$

deren Determinante 1 ist, hat man

$$\Phi = \varphi,$$
$$A_k = a_{m-k}\, i^{m-k} . i^k = a_{m-k}\, i^m,$$

und zu jedem Glied der geraden Invariante tritt ausser der Vertauschung von a_k mit a_{m-k} noch der Faktor $i^{m\varrho}$, so dass

$$i^{m\varrho} . \varphi = \varphi,$$

woraus folgt, dass $m\varrho$ durch 4 teilbar sein muss.

Bei ungeraden Invarianten ist $m\varrho$ durch 2 (nicht durch 4) teilbar.

Je nachdem m von der Form $4\mu + 2$ oder $4\mu \pm 1$ ist, ist ϱ für gerade Invarianten von der Form 2μ oder 4μ. Anderseits kann eine gerade Invariante nur dann ungeraden Grades sein, wenn die Ordnung der Form durch 4 teilbar ist. Für Formen ungerader Ordnung kann die Invariante überhaupt nicht ungeraden Grades sein. So sind z. B. die Invarianten der Form fünfter Ordnung bezüglich vom vierten, achten, zwölften, achtzehnten Grad.

7. Die algebraische Summe der Zahlenkoefficienten einer Invariante ist Null.

Beweis. Ersetzt man in der Form f und in der Invariante φ die Koefficienten a_k bez. durch a^k, so wird f zu (§ 5, 1)

$$f' = (x + ay)^m$$

und φ erhält den Ausdruck

$$\varphi' = a^{\frac{1}{2}m\varrho} . S,$$

wo S die Summe der in der Invariante φ vorkommenden Zahlenkoefficienten bedeutet.

Durch die Substitution

$$x = \xi + i\eta,\quad y = i\xi + \eta\,(i = \sqrt{-1}),$$

deren Determinante 2 ist, geht f' über in

$$F' = \left(\xi + \frac{a+i}{1+ai}\eta\right)^m (1 + ai)^m$$

und φ' in

$$\Phi' = 2^{\frac{1}{2}m\varrho} a^{\frac{1}{2}m\varrho} . S = (2a)^{\frac{1}{2}m\varrho} . S.$$

Setzt man nun in φ' an Stelle von a^k die transformierten Koefficienten

$$\frac{(a+i)^k}{(1+ai)^k} \cdot (1 + ai)^m,$$

so hat man für Φ' die Formel

$$\Phi' = (1+ai)^{m\varrho} \cdot \left(\frac{a+i}{1+ai}\right)^{\frac{1}{2}m\varrho} \cdot S = i^{\frac{1}{2}m\varrho}(a^2+1)^{\frac{1}{2}m\varrho} \cdot S.$$

Aber die für jedes a zu erfüllende Identität

$$i^{\frac{1}{2}m\varrho}(a^2+1)^{\frac{1}{2}m\varrho} S = (2a)^{\frac{1}{2}m\varrho} \cdot S$$

kann nur unter der Voraussetzung, dass S verschwindet, bestehen. Also ist

$$S = 0.$$

8. Die Invariante φ genügt der partiellen Differentialgleichung

$$9) \qquad a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + \ldots + m \cdot a_{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_m} = 0.$$

Beweis. Durch die Substitution

$$10) \qquad x = \xi + \varepsilon\eta, \quad y = \eta,$$

deren Modul 1 ist, wird

$$\Phi = \varphi.$$

Die Koefficienten der transformierten Form lauten

$$A_0 = a_0$$
$$A_1 = a_1 + a_0\varepsilon$$
$$A_2 = a_2 + 2a_1\varepsilon + a_0\varepsilon^2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$A_i = a_i + ia_{i-1}\varepsilon + \binom{i}{2} a_{i-2}\varepsilon^2 + \ldots + ia_1\varepsilon^{i-1} + a_0\varepsilon^i,$$

denn legt man f in der symbolischen Form

$$f = (x+ay)^m$$

zu Grunde und führt die angegebene Substitution aus, so wird die transformierte Form

$$F(\xi, \eta) = [\xi + (a+\varepsilon)\eta]^m = \sum_0^m{}^i \binom{m}{i} (a+\varepsilon)^i \xi^{m-i}\eta^i = \sum_0^m{}^i \binom{m}{i} A_i \xi^{m-i}\eta^i,$$

woraus folgt, dass

$$A_i = (a+\varepsilon)^i = a_i + ia_{i-1}\varepsilon + \binom{i}{2} a_{i-2}\varepsilon^2 + \ldots + a_0\varepsilon^i.$$

Dieser Koefficient kann nun noch anders ausgedrückt werden. Bezeichnet man nämlich durch δ den Prozess

$$a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + ma_{m-1} \frac{\partial}{\partial a_m} = \sum_1^m{}^i ia_{i-1} \frac{\partial}{\partial a_i}$$

und bedenkt, dass

$$\delta a_i = ia_{i-1}, \quad \delta^2 a_i = i(i-1)a_{i-2}, \quad \delta^3 a_i = i(i-1)(i-2)a_{i-3}, \quad \ldots,$$
$$\delta^\nu a_i = i(i-1)\ldots(i-\nu+1)a_{i-\nu},$$

so kann A_i in der Form geschrieben werden

11) $$A_i = a_i + \varepsilon\delta a_i + \frac{1}{1.2}\varepsilon^2\delta^2 a_i + \ldots + \frac{1}{\Pi(i)}\varepsilon^i\delta^i a_i.$$

Führt man nun in der transformierten Invariante Φ die obigen Werte für A_0, A_1, ..., ein, so ist Φ von der Form

12) $$\Phi = \varphi + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

wo C_1, C_2, ... Funktionen der Koefficienten a_0, ... sind, was zufolge der Gleichung $\Phi = \varphi$ liefert

$$C_1 + C_2\varepsilon + \ldots = 0$$

für jedes ε. Also muss

$$C_1 = 0$$

sein. Bezeichnet man nun die Differenzen

$$A_1 - a_1,\ A_2 - a_2,\ \ldots \text{ durch } \Delta a_1,\ \Delta a_2,\ \ldots,$$

so ist nach dem erweiterten Maclaurinschen Satze

$$C_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial\Delta a_1}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial\Delta a_2}{\partial\varepsilon} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial a_m}\frac{\partial\Delta a_m}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},$$

woraus die Gleichung 9) unmittelbar folgt, d. h.

9a) $$\delta\varphi = 0.$$

Anmerkung 1. Vertauscht man in 9) die symmetrisch gelegenen Koefficienten, so erhält man die Gleichung

9b) $$\delta'\varphi = m a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0} + (m-1)a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + \ldots + a_m\frac{\partial\varphi}{\partial a_{m-1}} = 0,$$

der nach Nr. 6 dieses Paragraphen φ ebenfalls genügen muss.

Anmerkung 2. Schreibt man die gegebene Form ohne Binomialkoefficienten, nämlich

$$f = b_0x^m + b_1x^{m-1}y + \ldots + b_my^m,$$

so treten an Stelle von 9b) und 9) die Gleichungen

13) $$\begin{cases} b_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial b_0} + 2b_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial b_1} + \ldots + mb_m\dfrac{\partial\varphi}{\partial b_{m-1}} = 0, \\ mb_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial b_1} + (m-1)b_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial b_2} + \ldots + b_{m-1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial b_m} = 0, \end{cases}$$

denn man hat die Identitäten

$$b_k = \binom{m}{k}a_k,$$

$$b_{k-1} = \binom{m}{k-1}a_{k-1},$$

$$k a_{k-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_k} = (m-k+1)\,b_{k-1}\frac{\partial\varphi}{\partial b_k}.$$

9. Die Bedingung 9) ist notwendig und auch hinreichend, damit φ für die Substitution 10) invariant sei. Um dies zu zeigen, genügt es zu beweisen, dass aus

$$C_1 = 0$$

auch

$$C_2 = C_3 = \ldots = 0$$

folgt, dass also aus 9) sogleich

$$\Phi = \varphi$$

hervorgeht.

Nun hat man aber, wenn man $\varphi(a)$, $\varphi(A)$ bezüglich für $\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $\varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots)$ schreibt, für irgend eine Funktion φ*

14) $$\varphi(A) = \varphi(a) + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

wo nach dem Maclaurinschen Satze

$$C_1 = \left[\frac{\partial\varphi(A)}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}, \quad C_2 = \frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial^2\varphi(A)}{\partial\varepsilon^2}\right]_{\varepsilon=0}, \text{ u. s. w.}$$

Nun ist

$$\frac{\partial\varphi(A)}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial\varphi(A)}{\partial A_1}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\varphi(A)}{\partial A_2}\cdot\frac{\partial A_2}{\partial\varepsilon} + \ldots,$$

also

15) $$\left[\frac{\partial\varphi(A)}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a_1}\cdot a_0 + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a_2}\cdot 2a_1 + \ldots = \delta\varphi(a)$$

nach der früheren Bezeichnung; ebenso

$$\left[\frac{\partial^2\varphi(A)}{\partial\varepsilon^2}\right]_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial\frac{\partial\varphi(A)}{\partial\varepsilon}}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \delta\left[\frac{\partial\varphi(A)}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \delta.\delta\varphi(a) = \delta^2\varphi(a);$$

u. s. w., und allgemein

$$\left[\frac{\partial^k\varphi(A)}{\partial\varepsilon^k}\right]_{\varepsilon=0} = \delta.\delta^{k-1}\varphi(a) = \delta^k\varphi(a).$$

Daher

16) $$\varphi(A) = \varphi(a) + \delta\varphi(a).\varepsilon + \delta^2\varphi(a)\cdot\frac{\varepsilon^2}{1.2} + \delta^3\varphi(a)\frac{\varepsilon^3}{1.2.3} + \ldots$$

In symbolischer Weise kann man also schreiben

17) $$\varphi(A) = e^{\varepsilon\delta}.\varphi(a), \ldots,$$

wie man die A selbst schon symbolisch hätte schreiben können:

18) $$A_0 = e^{\varepsilon\delta}.a_0, \quad A_1 = e^{\varepsilon\delta}.a_1, \quad A_2 = e^{\varepsilon\delta}.a_2, \ldots$$

(in Erwägung, dass

$$e^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1.2} + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} + \ldots)$$

Für die Funktion φ der vorigen Nummer, für welche

* Bruno, Crelle Journal 90 pag. 186.

$$C_1 = \delta\varphi(a) = 0$$

ist, folgt aus den obigen Ausdrücken sogleich

$$C_2 = \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi(a) = \tfrac{1}{2}\delta C_1 = 0,$$

und ebenso allgemein

$$C_k = 0.$$

10. Die partiellen Differentialgleichungen, denen die Invariante φ genügt, nämlich

$$a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + ma_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_m} = 0,$$

$$ma_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0} + (m-1)a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + \ldots + a_m\frac{\partial\varphi}{\partial a_{m-1}} = 0,$$

können durch die symbolischen Gleichungen

19)
$$\begin{cases} \delta_1\Phi = p\dfrac{\partial\Phi}{\partial q} + p'\dfrac{\partial\Phi}{\partial q'} = 0 \\ \delta_2\Phi = q\dfrac{\partial\Phi}{\partial p} + q'\dfrac{\partial\Phi}{\partial p'} = 0 \end{cases}$$

ersetzt werden.

Der Beweis dieses Satzes wird in der Lehre von den Kovarianten (§ 14, 7) vorgetragen werden; hier mögen einige Beispiele die Richtigkeit des Satzes darthun. Dabei ist zu bemerken, dass, wenn man die erste Definition der Invariante mittelst

$$\Phi = (pq' - p'q)^\mu \cdot \varphi$$

noch zu Hilfe nehmen wollte, der Satz, dass

$$\delta_1\Phi = 0 \quad \text{und} \quad \delta_2\Phi = 0,$$

evident ist.

Legen wir f in der symbolischen Form

$$f = (\alpha x + \beta y)^m$$

zu Grunde, wo die symbolischen Koefficienten

$$\alpha^m, \quad \alpha^{m-1}\beta, \quad \ldots$$

die Koefficienten

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots$$

bedeuten, so erscheint nach Nr. 2, 5) dieses Paragraphen A_i in der Form

$$A_i = \frac{1}{m(m-1)\ldots(i+1)}\delta_1^{m-i}(\alpha q + \beta q')^m = (\alpha q + \beta q')^i(\alpha p + \beta p')^{m-i}.$$

Beispiel 1. Die binäre quadratische Form

$$f = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = (\alpha x + \beta y)^2$$

hat die Invariante

$$\varphi = a_0a_2 - a_1^2.$$

Führen wir den δ_1-Prozess aus, so kommt

$$\delta_1 \Phi = \delta_1 (A_0 A_2 - A_1^2) =$$
$$= \delta_1 \{(\alpha p + \beta p')^2 (\alpha q + \beta q')^2 - [(\alpha q + \beta q')(\alpha p + \beta p')]^2\} =$$
$$= 2(\alpha p + \beta p')^2 [(\alpha q + \beta q')(\alpha p + \beta p')] -$$
$$- 2[(\alpha q + \beta q')(\alpha p + \beta p')](\alpha p + \beta p')^2 = 0.$$

Beispiel 2. Die binäre Form vierter Ordnung

$$f = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 x y^3 + a_4 y^4 = (\alpha x + \beta y)^4$$

hat die Invariante

$$\varphi = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2.$$

Führen wir den δ_1-Prozess aus, so kommt

$$\delta_1 \Phi = \delta_1 (A_0 A_4 - 4A_1 A_3 + 3A_2^2) =$$
$$= \delta_1 \{(\alpha p + \beta p')^4 (\alpha q + \beta q')^4 - 4[(\alpha q + \beta q')(\alpha p + \beta p')^3][(\alpha q + \beta q')^3 (\alpha p + \beta p')] +$$
$$+ 3[(\alpha q + \beta q')^2 (\alpha p + \beta p')^2]^2\} = 4(\alpha p + \beta p')^4 [(\alpha q + \beta q')^3 (\alpha p + \beta p')] -$$
$$- 4(\alpha p + \beta p')^4 [(\alpha q + \beta q')^3 (\alpha p + \beta p')] -$$
$$- 12[(\alpha q + \beta q')(\alpha p + \beta p')^3][(\alpha q + \beta q')^2 (\alpha p + \beta p')^2] +$$
$$+ 12[(\alpha q + \beta q')^2 (\alpha p + \beta p')^2][(\alpha q + \beta q')(\alpha p + \beta p')^3] = 0.$$

Da diese Funktionen bezüglich der Variabeln p, p' und q, q' symmetrisch sind, so liefert der Prozess δ_2 dasselbe Resultat.

11. Eine Funktion φ der Koefficienten einer Form ist eine Invariante, wenn sie isobarisch, bis aufs Vorzeichen symmetrisch und zwar gerade oder ungerade ist, je nachdem das Gewicht μ eine gerade oder ungerade Zahl ist und der partiellen Differentialgleichung

$$a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + m a_{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_m} = 0$$

genügt.

Beweis. Die Funktion φ wird homogen und ändert sich nicht durch die Substitution

$$x = \eta, \quad y = -\xi,$$

weil sie von konstantem Gewicht und bis aufs Vorzeichen symmetrisch ist. Denn sei

$$\varphi = \tau a_\alpha^{\alpha'} a_\beta^{\beta'} \ldots + \tau (-1)^\mu a_{m-\alpha}^{\alpha'} a_{m-\beta}^{\beta'} \ldots + \ldots,$$

so ist nach der Annahme

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \ldots = \mu$$
$$(m-\alpha)\alpha' + (m-\beta)\beta' + \ldots = \mu,$$

woraus auch

$$m(\alpha' + \beta' + \ldots) = 2\mu,$$

d. h. die Funktion φ ist auch homogen. Durch die Substitution $x = \eta$, $y = -\xi$ wird nun

$$A_i = (-1)^{m-i} a_{m-i},$$

daher

$$\Phi = \tau (-1)^{(m-\alpha)\alpha' + (m-\beta)\beta' + \cdots} a_{m-\alpha}^{\alpha'} a_{m-\beta}^{\beta'} \cdots +$$
$$+ \tau (-1)^{\mu} (-1)^{\alpha\alpha' + \beta\beta' + \cdots} a_{\alpha}^{\alpha'} a_{\beta}^{\beta'} \cdots + \cdots = \varphi.$$

Ebensowenig ändert sich φ durch die Substitution

$$x = \xi + \varepsilon\eta, \quad y = \eta,$$

weil sie der angegebenen Differentialgleichung genügt. Können wir nun mit Hilfe dieser beiden Substitutionen zeigen, dass φ durch die allgemeine lineare Substitution

$$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta$$

in $(pq' - p'q)^{\mu} \varphi$ übergeht, so ist die Invarianteneigenschaft für φ nachgewiesen.

Zu diesem Zweck machen wir in f der Reihe nach die folgenden Substitutionen

$$x = x_1 + \frac{p}{p'} y_1, \qquad y = y_1,$$
$$x_1 = y_2, \qquad y_1 = -x_2,$$
$$x_2 = x_3 + \frac{p'q'}{r} y_3, \qquad y_2 = y_3,$$
$$x_3 = -p' x_4, \qquad y_3 = y_4,$$
$$x_4 = \xi, \qquad y_4 = -\frac{r}{p'} \eta,$$

wo $r = pq' - p'q$ ist.

Die drei ersten Substitutionen ändern nach den gemachten Voraussetzungen den Wert von φ nicht. Durch die vierte Substitution erhält φ den Faktor $(-p')^{\mu}$, weil φ nach den Voraussetzungen isobarisch vom Gewichte μ ist. Durch die fünfte Substitution endlich erhält φ den weiteren Faktor $\left(-\frac{r}{p'}\right)^{\mu}$, aus demselben Grunde daher durch alle Substitutionen den Faktor r^{μ}. Da aber die fünf Substitutionen zusammengesetzt die Substitution

$$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta$$

liefern, so geht φ durch dieselbe in $r^{\mu}\varphi$ über; also ist φ eine Invariante.

Statt der Bedingung, dass φ isobarisch und symmetrisch ist, kann man auch voraussetzen, dass φ homogen vom Grade ϱ und vom Gewicht $\frac{1}{2} m\varrho$ ist. Denn setzt man

$$\varphi = \Sigma \tau a_{\alpha}^{\alpha'} a_{\beta}^{\beta'} a_{\gamma}^{\gamma'} \ldots,$$

so ist dann

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \ldots = \tfrac{1}{2} m\varrho$$
$$\alpha' + \beta' + \ldots = \varrho$$

und daraus folgt, dass

$$(m-\alpha)\alpha'+(m-\beta)\beta'+\ldots=m\varrho-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\ldots)=\tfrac{1}{2}m\varrho$$

oder

$$(m-\alpha)\alpha'+(m-\beta)\beta'+\ldots=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\ldots,$$

woraus die Symmetrie der Funktion für die allgemeine Form von φ folgt. Die Symmetrie von φ in Bezug auf die Zahlenkoefficienten, also die Invarianz von φ, ergiebt sich aber erst, wenn man die Relation $\delta'\varphi=0$ (vergl. pag. 110) aus der Relation $\delta\varphi=0$ erschliesst. Dieser Beweis ist in einem allgemeineren Beweise am Schlusse des § 14 enthalten, auf den zu verweisen hier genügen möge.

12. Berechnung der Invarianten einer Form.

Aus dem Vorhergehenden folgt eine einfache Methode zur Berechnung der Invarianten einer Form f. Nachdem man den Grad ϱ der Invariante festgesetzt hat, schreibt man dieselbe in der Form

$$\Sigma C a_0^{e_0} a_1^{e_1}\ldots a_m^{e_m},$$

wo

$$0\,.\,e_0+1\,.\,e_1+2e_2+\ldots=\tfrac{1}{2}m\varrho$$
$$e_0+\ e_1\ +\ e_2\ +\ldots=\varrho$$

ist und bestimmt die numerischen Koefficienten mit Hilfe der Differentialgleichung 9). Einer dieser Koefficienten ist willkürlich, denn die Differentialgleichung ändert sich nicht, wenn man die Invariante mit einer beliebigen Zahl multipliziert.

Beispiel. Es sei $m=4$, $\varrho=2$ und

$$\varphi=Aa_0a_4+Ba_1a_3+Ca_2^2.$$

Die Differentialgleichung liefert

$$a_0a_3(B+4A)+a_1a_2(3B+4C)=0.$$

Setzt man nun $A=1$, so findet man

$$B=-4,\quad C=3,$$

so dass

wird.

$$\varphi=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2$$

Nach dieser Methode sind die Invarianten der Formen zweiter, dritter, vierter und fünfter Ordnung berechnet worden, deren Werte man in den Tabellen am Schluss dieses Werkes findet.

§ 11. Die Invarianten einer Form als Funktionen der Wurzeln.

1. Eine symmetrische Funktion der Wurzeldifferenzen, die jede Wurzel auf gleichem Grad enthält, ist eine Invariante der gegebenen Form.

Beweis. Es sei

1) $$f=a_0(x-\alpha_1y)(x-\alpha_2y)\ldots(x-\alpha_my)$$

die vorgelegte Form und

$$\varphi = a_0^{\mu} \Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)^i (\alpha_1 - \alpha_3)^k (\alpha_2 - \alpha_3)^l \ldots$$

die Invariante. Durch die lineare Substitution

$$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta$$

hat man die Transformationen

$$x - \alpha_i y = (p - \alpha_i p')\xi + (q - \alpha_i q')\eta = (p - \alpha_i p')\left(\xi - \frac{\alpha_i q' - q}{p - \alpha_i p'}\eta\right),$$

$$A_i - A_k = \frac{\alpha_i q' - q}{p - \alpha_i p'} - \frac{\alpha_k q' - q}{p - \alpha_k p'} = (\alpha_i - \alpha_k)\frac{pq' - p'q}{(p - \alpha_i p')(p - \alpha_k p')}.$$

$$A_0 = f(p, p') = a_0 (p - \alpha_1 p')(p - \alpha_2 p') \ldots (p - \alpha_m p').$$

Ist ν die Anzahl der in φ enthaltenen Wurzeldifferenzen, so wird die transformierte Invariante

2) $$\Phi = (pq' - p'q)^{\nu} \cdot \varphi.$$

Denn da jede Wurzel α in φ gleich oft vorkommt, und zwar μ-mal, so wird das Produkt aller Wurzeldifferenzen bei der Transformation den Nenner

$$[(p - \alpha_1 p')(p - \alpha_2 p') \ldots (p - \alpha_m p')]^{\mu}$$

erhalten, durch den A_0^{μ} wieder in a_0^{μ} übergeht, so dass nur $(pq' - p'q)^{\nu}$ schliesslich als Faktor hinzutritt.

Beispiele. Die Funktionen ($a_0 = 1$ gesetzt)

$$\Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2, \quad \Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4),$$

$$\Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2 (\alpha_4 - \alpha_5)^2 (\alpha_5 - \alpha_1)^2$$

sind Invarianten, die beiden ersteren für die Form vierter, die letztere für die fünfter Ordnung, während

$$\Sigma \alpha_5^2 \alpha_6^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2, \quad \Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)^2 (\alpha_5 - \alpha_6)^3$$

keine Invarianten sind, denn die erstere Funktion enthält nicht die Wurzeldifferenzen, die zweite enthält nicht alle Wurzeln gleich oft.

2. Die als Funktion der Wurzeln dargestellte Invariante φ genügt den partiellen Differentialgleichungen:

3) I. $$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} = 0,$$

4) II. $$\alpha_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} + \alpha_2^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} + \ldots + \alpha_m^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} = \varrho s_1 \varphi,$$

wo ϱ der Grad der Invariante in Bezug auf die Koefficienten und $s_1 = \Sigma\alpha$ ist.

Beweis.* I. Die Gleichung

5) $$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_k} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_m} \cdot \frac{\partial a_m}{\partial \alpha_k}$$

---

* Brioschi, Annali di Tortolini, Bd. V. Vergl. auch § 2, 4 und § 2, 8.

geht vermöge der (für die nicht-binomiale Form von f giltigen) Gleichung [§ 2, 1 (4)]

$$-\frac{\partial a_i}{\partial \alpha_k} = a_{i-1} + a_{i-2}\alpha_k + a_{i-3}\alpha_k^2 + \ldots + a_0\alpha_k^{i-1}$$

über in

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = a_0\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (a_1 + a_0\alpha_k)\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + (a_{m-1} + a_{m-2}\alpha_k + \ldots + a_0\alpha_k^{m-1})\frac{\partial \varphi}{\partial a_m}.$$

Bilden wir die Summe der partiellen Ableitungen nach den Wurzeln, so kommt

$$6)\quad -\sum_{k=1}^{k=m}{}_k\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = m a_0\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (m-1)a_1\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + a_{m-1}\frac{\partial \varphi}{\partial a_m} = 0.$$

II. Man findet ferner die Gleichung

$$-\sum_{k=1}^{k=m}\alpha_k^2\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}a_0 s_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}(a_1 s_2 + a_0 s_3) + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_m}(a_0 s_{m+1} + a_1 s_m + \ldots + a_{m-1}s_2),$$

die mit Hilfe der Newtonschen Identitäten (§ 1, 2) übergeht in

$$-\sum_{k=1}^{k=m}\alpha_k^2\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}(a_1 s_1 + 2a_2) - \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}(a_2 s_1 + 3a_3) - \ldots - \frac{\partial \varphi}{\partial a_m}\cdot a_m s_1.$$

Indem man $s_1 a_0\frac{\partial \varphi}{\partial a_0}$ addiert und subtrahiert, erhält man

$$\sum_{k=1}^{k=m}\alpha_k^2\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = s_1\sum_{k=0}^{k=m}a_k\frac{\partial \varphi}{\partial a_k} - s_1 a_0\frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + 2a_2\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \ldots + m a_m\frac{\partial \varphi}{\partial a_{m-1}}.$$

Nun genügt φ als homogene Funktion ϱ^{ten} Grades der Identität

$$\sum_{k=0}^{k=m}a_k\frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = \varrho\varphi$$

und ferner ist, weil $a_0 s_1 + a_1 = 0$,

$$-s_1 a_0\frac{\partial \varphi}{\partial a_0} = a_1\frac{\partial \varphi}{\partial a_0},$$

woraus

$$\sum_{k=1}^{k=m}\alpha_k^2\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} - s_1\varrho\varphi = a_1\frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + 2a_2\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \ldots + m a_m\frac{\partial \varphi}{\partial a_{m-1}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet, weil φ eine Invariante ist (§ 10, 8), so dass

$$\sum_{k=1}^{k=m} \alpha_k^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = s_1 \varrho \varphi.$$

Anmerkung 1. Man kann auch noch die Gleichung ableiten

$$\sum_1^m \alpha_k \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \alpha_k} = -a_0 s_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} - (a_1 s_1 + a_0 s_2) \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} - \\ - (a_2 s_1 + a_1 s_2 + a_0 s_3) \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} - \ldots,$$

die zufolge der Newtonschen Identitäten übergeht in

$$7) \qquad \sum_1^m \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + m a_m \frac{\partial \varphi}{\partial a_m}.$$

Nun genügt φ, dessen Gewicht konstant gleich $\frac{1}{2} m\varrho$ ist, der Gleichung (§ 2, 2)

$$a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + m a_m \frac{\partial \varphi}{\partial a_m} = \tfrac{1}{2} m \varrho \varphi,$$

so dass

$$7a) \qquad \sum_1^m \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = \tfrac{1}{2} m \varrho \varphi.$$

Anmerkung 2. Ist die Form f mit Binomialfaktoren versehen, so genügt φ den Gleichungen

$$8) \qquad -\sum_1^m \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots = 0,$$

$$9) \qquad \sum_1^m \alpha_k^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} - s_1 \varrho \varphi = m a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + (m-1) a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \ldots = 0,$$

$$9a) \qquad \sum_1^m \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots = \tfrac{1}{2} m \varrho \varphi.$$

3. Der kanonische Ausdruck einer Form ungerader Ordnung kann mit Hilfe der vorstehenden Sätze so umgeformt werden, dass die Koefficienten Invarianten sind.

Die Form $(2m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$10) \qquad f = a_0 x^{2m-1} + \binom{2m-1}{1} a_1 x^{2m-2} y + \ldots + a_{2m-1} y^{2m-1}$$

wurde auf den kanonischen Ausdruck

$$11) \quad b_1 (x + \alpha_1 y)^{2m-1} + b_2 (x + \alpha_2 y)^{2m-1} + \ldots + b_m (x + \alpha_m y)^{2m-1}$$

gebracht, wo $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ als Wurzeln einer Gleichung m^{ten} Grades gegeben waren (vergl. § 8).

Setzen wir nun

$$12) \qquad x = \frac{\sqrt[2m-1]{b_1}}{\alpha_2 - \alpha_3} \cdot \{\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3)\xi + \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3)\eta\},$$

$$13) \qquad y = \frac{\sqrt[2m-1]{b_1}}{\alpha_2 - \alpha_3} \cdot \{(\alpha_3 - \alpha_2)\xi + (\alpha_3 - \alpha_1)\eta\},$$

so wird

$$14) \quad \begin{cases} x + \alpha_1 y = \dfrac{\sqrt[2m-1]{b_1}}{\alpha_2 - \alpha_3}(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)\eta, \\ x + \alpha_2 y = \sqrt[2m-1]{b_1}(\alpha_1 - \alpha_2)\xi, \\ x + \alpha_k y = \dfrac{\sqrt[2m-1]{b_1}}{\alpha_2 - \alpha_3}\{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_k)\xi + (\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_k)\eta\}. \end{cases}$$

Setzen wir ferner

$$15) \quad \begin{cases} b_1^2\left(\dfrac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_3}\right)^{2m-1} = B_1, \\ b_1 b_k (\alpha_1 - \alpha_k)^{2m-1} = B_k \ (k > 1), \\ \dfrac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_k)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_k)} = \mathsf{A}_k, \end{cases}$$

so geht 11) über in

$$16) \qquad f = B_1\eta^{2m-1} + B_2\xi^{2m-1} + B_3(\xi + \mathsf{A}_3\eta)^{2m-1} + \\ + \ldots + B_m(\xi + \mathsf{A}_m\eta)^{2m-1},$$

wobei man zunächst bemerke, dass $\mathsf{A}_3 = +1$.

Nun lässt sich beweisen, dass die Funktionen B und A Invarianten der gegebenen Form sind.*

Beweis. Die für die Invarianten charakteristischen Operationen

$$a_0\frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + (2m-1)a_{2m-2}\frac{\partial}{\partial a_{2m-1}},$$

$$(2m-1)a_1\frac{\partial}{\partial a_0} + (2m-2)a_2\frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + a_{2m-1}\frac{\partial}{\partial a_{2m-2}}$$

sollen symbolisch durch δ und δ' bezeichnet werden. Diese beiden Prozesse sollen nun auf das für b und α giltige System [§ 8, 1 (3)] angewandt werden, welches dadurch übergeht in die beiden Systeme:

* Betti, Annali di Tortolini, Bd. VII.

$$17)\quad \begin{cases} \delta b_1 + \delta b_2 + \ldots + \delta b_m = 0 \\ \alpha_1 \delta b_1 + \alpha_2 \delta b_2 + \ldots + \alpha_m \delta b_m + b_1 \delta \alpha_1 + b_2 \delta \alpha_2 + \ldots + b_m \delta \alpha_m = 1 a_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^{2m-1} \delta b_1 + \alpha_2^{2m-1} \delta b_2 + \ldots + \alpha_m^{2m-1} \delta b_m + (2m-1) b_1 \alpha_1^{2m-2} \delta \alpha_1 + \\ \quad + (2m-1) b_2 \alpha_2^{2m-2} \delta \alpha_2 + \ldots + (2m-1) b_m \alpha_m^{2m-2} \delta \alpha_m = \\ \quad = (2m-1) a_{2m-2}. \end{cases}$$

$$18)\quad \begin{cases} \delta' b_1 + \delta' b_2 + \ldots + \delta' b_m = (2m-1) a_1 \\ \alpha_1 \delta' b_1 + \alpha_2 \delta' b_2 + \ldots + \alpha_m \delta' b_m + b_1 \delta' \alpha_1 + b_2 \delta' \alpha_2 + \ldots + b_m \delta' \alpha_m = (2m-2) a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^{2m-1} \delta' b_1 + \alpha_2^{2m-1} \delta' b_2 + \ldots + \alpha_m^{2m-1} \delta' b_m + (2m-1) b_1 \alpha_1^{2m-2} \delta' \alpha_1 + \\ \quad + (2m-1) b_2 \alpha_2^{2m-2} \delta' \alpha_2 + \ldots + (2m-1) b_m \alpha_m^{2m-2} \delta' \alpha_m = 0. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Systemen 17) und 18) erhält man durch Auflösung, wegen derselben Gleichungen § 8, 1, 3)

$$\delta b_i = 0, \qquad \delta \alpha_i = 1,$$
$$\delta' b_i = (2m-1) b_i \alpha_i, \quad \delta' \alpha_i = -\alpha_i^2.$$

Vermittelst dieser Gleichungen ergiebt sich alsdann aus 15)

$$19)\quad \begin{cases} \delta B_1 = 0, & \delta B_k = 0, & \delta \mathsf{A}_k = 0, \\ \delta' B_1 = 0, & \delta' B_k = 0, & \delta' \mathsf{A}_k = 0. \end{cases}$$

Da nun durch die symbolischen Gleichungen

$$\delta \varphi = 0, \quad \delta' \varphi = 0$$

und durch die Bedingung der Homogenëität nach dem Früheren offenbar eine Invariante φ definiert wird,* so folgt aus 19) und weil die α_i homogene Funktionen 0ter Dimension der Koefficienten, die b homogene Funktionen erster Dimension, also auch die B und A homogene Funktionen sind, dass B_1, B_k, A_k Invarianten sind.

4. Man kann den Satz 3 auch durch direkte Substitution beweisen.

Transformiert man nämlich direkt die kanonische Gleichungsform durch die Substitution

$$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta,$$

deren Modul

$$r = pq' - p'q,$$

so gehen deren Grössen α über in

---

* Denn vermöge $\delta\varphi = 0$ ist die Substitution $x = \xi + \lambda\eta$, $y = \eta$ ohne Änderung von φ möglich, vermöge $\delta'\varphi = 0$ ebenso die Substitution $x = \xi$, $y = \mu\xi + \eta$, die zusammen eine Substitution von der Determinante 1 liefern. Verbindet man damit die wegen der Homogenëität von φ erlaubte Substitution $x = \varrho\xi$, $y = \varrho\eta$, so erhält man alle Substitutionen.

$$\alpha' = \frac{q + q'\alpha}{p + p'\alpha}.$$

Der Ausdruck A_k, der nur die Differenzen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ enthält, und zwar im Zähler und Nenner eine Wurzel in gleichem Grade, bleibt demnach durch die angegebene Substitution ungeändert. Dagegen gehen b und B über in

$$b'_1 = b_1 (p + p'\alpha_1)^{2m-1}$$

$$B'_1 = b_1^2 (p + p'\alpha_1)^{2(2m-1)} \cdot \left(\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_3}\right)^{2m-1} \cdot \frac{r^{2m-1}}{(p + p'\alpha_1)^{2(2m-1)}} =$$
$$= r^{2m-1} \cdot B_1$$

$$B'_k = b_1 (p + p'\alpha_1)^{2m-1} \cdot b_k (p + p'\alpha_k)^{2m-1} \cdot (\alpha_1 - \alpha_k)^{2m-1} \cdot$$
$$\cdot \frac{r^{2m-1}}{(p + p'\alpha_1)^{2m-1} (p + p'\alpha_k)^{2m-1}} = r^{2m-1} B_k,$$

woraus die Invarianteneigenschaft der Grössen B und A unmittelbar ersichtlich ist.

§ 12. Anzahl der einer Form m^{ter} Ordnung zugehörigen Invarianten ϱ^{ten} Grades.

1. Invariante und Semiinvariante. Jede homogene Funktion φ ϱ^{ten} Grades einer Form m^{ter} Ordnung vom konstanten Gewicht $\frac{1}{2}m\varrho$, welche der Operation

$$\delta\varphi = \left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + m a_{m-1} \frac{\partial}{\partial a_m}\right)\varphi = 0$$

Genüge leistet, ist nach § 10 eine Invariante. Wenn die Bedingung $\delta = 0$ erfüllt, das Gewicht der homogenen Funktion ϱ^{ten} Grades aber von $\frac{1}{2}m\varrho$ verschieden ist, so heisse die betrachtete Funktion eine Semiinvariante.*

Zu den Semiinvarianten gehören nach § 4, 3 die symmetrischen Funktionen der Wurzeldifferenzen, die Sturmschen Reste, die Koefficienten der Waringschen Gleichung der quadrirten Wurzeldifferenzen, die ersten Koefficienten der noch zu diskutierenden Kovarianten. So ist die Funktion

$$a_0^2 a_3^2 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3 + 4 a_0 a_2^3 + 4 a_1^3 a_3 - 3 a_1^2 a_2^2$$

für die Formen von der Ordnung $m > 3$ eine Semiinvariante, weil sie der Operation $\delta = 0$ genügt, aber weder symmetrisch noch vom konstanten Gewicht $p = \frac{1}{2}m.4$ ist.

Bei der Berechnung der Invarianten und Semiinvarianten vermittelst der Operation $\delta = 0$ (vergl. § 10, 12) entsteht die Frage nach

* Péninvariant.

der Anzahl der Funktionen vom Grade ϱ und vom Gewicht p, die der Gleichung $\delta = 0$ genügen, d. h. nach der Anzahl der Invarianten und Semiinvarianten ϱ^{ten} Grades, die einer Form m^{ter} Ordnung zugehören.

Soll die isobarische homogene Funktion φ ϱ^{ten} Grades, p^{ten} Gewichts der Koefficienten einer Form m^{ter} Ordnung f vermöge der Gleichung $\delta\varphi = 0$ bestimmt werden, so ist zunächst die Anzahl C_p der unbestimmten Koefficienten gleich der Anzahl der in φ enthaltenen Glieder. Ebenso oft kann die Zahl p als Summe von ϱ Zahlen der Reihe 0, 1, 2, ..., m mit Wiederholung dargestellt werden. Aber durch Anwendung der Operation δ auf φ sinkt das Gewicht um 1, während der Grad unverändert gleich ϱ bleibt. Da nun die Anzahl der Glieder in $\delta\varphi$, die mit C_{p-1} bezeichnet werden soll, offenbar kleiner ist als die Anzahl der Glieder C_p in φ, so bleiben $C_p - C_{p-1} = P$ Koefficienten willkürlich, weil für die C_p Unbestimmten nur das durch $\delta\varphi = 0$ gegebene System von C_{p-1} Gleichungen zur Verfügung steht. Dabei wird vorausgesetzt, dass die C_{p-1} Bedingungsgleichungen unter einander unabhängig sind, was nach Gordan* nicht immer der Fall ist. Also genügen der Gleichung $\delta\varphi = 0$ nur im allgemeinen P linear von einander unabhängige Funktionen φ ϱ^{ten} Grades, p^{ten} Gewichts.

2. Allerdings ist die Anzahl dieser Funktionen φ eine unbeschränkte, allein es lässt sich zeigen, dass alle weiteren Invarianten, die den charakteristischen Gleichungen genügen, lineare Funktionen von P von einander unabhängigen Invarianten sind.

Betrachten wir z. B. den Fall $P = 2$. Den beiden Systemen der willkürlichen Koefficienten

$$M_1, M_2 \text{ und } M'_1, M'_2$$

mögen die beiden von einander unabhängigen Invarianten

$$J \text{ und } J'$$

entsprechen. Ist nun vermöge eines dritten Systems von willkürlichen Koefficienten M''_1, M''_2 die Invariante J'' gebildet worden, so soll man die lineare Beziehung haben

$$1) \qquad J'' = \mu J + \nu J',$$

wo μ, ν zwei Zahlenkoefficienten bedeuten.

Beweis. Die Glieder der verschiedenen Invarianten stimmen bis auf die Zahlenkoefficienten überein. Also haben J, J', J'' die Formen

---

* Crelle Journal Bd. 69, und Cayley, 8tes Memoir upon Quantics. Phil. Trans. Bd. 157, 1867.

$$2)\quad \begin{cases} J = M_1\ (A_1) + M_2\ (A_2) + \ldots + M_i\ (A_i) + \ldots \\ J' = M'_1\ (A_1) + M'_2\ (A_2) + \ldots + M'_i\ (A_i) + \ldots \\ J'' = M''_1 (A_1) + M''_2 (A_2) + \ldots + M''_i (A_i) + \ldots, \end{cases}$$

wo (A_1), (A_2), ..., (A_i), ... die den sämtlichen Invarianten desselben Grades und Gewichtes gemeinsamen Glieder (ohne die Koefficienten) bezeichnen, die M_i, M'_i, ... die Zahlenkoefficienten.

Ist nun den Bedingungsgleichungen zufolge, welche nur lineare homogene Beziehungen zwischen den Koefficienten liefern,

$$3)\quad M_i = \varkappa M_1 + \lambda M_2,$$

so hat man auch

$$4)\quad \begin{cases} M'_i = \varkappa M'_1 + \lambda M'_2, \\ M''_i = \varkappa M''_1 + \lambda M''_2. \end{cases}$$

Bilden wir nun die Gleichung

$$5)\quad \mu J + \nu J' = (\mu M_1 + \nu M'_1)(A_1) + \ldots + (\mu M_i + \nu M'_i)(A_i) + \ldots$$

und bestimmen μ, ν aus den Gleichungen

$$6)\quad \begin{cases} \mu M_1 + \nu M'_1 = M''_1, \\ \mu M_2 + \nu M'_2 = M''_2, \end{cases}$$

so hat man

$$\mu M_i + \nu M'_i = \mu(\varkappa M_1 + \lambda M_2) + \nu(\varkappa M'_1 + \lambda M'_2) =$$
$$= \varkappa(\mu M_1 + \nu M'_1) + \lambda(\mu M_2 + \nu M'_2) = \varkappa M''_1 + \lambda M''_2 = M''_i$$

und demnach

$$\mu J + \nu J' = M''_1 (A_1) + M''_2 (A_2) + \ldots = J''.$$

Dieser Satz gilt allgemein. Sei J eine Invariante, welche einem partikulären System der P willkürlichen Koefficienten zugehört, während $J_1, J_2, \ldots, P$ von einander unabhängige Invarianten sind, die P Systemen der P willkürlichen Koefficienten entsprechen. Eine jede dieser Invarianten J, J_1, J_2, ... kann dann vermöge der Bedingungsgleichungen $\delta\varphi = 0$ dargestellt werden als lineare homogene Funktion von denselben P Gliedern, nämlich

$$\begin{aligned} J &= M_1\ (A_1) + \ldots + M_P\ (A_P) \\ J_1 &= M_1^{(1)}(A_1) + \ldots + M_P^{(1)}(A_P) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ J_P &= M_1^{(P)}(A_1) + \ldots + M_P^{(P)}(A_P), \end{aligned}$$

wo die (A_i) Aggregate aus den Koefficienten der Form sind, woraus sich durch Elimination dieser P Glieder $(A_1), \ldots, (A_P)$ die Invariante J als lineare homogene Form von $J_1, \ldots, J_P$ ergiebt. Man hat also das Theorem:

Die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten ϱ^{ten} Grades, p^{ten} Gewichts einer Form m^{ter} Ordnung ist gleich

der Anzahl P der Koefficienten, welche die Bedingungsgleichungen, die aus der Gleichung $\delta = 0$ sich ergeben, willkürlich lassen.*

3. Die Anzahl der Invarianten hängt von der oben durch C_p bezeichneten Kombinationszahl ab. Es handelt sich also zunächst um die Bestimmung von C_p, zu der wir den folgenden Hilfssatz benutzen:

Eine Zahl p kann als Summe von ϱ Zahlen der Reihe 0, 1, 2, ..., m so oft dargestellt werden, als der Koefficient von $x^p z^\varrho$ in der Entwicklung nach steigenden Potenzen von z der Funktion

$$7) \qquad Z = \frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^2z)\dots(1-x^mz)}$$

beträgt.**

Denn schreibt man $\frac{1}{1-x^iz}$ in der Form

$$\frac{1}{1-x^iz} = 1 + x^iz + x^{2i}z^2 + x^{3i}z^3 + \dots,$$

so ist Z das Produkt von $m+1$ solchen Summen, entsprechend den Werten 0, 1, 2, ..., m, die man i erteilen muss. Um dabei irgend ein Glied des Koefficienten von z^ϱ zu erhalten, hat man dabei z^ϱ in Faktoren

$$z^\varrho = z^k . z^l \dots$$

zu zerlegen und jedem solchen Faktor z^k entsprechend x^{ki} zu nehmen, wo

$$k + l + \dots = \varrho,$$

i aus den Zahlen 0, 1, ..., m und zwar für jeden Faktor z^k, z^l, ... verschieden, zu nehmen ist.

In diesem Produkt tritt also das Glied $x^p z^\varrho$ so oft auf, als die Zahl p aus ϱ Zahlen der Reihe 0, 1, 2, ..., m mit unbedingter Wiederholung zusammengesetzt werden kann.

Die Entwicklung von Z nach steigenden Potenzen von z gebe den Ausdruck

$$8) \qquad Z = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots + A_\varrho z^\varrho + \dots,$$

wo A_1, A_2, ..., A_ϱ ganze Funktionen von x sind.

---

* Cayley, 2tes Memoir upon Quantics. Phil. Trans. Bd. 146, 1856, pag. 101. Unter „unabhängig" ist verstanden, dass keine lineare Relation zwischen den Invarianten besteht.

** Cayley, Phil. Trans. Bd. 146 pag. 134 (1856): „Researches on the partition of numbers".

4. Um C_p zu berechnen,* vertausche man zunächst in 7) z mit xz und entwickle diesen Ausdruck nach steigenden Potenzen von z, nämlich

$$(1-z)Z=(1-x^{m+1}z)(1+A_1xz+A_2x^2z^2+\ldots+A_\varrho x^\varrho z^\varrho+\ldots)$$

und setze die Koefficienten von z^ϱ auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich. Dann ist

$$A_\varrho(1-x^\varrho)=A_{\varrho-1}(1-x^{m+\varrho});\quad A_\varrho=\frac{1-x^{m+\varrho}}{1-x^\varrho}\cdot A_{\varrho-1}.$$

Nun ist $A_0=1$, also

$$A_1=\frac{1-x^{m+1}}{1-x},\quad A_2=\frac{(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})}{(1-x)(1-x^2)},$$

$$A_3=\frac{(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})(1-x^{m+3})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},\text{ u. s. w.}$$

9) $$A_\varrho=\frac{(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})\ldots(1-x^{m+\varrho})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^\varrho)}=\psi(x).$$

Setzt man

10) $$\psi(x)=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots,$$

wo C_p die oben angegebene Bedeutung hat, bildet ferner

11) $$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=\frac{C_1+2C_2x+3C_3x^2+\ldots}{1+C_1x+C_2x^2+\ldots}$$

und setzt den Zähler von $\psi(x)$ in 9) $=f(x)$, den Nenner von 9) $=\varphi(x)$, so hat man identisch

12) $$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Bezeichnet man nun die Wurzeln der Gleichungen $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ bezüglich durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$, so ist

13) $$\begin{cases}-\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\Sigma\alpha^{-1}+\Sigma\alpha^{-2}x+\Sigma\alpha^{-3}x^2+\ldots\\ -\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\Sigma\beta^{-1}+\Sigma\beta^{-2}x+\Sigma\beta^{-3}x^2+\ldots\end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

14) $$-\Sigma\alpha^{-k}+\Sigma\beta^{-k}=s_k,$$

so findet man

15) $$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=s_1+s_2x+s_3x^2+\ldots$$

---

* Brioschi, Annali di Tortolini, VIII (1857).

und durch Gleichsetzung der Koefficienten von 11) und 15) das System von Identitäten

$$16)\quad \begin{cases} C_1 = s_1 \\ 2C_2 = s_1 C_1 + s_2 \\ 3C_3 = s_1 C_2 + s_2 C_1 + s_3 \\ 4C_4 = s_1 C_3 + s_2 C_2 + s_3 C_1 + s_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ pC_p = s_1 C_{p-1} + s_2 C_{p-2} + \ldots + s_{p-1} C_1 + s_p, \end{cases}$$

woraus sich ergiebt

$$17)\quad \Pi(p).C_p = \begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & 0 & \ldots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & -3 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{p-1} & s_{p-2} & s_{p-3} & s_{p-4} & \ldots & -(p-1) \\ s_p & s_{p-1} & s_{p-2} & s_{p-3} & \ldots & s_1 \end{vmatrix}.$$

5. Zur Berechnung von s_i dient nun der folgende Weg. In den Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ sind die Wurzeln α, β aus Ausdrücken der Form

$$x^k - 1 = 0$$

zu berechnen und s_i ist eine symmetrische Funktion der Wurzeln jeder dieser binomischen Gleichungen. Der auf diese binomische Gleichung bezügliche Teil der Summe s_i hat den Wert k oder 0, je nachdem i ein Vielfaches von k ist oder nicht. Nun kann k für $f(x)$ die Werte $m+1, m+2, \ldots, m+\varrho$, für $\varphi(x)$ die Werte $1, 2, \ldots, \varrho$ annehmen. Bedeutet daher $\varepsilon_k^{(i)}$ eine Grösse, die den Wert k annimmt, sobald i ein Vielfaches von k ist, und die verschwindet, sobald dies nicht der Fall ist, so hat man für s_i den Ausdruck

$$18)\quad s_i = 1 + \varepsilon_2^{(i)} + \varepsilon_3^{(i)} + \ldots + \varepsilon_\varrho^{(i)} - \varepsilon_{m+1}^{(i)} - \varepsilon_{m+2}^{(i)} - \ldots - \varepsilon_{m+\varrho}^{(i)}.$$

Beispiel. Es soll C_p für $p=6$, $\varrho=3$, $m=5$ gesucht werden. Mit Hilfe der Formel

$$s_i = 1 + \varepsilon_2^{(i)} + \varepsilon_3^{(i)} - \varepsilon_6^{(i)} - \varepsilon_7^{(i)} - \varepsilon_8^{(i)}$$

findet man

$$s_1 = 1,\ s_2 = 3,\ s_3 = 4,\ s_4 = 3,\ s_5 = 1,\ s_6 = 0,$$

woraus schliesslich

$$\Pi(6).C_6 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \Pi(6).6$$

und

$$C_6 = 6.$$

Anmerkung. Das System (16) ist von derselben Form wie die Newtonschen Identitäten (§ 1, 2), wenn man darin $a_0 = 1$ setzt, an Stelle von a_i C_i einführt und s_i mit $-s_i$ vertauscht. Man kann deshalb auch C_p nach der Formel 40) in § 1, 4 ausdrücken, nämlich

$$19) \qquad C_p = \sum \frac{1}{\Pi(\lambda_1)\dots\Pi(\lambda_p)} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\lambda_1} \cdots \left(\frac{s_p}{p}\right)^{\lambda_p},$$

wo $\Pi(\lambda) = 1.2\dots\lambda$; $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + p\lambda_p = p$ ist, und die Summe über alle dieser Bedingung genügenden Werte der λ auszudehnen ist.

6. Die Anzahl C_p kann man auch direkt als numerischen Koefficienten von x^p in dem nach steigenden Potenzen von x entwickelten Ausdruck

$$\frac{(1-x^{m+1})\dots(1-x^{m+\varrho})}{(1-x)\dots(1-x^{\varrho})}$$

berechnen. Dieser Koefficient soll (nach Jacobi) symbolisch durch

$$20) \qquad C_p = \left\{\frac{(1-x^{m+1})\dots(1-x^{m+\varrho})}{(1-x)\dots(1-x^{\varrho})}\right\}_{x^p}$$

bezeichnet werden.

Beispiel. C_p zu finden für $p=6$, $\varrho=3$, $m=5$. Man hat

$$C_6 = \left\{\frac{(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right\}_{x^6} =$$

$$= \{(1+x^3)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)\}_{x^6} =$$
$$= \{(1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+\dots)(1+x^2+x^4+x^6)\}_{x^6} =$$
$$= \{(1+x^2+2x^4+2x^6+\dots)(1+x^2+x^4+x^6)\}_{x^6} = 1+1+2+2 = 6.$$

7. Multipliziert man den Ausdruck 9) für $\psi(x) = A_\varrho$ im Zähler und Nenner mit

$$(1-x^{\varrho+1})(1-x^{\varrho+2})\dots(1-x^m),$$

so hat man

$$21) \qquad \psi(x) = \frac{(1-x^{\varrho+1})(1-x^{\varrho+2})\dots(1-x^{\varrho+m})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)},$$

was den Koefficienten von z^m in der Entwicklung von

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)\dots(1-x^{\varrho}z)}$$

nach steigenden Potenzen von z darstellt. Also ist $\psi(x)$ sowohl der Koefficient von z^ϱ in der Entwicklung von

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)\dots(1-x^m z)},$$

als auch der Koefficient von z^m in der Entwicklung von

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)\dots(1-x^{\varrho}z)}.$$

Aus dieser doppelten Bedeutung von $\psi(x)$ fliesst der Satz:

Eine Zahl p kann ebenso oft als Summe von ϱ Zahlen der Reihe 0, 1, 2, ..., m, als von m Zahlen der Reihe 0, 1, 2, ..., ϱ dargestellt werden.

Beispiel. Es sei $p=8$, $\varrho=3$, $m=5$.

Aus den sechs Elementen 0, 1, 2, 3, 4, 5 kann 8 auf sechs Arten als Summe von drei Elementen gebildet werden, nämlich

035, 044, 125, 134, 224, 233.

Ebenso oft kann 8 als Summe von fünf Zahlen der Reihe

0, 1, 2, 3

dargestellt werden, nämlich

00233, 01133, 01223, 02222, 11123, 11222.

8. Der letzte Satz von Nr. 7 kann auch so ausgesprochen werden:

Eine aus den Elementen a_0, a_1, ..., a_m komponierte Funktion ϱ^{ten} Grades, p^{ten} Gewichtes hat ebensoviel Glieder als eine aus den Elementen a_0, a_1, ..., a_ϱ komponierte Funktion m^{ten} Grades, p^{ten} Gewichts; z. B. die Funktion

$$Aa_0a_4+Ba_1a_3+Ca_2^2,$$

wo $p=4$, $\varrho=2$, $m=4$ ist, hat dieselbe Gliederzahl wie

$$A'a_1^4+B'a_0^2a_2^2+C'a_0a_1^2a_2,$$

wo $p=4$, $\varrho=4$, $m=2$ ist.

Anmerkung. Dieser Satz giebt nur dann genauen Aufschluss über die Anzahl der Glieder im Ausdruck einer symmetrischen Funktion der Wurzeln, wenn man denselben mit Koefficienten in unbestimmter Form zu Grunde legt. So hat z. B. die symmetrische Funktion

$$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3=a_1a_2a_3-3a_0a_3^2+4a_0a_2a_4-3a_1^2a_4+7a_0a_1a_5-12a_0^2a_6$$

im allgemeinen sechs Glieder und reduziert sich für $m=5$ auf fünf Glieder, da in diesem Fall $-12a_0^2a_6$ verschwindet. Trotzdem findet man für $m=5$ $C_p=6$, und diese Zahl stimmt auch, sobald man die Funktion mit unbestimmten Koefficienten zu Grunde legt. Denn in der allgemeinen Form ist noch das Glied a_2^3 enthalten, dessen Koefficient aber Null ist.

9. Auch in der folgenden Form kann der vorstehende Satz ausgesprochen werden:

Die Anzahl der Lösungen der beiden Gleichungen

$$23) \quad \begin{cases} m\alpha_m + (m-1)\alpha_{m-1} + \ldots + 2\alpha_2 + \alpha_1 = p \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = \varrho \end{cases}$$

ist gleich der Anzahl der Lösungen des Systems

$$24) \quad \begin{cases} \varrho\beta_\varrho + (\varrho-1)\beta_{\varrho-1} + \ldots + 2\beta_2 + \beta_1 = p \\ \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\varrho = m, \end{cases}$$

wo α und β alle positiven ganzzahligen Werte, die Null nicht ausgeschlossen, annehmen können.

Wir geben von diesem Satze noch einen direkten Beweis.*

Jede Lösung des ersten Systems ist eine Lösung der Gleichung

$$25) \quad (\alpha_m + \alpha_{m-1} + \ldots + \alpha_1) + (\alpha_m + \ldots + \alpha_2) + \ldots + (\alpha_m + \alpha_{m-1}) + \alpha_m = p,$$

wodurch aber zugleich die Zahl p in m Teile, welche die Zahl ϱ nicht überschreiten dürfen, geteilt wird. Man hat also dann die Zahl p aus m Zahlen der Reihe 0, 1, 2, ..., ϱ auf alle Weisen zu komponieren, wie in 24). Es sei z. B. $p = 30$, $\varrho = 6$, $m = 8$. Den Lösungen (α):

$$\begin{aligned} &8.1+7.0+6.1+5.2+4.0+3.2+2.0+1.0=30 \\ &1+0+1+2+0+2+0+0+0=6, \\ &8.0+7.1+6.1+5.1+4.3+3.0+2.0+1.0=30 \\ &0+1+1+1+3+0+0+0+0=6, \\ &8.1+7.0+6.2+5.1+4.1+3.0+2.0+1.1=30 \\ &1+0+2+1+1+0+0+1+0=6 \end{aligned}$$

entsprechen die konjugierten Lösungen (β):

$$\begin{aligned} &6.3+5.0+4.2+3.0+2.1+1.2=30 \\ &3+0+2+0+1+2+0=8, \\ &6.4+5.0+4.0+3.1+2.1+1.1+0.1=30 \\ &4+0+0+1+1+1+1=8, \\ &6.1+5.3+4.1+3.1+2.0+1.2=30 \\ &1+3+1+1+0+2+0=8, \end{aligned}$$

und man hat die beiden Systeme (25):

$$\begin{aligned} &6+6+6+4+4+2+1+1=30 \\ &6+6+6+6+3+2+1+0=30 \\ &6+5+5+5+4+3+1+1=30, \\ &8+6+5+5+3+3=30 \\ &7+6+5+4+4+4=30 \\ &8+6+6+5+4+1=30. \end{aligned}$$

* Bellavitis, Sulla partizione dei numeri. Annali di Matematica t. 2, 1859.

10. Die Zahl der durch die Gleichung $\delta\varphi = 0$ unbestimmt gelassenen Koefficienten war gleich $P = C_p - C_{p-1}$ gefunden. Nun ist C_{p-1} der Koefficient von $x^{p-1}z^\varrho$ in der Entwicklung von

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)\dots(1-x^m z)},$$

oder der Koefficient von $x^p z^\varrho$ in der Entwicklung von

$$\frac{x}{(1-z)(1-xz)\dots(1-x^m z)};$$

also ist P der Koefficient von $x^p z^\varrho$ in der Entwicklung von

$$\frac{1-x}{(1-z)(1-xz)\dots(1-x^m z)} = (1-x)\sum_0^m{}^\varrho A_\varrho z^\varrho = (1-x)Z = Z'.$$

Nun ist aber

$$A_\varrho = \psi(x) = \frac{(1-x^{m+1})\dots(1-x^{m+\varrho})}{(1-x)\dots(1-x^\varrho)},$$

also

$$Z' = \sum \frac{(1-x^{m+1})\dots(1-x^{m+\varrho})}{(1-x^2)\dots(1-x^\varrho)} \cdot z^\varrho$$

und schliesslich

$$26) \qquad P = \left\{\frac{(1-x^{m+1})\dots(1-x^{m+\varrho})}{(1-x^2)\dots(1-x^\varrho)}\right\}_{x^p}$$

was den Koefficienten von x^p in der Entwicklung des eingeklammerten Ausdrucks bedeutet.

Setzt man (18)

$$27) \quad \varepsilon_2^{(i)} + \varepsilon_3^{(i)} + \dots + \varepsilon_\varrho^{(i)} - \varepsilon_{m+1}^{(i)} - \varepsilon_{m+2}^{(i)} - \dots - \varepsilon_{m+\varrho}^{(i)} = s_i - 1 = \sigma_i,$$

so findet man mittelst der Formeln 16)

$$28) \qquad \Pi(p).P = \begin{vmatrix} \sigma_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & -3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_p & \sigma_{p-1} & \sigma_{p-2} & \sigma_{p-3} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix}.$$

11. Anwendung auf die Lehre von den Invarianten.

Ist m die Ordnung der Form, ϱ der Grad der Invariante, $p = \frac{1}{2}m\varrho$ das Gewicht der Invariante, so hat man (nach Nr. 8) den Satz:

Die Anzahl der Invarianten ϱ^{ten} Grades einer Form m^{ter} Ordnung ist gleich der Anzahl der Invarianten m^{ten} Grades einer Form ϱ^{ter} Ordnung.

Für $\varrho = 2$ ist $p = m$ und man bestimmt den Koefficienten von x^m in der Entwicklung von

$$\frac{(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})}{(1-x^2)} = (1-x^{m+1}-x^{m+2}+x^{2m+3}).(1+x^2+x^4+\ldots),$$

der für ein gerades m Eins, für ein ungerades m Null ist. Also ist bei geradem m $P=1$, bei ungeradem $P=0$.

Daher:

Formen gerader Ordnung haben eine und nur eine Invariante zweiten Grades.

Formen ungerader Ordnung haben keine Invariante zweiten Grades.

12. Es soll die Anzahl der Semiinvarianten vierten Grades, vom Gewicht 6, einer Form fünfter Ordnung bestimmt werden.

Eine solche Semiinvariante vierten Grades lautet für Formen fünfter Ordnung in unbestimmter Form:

$$J = Aa_0^2a_1a_5 + Ba_0^2a_2a_4 + Ca_0a_1^2a_4 + Da_0^2a_3^2 + Ea_0a_1a_2a_3 + Fa_1^3a_3 + Ga_0a_2^3 + Ha_1^2a_2^2.$$

Führt man den δ-Prozess aus, so kommt:

$$\delta J = Aa_0^3a_5 + (5A+2B+2C)a_0^2a_1a_4 + (4B+6D+E)a_0^2a_2a_3 + (4C+2E+3F)a_0a_1^2a_3 + (3E+6G+2H)a_0a_1a_2^2 + (3F+4H)a_1^3a_2 = 0.$$

Zur Bestimmung der acht Koefficienten $A, B, \ldots, H$ stehen sechs Gleichungen zur Verfügung; also existieren $8-6=2$ Semiinvarianten, die den folgenden Lösungen entsprechen:

$A=0,\ B=0,\ C=0,\ D=1,\ E=-6,\ F=4,\ G=4,\ H=-3,$
$A=0,\ B=1,\ C=-1,\ D=-1,\ E=2,\ F=0,\ G=-1,\ H=0,$

und welche lauten:

$$J_4 = a_0^2a_3^2 - 6a_0a_1a_2a_3 + 4a_1^3a_3 + 4a_0a_2^3 - 3a_1^2a_2^2,$$
$$J'_4 = a_0^2a_2a_4 - a_0a_1^2a_4 - a_0^2a_3^2 + 2a_0a_1a_2a_3 - a_0a_2^3.$$

Die Formeln 27) und 28) geben für diesen Fall $\sigma_1=0,\ \sigma_2=2,$ $\sigma_3=3,\ \sigma_4=6,\ \sigma_5=0,\ \sigma_6=-1$ und die Determinante

$$\Pi(6).P = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 6 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \Pi(6).2,$$

also

$$P=2.$$

Man kann auch den Koefficienten von x^6 in der Entwicklung von

$$\frac{(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)(1-x^9)}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

aufsuchen. Bringt man diesen Ausdruck auf die Form $(1+x^2+x^4)(1+x^4)(1+x^3+x^6)(1-x^7)$, so wird der Koefficient von x^6 $P=2$.

13. Bezeichnet man allgemein die Anzahl der Invarianten ϱ^{ten} Grades einer Form m^{ter} Ordnung durch $T_\varrho^{(m)}$, so hat man die Reihe von Werten:

$$\begin{aligned} &T_2^{(4)}=1, \quad T_3^{(4)}=1, \quad T_4^{(4)}=1, \quad T_5^{(4)}=1,\\ &T_6^{(4)}=2, \quad T_7^{(4)}=1, \quad T_8^{(4)}=2;\\ &T_4^{(5)}=1, \quad T_8^{(5)}=2, \quad T_{12}^{(5)}=3, \quad T_{18}^{(5)}=1. \end{aligned}$$

So ist z. B.

$$\begin{aligned} T_6^{(4)} &= \left\{\frac{(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)(1-x^9)(1-x^{10})}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)}\right\}_{x^{12}} = \\ &= \{(1+x^4)(1-x^7)(1+x^3+x^6)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)\}_{x^{12}} = \\ &= \{(1+x^4+x^6-x^{14}+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)\}_{x^{12}} = 1+1=2. \end{aligned}$$

Ferner

$$T_8^{(5)} = \left\{\frac{(1-x^6)(1-x^7)\ldots(1-x^{15})}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^8)}\right\}_{x^{20}} =$$

$$\begin{aligned} &= \{(1+x^5)(1-x^{11})(1-x^{13})(1+x^4+x^8)(1+x^3+x^6)(1+x^2+x^4+\ldots)\}_{x^{20}} = \\ &= \{(1+x^5-x^{11}-x^{13}-x^{16}-x^{18}\ldots)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^8).(1+x^2+x^4+\ldots)\}_{x^{20}} = \\ &= \{(1+x^6+x^8-x^{14}-2x^{16}-x^{18}\ldots)(1+x^4+x^8).(1+x^2+x^4+\ldots)\}_{x^{20}} = \\ &= \{(1+x^4+x^6+2x^8+x^{10}+x^{12}-x^{16}-2x^{18}-2x^{20}\ldots).(1+x^2+x^4+\ldots)\}_{x^{20}} = \\ &= 1+1+1+2+1+1-1-2-2=2. \end{aligned}$$

In der That kennt man zwei Invarianten achten Grades der Formen fünfter Ordnung, deren eine die Diskriminante ist.

14. Wir gehen zur Behandlung der allgemeineren Aufgabe über, die Anzahl der Invarianten ϑ^{ten} Grades der kubischen Formen zu bestimmen.

Da $p=\frac{3}{2}\vartheta$ ist, so hat man den Koefficienten von $x^{\frac{3}{2}\vartheta}$ in der Entwicklung von

$$\frac{(1-x^4)(1-x^5)\ldots(1-x^{\vartheta+3})}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^\vartheta)}$$

aufzusuchen. Dieser Ausdruck kann aber in der einfacheren Form

$$\frac{(1-x^{\vartheta+1})(1-x^{\vartheta+2})(1-x^{\vartheta+3})}{(1-x^2)(1-x^3)}$$

geschrieben werden. Vernachlässigt man die Glieder, deren Grad $\frac{5}{2}\vartheta$ übersteigt, so ist

$$T_\vartheta^{(3)} = \left\{\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}\right\}_{x^{\frac{3}{2}\vartheta}} - \left\{\frac{x^{\vartheta+1}(1+x+x^2)}{(1-x^2)(1-x^3)}\right\}_{x^{\frac{3}{2}\vartheta}} =$$
$$= \left\{\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}\right\}_{x^{\frac{3}{2}\vartheta}} - \left\{\frac{x(1+x+x^2)}{(1-x^2)(1-x^3)}\right\}_{x^{\frac{1}{2}\vartheta}} =$$
$$= \left\{\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}\right\}_{x^{\frac{3}{2}\vartheta}} - \left\{\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}\right\}_{x^{\frac{1}{2}\vartheta}}.$$

Vertauschen wir x mit x^2, so kommt

$$T_\vartheta^{(3)} = \left\{\frac{1}{(1-x^4)(1-x^6)}\right\}_{x^{3\vartheta}} - \left\{\frac{x^2}{(1-x^2)(1-x^4)}\right\}_{x^\vartheta} =$$
$$= \left\{\frac{1}{(1-x^4)(1-x^6)}\right\}_{x^{3\vartheta}} + \left\{\frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)}\right\}_{x^\vartheta} =$$
$$= \left\{\frac{1}{1-x^4}\right\}_{x^\vartheta} + \left\{\frac{1}{(1-x^4)(1-x^6)}\right\}_{x^{3\vartheta}} - \left\{\frac{1}{(1-x^6)(1-x^{12})}\right\}_{x^{3\vartheta}} =$$
$$= \left\{\frac{1}{1-x^4}\right\}_{x^\vartheta} + \left\{\frac{1}{(1-x^4)(1-x^6)} - \frac{1}{(1-x^6)(1-x^{12})}\right\}_{x^{3\vartheta}} =$$
$$= \left\{\frac{1}{1-x^4}\right\}_{x^\vartheta} + \left\{\frac{x^4(1+x^4)}{(1-x^6)(1-x^{12})}\right\}_{x^{3\vartheta}}.$$

In dem Ausdruck $\frac{x^4(1+x^4)}{(1-x^6)(1-x^{12})}$ kommen aber Glieder mit $x^{3\vartheta}$ nicht vor, also bleibt

29) $$T_\vartheta^{(3)} = \left\{\frac{1}{1-x^4}\right\}_{x^\vartheta} = (1+x^4+x^8+\ldots+x^{4k}+\ldots)_{x^\vartheta}.$$

ϑ ist mithin von der Form $4k$, d. h. der Grad der Invarianten einer kubischen Form ist stets durch 4 teilbar. Für $\vartheta = 4$ ist $T_4^{(3)} = 1$ und alle Invarianten der kubischen Form werden schon durch die Potenzen der Invariante vierten Grades geliefert. Sei dieselbe J, so sind die übrigen Invarianten von der Form J^k.

Führen wir dieselbe Betrachtung für die biquadratischen Formen durch.

Man hat zunächst

$$T_\vartheta^{(4)} = \left\{\frac{(1-x^{\vartheta+1})(1-x^{\vartheta+2})(1-x^{\vartheta+3})(1-x^{\vartheta+4})}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}\right\}_{x^{2\vartheta}}.$$

Vernachlässigt man die Glieder höherer als $2\vartheta^{ter}$ Ordnung, so findet man

$$T_\vartheta^{(4)} = \left\{\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}\right\}_{x^{2\vartheta}} - \left\{\frac{x^{\vartheta+1}(1+x+x^2+x^3)}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}\right\}_{x^{2\vartheta}} =$$

$$= \left\{\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}\right\}_{x^{2\vartheta}} - \left\{\frac{x(1+x+x^2+x^3)}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}\right\}_{x^{\vartheta}} =$$

$$= \left\{\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}\right\}_{x^{2\vartheta}} - \left\{\frac{x}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right\}_{x^{\vartheta}} =$$

$$= \left\{\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}\right\}_{x^{2\vartheta}} - \left\{\frac{x^2}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}\right\}_{x^{2\vartheta}} =$$

$$= \left\{\frac{1-x^2+x^3}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}\right\}_{x^{2\vartheta}} = \left\{\frac{1-x^2}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}\right\}_{x^{2\vartheta}}.$$

Führen wir statt x^2 wieder x ein, so ist

$$30)\quad T_\vartheta^{(4)} = \left\{\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}\right\}_{x^\vartheta} = (1+x^2+x^3+\Sigma A . x^{2\varkappa+3\lambda})_{x^\vartheta}.$$

Für $\vartheta = 2$ ist $T_2^{(4)} = 1$, für $\vartheta = 3$ ist $T_3^{(4)} = 1$; also giebt es eine Invariante zweiten und eine dritten Grades der biquadratischen Form. Die Invarianten höherer Grade genügen der Bedingung $2\varkappa + 3\lambda = \vartheta$ für ganze Zahlen $\varkappa$, λ, ϑ. Der Koefficient A von $x^{2\varkappa+3\lambda}$ wird durch die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der unbestimmten Gleichung $2\varkappa + 3\lambda = \vartheta$ bestimmt. Also können alle Invarianten der biquadratischen Form schon durch die Invarianten zweiten und dritten Grades, J_2 und J_3, dargestellt werden und zwar sind die linear von einander unabhängigen alle von der Form $J_2^{\varkappa} J_3^{\lambda}$, und ihre Anzahl stimmt mit der Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung $2\varkappa + 3\lambda = \vartheta$ überein. Auch die linearen Funktionen der Invarianten $J_2^{\varkappa} J_3^{\lambda}$ haben die Invarianteneigenschaften.

Die Invarianten einer Form, auf die alle anderen als ganze Funktionen derselben zurückgeführt werden können, sollen irreduzible oder primitive Invarianten genannt werden. So haben die kubischen Formen eine primitive Invariante vierten Grades

$$(a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - (a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2),$$

und die biquadratischen Formen haben die beiden primitiven Invarianten bez. zweiten und dritten Grades

$$J_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

15. Für Formen fünfter Ordnung hat man

$$T_{\vartheta}^{(5)} = \left\{\frac{(1-x^{\vartheta+1})(1-x^{\vartheta+2})(1-x^{\vartheta+3})(1-x^{\vartheta+4})(1-x^{\vartheta+5})}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}\right\}_{x^{\frac{5}{2}\vartheta}}.$$

Vernachlässigt man die Glieder höherer als $\frac{5}{2}\vartheta^{ter}$ Ordnung und vertauscht x mit x^2, so kommt

$$31)\quad \left\{\begin{aligned} T &= \left\{\frac{1}{(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{10})}\right\}_{x^{5\vartheta}} - \left\{\frac{x^2}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}\right\}_{x^{3\vartheta}} + \\ &+ \left\{\frac{x^{2\vartheta}(x^3+x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9)}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}\right\}_{x^{\frac{5}{2}\vartheta}} = \\ &= \left\{\frac{1}{(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{10})}\right\}_{x^{5\vartheta}} - \left\{\frac{x^2}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}\right\}_{x^{3\vartheta}} + \\ &+ \left\{\frac{x^6}{(1-x^2)(1-x^4)^2(1-x^6)}\right\}_{x^{\vartheta}}, \end{aligned}\right.$$

da

$$x^3+x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9 = \frac{(1-x^5)(1+x^2)x^3}{1-x}.$$

Nach Cayley (Phil. Trans. 1856 Vol. 146 pag. 137) multipliziert man zur Vereinfachung Zähler und Nenner des ersten der drei Brüche mit

$$\frac{(1-x^{20})(1-x^{30})(1-x^{40})}{(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)},$$

einer ganzen Funktion sechsunddreissigster Ordnung für x^2. Dann wird der Zähler

$$\begin{aligned} &1+x^4+x^6+2x^8+x^{10}+3x^{12}+2x^{14}+4x^{16}+3x^{18}+4x^{20}+4x^{22}+ \\ &+6x^{24}+4x^{26}+6x^{28}+5x^{30}+7x^{32}+5x^{34}+7x^{36}+5x^{38}+ \\ &+7x^{40}+5x^{42}+6x^{44}+4x^{46}+6x^{48}+4x^{50}+4x^{52}+3x^{54}+ \\ &+4x^{56}+2x^{58}+3x^{60}+x^{62}+2x^{64}+x^{66}+x^{68}+x^{72} \end{aligned}$$

und der Nenner

$$(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{30})(1-x^{40}).$$

Man sieht, dass man dann im Zähler alle Glieder, deren Exponenten nicht Vielfache von 5 sind, vernachlässigen kann, so dass der betrachtete Ausdruck die Form annimmt:

$$\left\{\frac{1+x^{10}+4x^{20}+5x^{30}+7x^{40}+4x^{50}+3x^{60}}{(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{30})(1-x^{40})}\right\}_{x^{5\vartheta}}.$$

Vertauscht man schliesslich noch x^5 mit x, so geht der Ausdruck über in

$$\left\{\frac{1+x^2+4x^4+5x^6+7x^8+4x^{10}+3x^{12}}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}\right\}_{x^{\vartheta}}.$$

Der zweite Bruch in dem Ausdruck 31) wird mit Hilfe des Multiplikators vierzehnter Ordnung für x^2

$$\frac{(1-x^6)(1-x^{12})(1-x^{24})}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)}$$

umgeformt. Der Zähler wird dann

$$x^2(1+x^2+2x^4+x^6+3x^8+2x^{10}+3x^{12}+x^{14}+3x^{16}+2x^{18}+ \\ +3x^{20}+x^{22}+2x^{24}+x^{26}+x^{28})$$

und der Nenner wird

$$(1-x^6)^2(1-x^{12})(1-x^{24}).$$

Vernachlässigt man im Zähler die Glieder, deren Exponenten nicht Vielfache von 3 sind, und ersetzt x^3 durch x, so ergiebt sich

$$\left\{\frac{2x^2+2x^4+3x^6+x^8+x^{10}}{(1-x^2)^2(1-x^4)(1-x^8)}\right\}_{x^9}.$$

Führt man die transformierten Ausdrücke in 31) ein und macht sie gleichnamig, so kommt

$$T=\left\{\frac{(1+x^2+4x^4+5x^6+7x^8+4x^{10}+3x^{12})-(2x^2+2x^4+3x^6+x^8+x^{10})(1+x^2+x^4)+x^6(1+x^4)}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}\right\}_{x^9}= \\ =\left\{\frac{(1-x^2)(1-x^6+x^{12})}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}\right\}_{x^9}=\left\{\frac{1-x^6+x^{12}}{(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}\right\}_{x^9}.$$

Nun ist

$$1-x^6+x^{12}=\frac{1-x^{36}}{(1+x^6)(1-x^{18})},$$

so dass

32) $$T_9^{(5)}=\left\{\frac{1-x^{36}}{(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{12})(1-x^{18})}\right\}_{x^9}.$$ *

Man erkennt daraus, dass den Formen fünfter Ordnung vier Invarianten zugehören, J_4 vom vierten Grad, J_8 vom achten Grad, J_{12} vom zwölften Grad und J_{18} vom achtzehnten Grad. Da 36 durch 4, 12, 18 teilbar ist, so sind die Exponenten des entwickelten Ausdrucks von der Form $4p+8q+12r+18s$, und alle Invarianten der Formen fünfter Ordnung sind in dem Ausdruck enthalten

$$\Sigma A J_4^p J_8^q J_{12}^r J_{18}^s,$$

wo $4p+8q+12r+18s=\vartheta$ und A ein numerischer Koefficient ist, der gleich der Anzahl der Lösungen dieser Gleichung. Der Koefficient von x^{36} in 32) ist um 1 kleiner als die Anzahl A der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$4p+8q+12r+18s=36,$$

d. h. die Invarianten J_4, J_8, J_{12}, J_{18} sind nicht unabhängig von einander, sondern durch eine Relation sechsunddreissigsten Grades in den

* Cayley a. a. O. pag. 117 und 138.

Koefficienten verbunden. In der That hat Hermite* bewiesen, dass die vier Invarianten durch eine solche Gleichung sechsunddreissigsten Grades verbunden sind, dass das Quadrat der ungeraden Invariante J_{18} eine ganze rationale Funktion der drei übrigen Invarianten ist.

Für $\vartheta \geqslant 36$ sind die Koefficienten von x^ϑ vermöge des Faktors $1-x^{36}$ in $T_\vartheta^{(5)}$ ebenfalls im allgemeinen kleiner als die zugehörige Zahl A der Lösungen der unbestimmten Gleichung, nämlich gleich der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$4p+8q+12r+18s=\vartheta,$$

minus der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$4p+8q+12r+18s=\vartheta-36;$$

aber die hieraus resultierenden Relationen ϑ^{ten} Grades zwischen den vier Invarianten sind nur Folgen der ebengenannten Relation sechsunddreissigsten Grades.

16. Hier mögen noch einige Entwicklungen in Bezug auf die für die Lehre der Invarianten so wichtige Funktion $\psi(x)$

$$33) \qquad \psi(x)=\frac{(1-x^{m+1})\ldots(1-x^{m+\varrho})}{(1-x)\ldots(1-x^{\varrho})}$$

gegeben und mit Hilfe derselben bemerkenswerte Eigenschaften der Invarianten abgeleitet werden.

I. Zunächst bemerkt man, dass

$$34) \qquad x^{m\varrho}.\psi\left(\frac{1}{x}\right)=\psi(x),$$

was zuerst die Identität

$$x^{m\varrho}C_{m\varrho-p}\left(\frac{1}{x}\right)^{m\varrho-p}=C_p x^p$$

liefert, und hieraus:

$$35) \qquad C_p=C_{m\varrho-p}.$$

II. Bildet man den Ausdruck

$$x^\varrho\psi(x)=\frac{(1-x^{m+2})\ldots(1-x^{m+\varrho+1})}{(1-x)\ldots(1-x^{\varrho})}-\frac{(1-x^{m+2})\ldots(1-x^{m+\varrho})}{(1-x)\ldots(1-x^{\varrho-1})},$$

so lassen sich daraus, wie in I., die Beziehungen ableiten

$$C(p,\varrho,m)=C(p+\varrho,\varrho,m+1)-C(p+\varrho,\varrho-1,m+1)$$

und durch Vertauschung von p mit $p-\varrho$, m mit $m-1$,

$$C(p,\varrho,m)-C(p,\varrho-1,m)=C(p-\varrho,\varrho,m-1).$$

Setzt man an Stelle von ϱ, $\varrho-1$, so findet man

* Hermite, Crelle Journal, Bd. 59.

$$C(p, \varrho-1, m) - C(p, \varrho-2, m) = C(p-\varrho+1, \varrho-1, m-1)$$

u. s. w., woraus die bemerkenswerte Beziehung folgt

$$36) \qquad C(p, \varrho, m) = \sum_0^{\varrho} {}^k C(p-k, k, m-1).$$

III. Setzt man

$$37) \quad (1-xz)(1-x^2z)\dots(1-x^\varrho z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots + B_\varrho z^\varrho,$$

so findet man durch Vertauschung von z mit xz

$$(1-x^k) B_k z = -B_{k-1} x^k (1-x^{\varrho-k+1}),$$

woraus

$$B_k = (-1)^k x^{\frac{1}{2}k(k+1)} \frac{(1-x^{\varrho-k+1})(1-x^{\varrho-k+2})\dots(1-x^\varrho)}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}$$

und folglich*

$$38) \quad (1-xz)(1-x^2z)\dots(1-x^\varrho z) = 1 - x\frac{1-x^\varrho}{1-x}z + x^3\frac{(1-x^\varrho)(1-x^{\varrho-1})}{(1-x)(1-x^2)}z^2 \mp \dots$$

IV. Setzt man an Stelle von z in 37) x^m, so wird

$$(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})\dots(1-x^{m+\varrho}) =$$
$$= \sum_0^{\varrho} {}^k (-1)^k x^{km+\frac{1}{2}k(k+1)} \cdot \frac{(1-x^{\varrho-k+1})\dots(1-x^\varrho)}{(1-x)\dots(1-x^k)},$$

woraus folgt, dass*

$$39) \quad C_p = \left\{ \sum_0^{\varrho} {}^k (-1)^k \frac{x^{km+\frac{1}{2}k(k+1)}}{(1-x)\dots(1-x^k)(1-x)\dots(1-x^{\varrho-k})} \right\}_{x^p}.$$

Die Summierung erstreckt sich von $k=0$ bis $k=\varrho$; sobald aber für irgend einen Wert von k innerhalb dieser Grenzen $mk+\frac{1}{2}k(k+1)$ grösser wird als p, so braucht natürlich die Summierung nur von $k=0$ bis zu dem grössten Wert von k, für den die Differenz $p-km-\frac{1}{2}k(k+1)$ positiv oder Null ist, ausgeführt zu werden. Ist z. B. $p=\frac{1}{2}m\varrho$, was bei Invarianten der Fall ist, so hat man von $k=0$ bis höchstens $k=\frac{1}{2}\varrho-1$ zu summieren.

Die Formel 39) kann auch noch geschrieben werden

$$40) \quad C_p = \sum_0^{\varrho} {}^k (-1)^k \cdot \left\{ \frac{x^{\frac{1}{2}k(k+1)}}{(1-x)\dots(1-x^k)(1-x)\dots(1-x^{\varrho-k})} \right\}_{x^{p-mk}}.$$

V. Für die durch Formel 26) definierte Zahl $P(p, \varrho, m)$ können bemerkenswerte Beziehungen angegeben werden. Zunächst ist

$$41) \qquad P(p, \varrho, m) = P(p, m, \varrho),$$

* Cayley a. a. O. pag. 134, 135.

42) $$P(p, \varrho, m) = P(m\varrho - p, \varrho, m).$$

Aus der in Nr. 10 aufgestellten Gleichung

$$P = \{(1-x).\Sigma A_\varrho x^\varrho\}_{x^p}$$

folgt, dass

43) $$P = \left\{\sum_0^\varrho{}_k (-1)^k \cdot \frac{x^{km+\frac{1}{2}k(k+1)}}{(1-x)\dots(1-x^k)(1-x^2)\dots(1-x^{\varrho-k})}\right\}_{x^p},$$

worin ϱ und m vertauschbar sind. Man hat also auch die Gleichung

44) $$P = \sum_0^m{}_k (-1)^k \cdot \left\{\frac{x^{\frac{1}{2}k(k+1)}}{(1-x)\dots(1-x^k)(1-x^2)\dots(1-x^{m-k})}\right\}_{x^{p-\varrho k}}.$$

So ist z. B. für $m = 5$

$$P = \sum_0^5{}_k (-1)^k \left\{\frac{x^{\frac{1}{2}k(k+1)}}{(1-x)\dots(1-x^k)(1-x^2)\dots(1-x^{5-k})}\right\}_{x^{\varrho(\frac{5}{2}-k)}},$$

woraus der Wert für $T_\varrho^{(5)}$ in Übereinstimmung mit dem Werte von $T_\varrho^{(5)}$ in Nr. 15 folgt.*

§ 13. Anwendung der Invariantentheorie auf die Form fünfter Ordnung.

1. Bei der Betrachtung der Invarianten der Form fünfter Ordnung ist es vorteilhaft, die letztere in der in § 8, 3 aufgestellten kanonischen Form

1) $$f = B_1 u^5 + B_2 v^5 + B_3 (u+v)^5$$

zu Grunde zu legen. Diese Form gehe aus der ursprünglichen durch eine lineare Substitution von der Determinante 1 hervor, wonach die aus beiden Formen gebildeten Invarianten einander gleich werden. Setzt man weiter

$$B_1 : B_3 = B, \quad B_2 : B_3 = C,$$

so hat man die kanonische Form

1a) $$Bu^5 + Cv^5 + (u+v)^5,$$

und die aus 1a) gebildeten Invarianten unterscheiden sich von den ursprünglichen nur um eine Potenz von B_3. Bildet man die partiellen Ableitungen des Ausdrucks 1a) bezüglich nach u und v, nämlich

* Neuere Untersuchungen über die erzeugende Funktion, welche dieselbe so umzuformen suchen, dass man aus ihren Faktoren direkt die Entwicklungskoefficienten erkennen kann, finden sich in dem American Mathem. Journal. Bd. 1 und 2 (1879 und 1880) von Sylvester und Cayley.

2) $$Bu^4+(u+v)^4=0,\quad Cv^4+(u+v)^4=0,$$

so erhält man durch Elimination der Variabeln u und v aus 2) die Diskriminante der Form 1a). Die Diskriminante aber ist mit den Invarianten vierten und achten Grades durch eine einfache Gleichung verbunden, so dass die letztere aus der Diskriminante berechnet werden kann.

Um die Diskriminante zu bilden, hat man zunächst 2)

$$\frac{B}{C}\left(\frac{u}{v}\right)^4=1,\quad \frac{u}{v}=\sqrt[4]{\frac{C}{B}},$$

was mit Hilfe der ersten Gleichung 2) liefert

3) $$BC+(\sqrt[4]{B}+\sqrt[4]{C})^4=0.$$

Um die Diskriminante in rationaler Form darzustellen, bilde man die Norm der irrationalen Funktion 3), nämlich* $(i=\sqrt{-1})$

4)
$$\begin{cases} N\{BC+(\sqrt[4]{B}+\sqrt[4]{C})^4\}= \\ =\{BC+(\sqrt[4]{B}+\sqrt[4]{C})^4\}\{BC+(\sqrt[4]{B}-\sqrt[4]{C})^4\}\{BC+(\sqrt[4]{B}+i\sqrt[4]{C})^4\}\cdot \\ \qquad\cdot\{BC+(\sqrt[4]{B}-i\sqrt[4]{C})^4\}= \\ =[(BC+B+C)^2+4BC]^2-16(3BC-B-C)^2.B.C= \\ =[(BC+B+C)^2-4BC]^2-128B^2C^2(BC-B-C)= \\ =\frac{1}{B_3^8}\{[(B_1B_2+B_2B_3+B_3B_1)^2-4B_1B_2B_3^2]^2- \\ \qquad -128B_1^2B_2^2B_3^2(B_1B_2-B_1B_3-B_2B_3)\}. \end{cases}$$

Würde man die Bézoutsche Methode zur Bildung der Resultante der Gleichungen 2) benützen, so könnte die Diskriminante in Form der Determinante dargestellt werden (§ 5, 13)

5) $$\text{Diskriminante}=\begin{vmatrix} 4B & 6B & 4B & BC+B+C \\ 6B & 4B & BC+B+C & 4C \\ 4B & BC+B+C & 4C & 6C \\ BC+B+C & 4C & 6C & 4C \end{vmatrix},$$

was mit 4) übereinstimmt.

Um nun die Invarianten J_4 und J_8 (siehe die Tabellen) durch B und C oder durch B_1, B_2, B_3, wo $B_1:B_3=B$, $B_2:B_3=C$ auszudrücken, ersetze man in den Formeln die Koefficienten der Form a_0, a_1, ... nach 1) durch die Grössen B_1+B_3, B_3, B_3, B_3, B_3, B_2+B_3. So findet man

---

* Baltzer, Determ. § 11.

6) $$J_4 = (B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_1)^2 - 4B_1B_2B_3^2 = \\ = (B_1B_2 - B_1B_3 - B_2B_3)^2 + 4B_1B_2B_3(B_1 + B_2 - B_3) = \\ = B_3^4 . [(BC + B + C)^2 - 4BC].$$

7) $$J_8 = B_1^2B_2^2B_3^2(B_1B_2 - B_1B_3 - B_2B_3) = \\ = B_3^8 . [B^2C^2(BC - B - C)].$$

Mit Hilfe dieser Formeln ergiebt sich unmittelbar die bemerkenswerte Beziehung

8) $$\text{Diskriminante} = J_4^2 - 128J_8.$$

Um die Invariante zwölften Grades J_{12} zu finden, bilde man die Diskriminante der kubischen Gleichung $K = 0$ [§ 8, 3 (28)], die sich auf

$$K = B_1B_2B_3uv(u - v) = 0$$

reduziert, so dass

9) $$J_{12} = B_1^4B_2^4B_3^4.$$

Die Hermitesche Invariante achtzehnten Grades ist von Sylvester in die Form gebracht worden

10) $$J_{18} = 4B_1^5B_2^5B_3^5(B_1 - B_2)(B_1 + B_3)(B_2 + B_3).$$

Vertauscht man schliesslich noch B_3 mit $-B_3$, so hat man

11) $$\begin{cases} J_4 = (B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3)^2 - 4B_1B_2B_3(B_1 + B_2 + B_3) \\ J_8 = B_1^2B_2^2B_3^2(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3) \\ J_{12} = B_1^4B_2^4B_3^4 \\ J_{18} = 4B_1^5B_2^5B_3^5(B_1 - B_2)(B_1 - B_3)(B_2 - B_3). \end{cases}$$

2. Durch Vertauschung von B_3 mit $-B_3$ geht die kanonische Form fünfter Ordnung über in

12) $$f = B_1u^5 + B_2v^5 - B_3(u + v)^5,$$

deren Koefficienten B_1, B_2, B_3 die Wurzeln einer kubischen Gleichung sind, welche mit Hilfe der Ausdrücke 11) für die Invarianten J_4, J_8, J_{12} sogleich angegeben werden kann. Man findet

13) $$z^3 + \frac{J_4J_{12} - J_8^2}{4J_{12}^{\frac{5}{4}}}z^2 + \frac{J_8}{J_{12}^{\frac{1}{2}}}z - J_{12}^{\frac{1}{4}} = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung, deren Wurzeln B_1, B_2, B_3 sind, ist aber

$$(B_1 - B_2)^2(B_1 - B_3)^2(B_2 - B_3)^2,$$

was nach Formel 11) mit Hilfe der Invarianten J_{18}, J_{12} ausgedrückt werden kann, nämlich

14) $$(B_1-B_2)^2(B_1-B_3)^2(B_2-B_3)^2=\frac{J_{18}^{\,2}}{16B_1^{\,10}B_2^{\,10}B_3^{\,10}}=\frac{J_{18}^{\,2}}{16J_{12}^{\,5}}.$$

Drückt man die linke Seite dieser Gleichung durch die Koefficienten der Gleichung 13) aus, so ergiebt sich eine bemerkenswerte Gleichung zwischen den Invarianten J_4, J_8, J_{12}, J_{18}, welche lautet:

15) $$J_{18}^{\,2}=J_4(J_4J_{12}-J_8^{\,2})+8J_8^{\,3}J_{12}-72J_4J_8J_{12}^{\,2}-432J_{12}^{\,3}.$$

Schreiben wir zu dem Zwecke die kubische Gleichung 13) in der Form

$$z^3+\frac{\vartheta_1\vartheta_3-\vartheta_2^{\,2}}{4\vartheta_3^{\frac{5}{4}}}z^2+\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3^{\frac{1}{4}}}z-\vartheta_3^{\frac{1}{4}}=0,$$

wo $\vartheta_1=J_4$, $\vartheta_2=J_8$, $\vartheta_3=J_{12}$ ist und setzt

$$\vartheta_1\vartheta_3-\vartheta_2^{\,2}=\theta,$$

so lautet die Diskriminante dieser Gleichung

$$\frac{1}{16\vartheta_3^{\frac{7}{2}}}(-72\theta\vartheta_2\vartheta_3^{\,2}+\theta^2\vartheta_2^{\,2}-64\vartheta_2^{\,3}\vartheta_3^{\,2}+\theta^3-432\vartheta_3^{\,4})=$$

$$=\frac{\vartheta_3}{16\vartheta_3^{\frac{7}{2}}}(\vartheta_1\theta^2-72\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3^{\,2}+8\vartheta_2^{\,3}\vartheta_3-432\vartheta_3^{\,3}),$$

was nach Formel 14) $=\frac{J_{18}^{\,2}}{16\vartheta_3^{5}}$ ist, so dass die Gleichung 15) unmittelbar sich ergiebt.*

Durch Auflösung der Gleichung 13) erhalten wir die Grössen B_1, B_2, B_3 und folglich B, C als Funktionen der Invarianten, d. h. als Funktionen der Koefficienten der Form fünfter Ordnung. Setzen wir zur Abkürzung

16) $$\begin{cases}\vartheta_4=J_{18}\\ \theta\ =J_4J_{12}-J_8^{\,2}=\vartheta_1\vartheta_3-\vartheta_2^{\,2}\\ \theta'=36\vartheta_2\vartheta_3^{\,2}\theta+864\vartheta_3^{\,4}-\theta^3,\end{cases}$$

so ist nach den Regeln der Auflösung kubischer Gleichungen

$$12\vartheta_3^{\frac{5}{4}}.z=-\theta+\varepsilon\sqrt[3]{\theta'+216\vartheta_4\vartheta_3^{\frac{5}{4}}}+\varepsilon^2\sqrt[3]{\theta'-216\vartheta_4\vartheta_3^{\frac{5}{2}}},$$

wo ε die dritte Einheitswurzel bezeichnet. Erteilt man ε die drei Werte der $\sqrt[3]{1}$, so ergeben sich die drei Wurzeln

$$z_1=B_1,\quad z_2=B_2,\quad z_3=B_3.$$

Da sich diese drei Wurzeln als Funktionen der Invarianten ausdrücken, so ergiebt sich hier zugleich für die kanonische Form die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie durch eine lineare Transformation der ursprünglichen Form unverändert bleibt, indem sich die

* Bruno, Annali di Tortolini 1855.

Koefficienten B_1, B_2, B_3 nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante ändern.

Für $B = B_1 : B_3$, $C = B_2 : B_3$ erhält man schliesslich

$$17) \qquad B = \frac{-\theta + \varepsilon \sqrt[3]{\theta' + 216\vartheta_4\vartheta_3^{\frac{5}{2}}} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{\theta' - 216\vartheta_4\vartheta_3^{\frac{5}{2}}}}{-\theta + \sqrt[3]{\theta' + 216\vartheta_4\vartheta_3^{\frac{5}{2}}} + \sqrt[3]{\theta' - 216\vartheta_4\vartheta_3^{\frac{5}{2}}}}.$$

$$18) \qquad C = \frac{-\theta + \varepsilon^2 \sqrt[3]{\theta' + 216\vartheta_4\vartheta_3^{\frac{5}{2}}} + \varepsilon \sqrt[3]{\theta' - 216\vartheta_4\vartheta_3^{\frac{5}{2}}}}{-\theta + \sqrt[3]{\theta' + 216\vartheta_4\vartheta_3^{\frac{5}{2}}} + \sqrt[3]{\theta' - 216\vartheta_4\vartheta_3^{\frac{5}{2}}}}.$$

Für $\vartheta_3 = 0$ oder für $\vartheta_4 = 0$ verschwindet die Diskriminante der Gleichung 13) und die kubische Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln. Es ist in diesem Fall $B = C$ und die kanonische Gleichung lautet

$$Bu^5 + Bv^5 + (u+v)^5 = 0,$$

wodurch die allgemeine Gleichung fünften Grades zu einer symmetrischen wird, die, wie bekannt, algebraisch auflösbar ist.

3. Lagrange hat bekanntlich gezeigt, dass man die Lösung einer Gleichung fünften Grades immer auf die Lösung einer gewissen Gleichung sechsten Grades zurückführen kann, deren Koefficienten rational aus den Koefficienten der vorgelegten Gleichung fünften Grades gebildet sind. Denn es existieren Funktionen von fünf Buchstaben, welche bei deren Vertauschung nur sechs Werte annehmen. Nur dass diese Funktionen zu Resolventen sechsten Grades führen, deren Koefficienten im allgemeinen wegen der beschwerlichen Rechnung nicht ermittelt werden können. Die Bestimmung der Koefficienten einer Resolvente sechsten Grades durch die Koefficienten der gegebenen Form ist indess von Hermite* vermittelst einer aus den fünf Wurzeln der vorgelegten Gleichung gebildeten Funktion geleistet worden, die durch Vertauschung der Wurzeln sechs Werte annehmen kann und die gleichzeitig eine Invariante der Form fünfter Ordnung ist.

Seien α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 die Wurzeln der Gleichung fünften Grades

$$a_0x^5 + 5a_1x^4 + 10a_2x^3 + 10a_3x^2 + 5a_4x + a_5 = 0,$$

so setze man nach Hermite

$$\tau = a_0^4 \{(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2(\alpha_4-\alpha_5)^2(\alpha_5-\alpha_1)^2 + \\ + (\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_5)^2(\alpha_5-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2(\alpha_4-\alpha_1)^2\}.$$

Setzt man nun

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2(\alpha_4-\alpha_5)^2(\alpha_5-\alpha_1)^2 = \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$$

und führt die Abkürzungen ein

---

* Hermite, Cambridge and Dublin Mathematical Journal t. 9. 1854.

$$\begin{aligned}
&\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \Delta_1\\
&\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_5) = \Delta_2\\
&\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_4) = \Delta_3\\
&\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_3, \alpha_4) = \Delta_4\\
&\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_3) = \Delta_5\\
&\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_3) = \Delta_6,\\
&\Delta(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_2, \alpha_4) = \nabla_1\\
&\Delta(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_4) = \nabla_2\\
&\Delta(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_2, \alpha_5) = \nabla_3\\
&\Delta(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5) = \nabla_4\\
&\Delta(\alpha_1, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_5) = \nabla_5\\
&\Delta(\alpha_1, \alpha_4, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = \nabla_6,
\end{aligned}$$

so hat man die sechs Werte für τ

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= a_0^4(\Delta_1 + \nabla_1)\\
\tau_2 &= a_0^4(\Delta_2 + \nabla_2)\\
\tau_3 &= a_0^4(\Delta_3 + \nabla_3)\\
\tau_4 &= a_0^4(\Delta_4 + \nabla_4)\\
\tau_5 &= a_0^4(\Delta_5 + \nabla_5)\\
\tau_6 &= a_0^4(\Delta_6 + \nabla_6).
\end{aligned}$$

Diese sechs Grössen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_6$ sind die Wurzeln der Resolvente sechsten Grades $\tau^6 + A_1\tau^5 + A_2\tau^4 + A_3\tau^3 + A_4\tau^2 + A_5\tau + A_6 = 0$, deren Koefficienten $A_1, \ldots, A_6$ symmetrische Funktionen der Grössen τ und mithin symmetrische Funktionen der Differenzen der Wurzeln α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_5$ sind.

Da nun die Wurzeldifferenzen in die Funktionen τ sämtlich auf gleichem Grad eingehen, so sind die symmetrischen Funktionen dieser Differenzen, $A_1, A_2, \ldots, A_6$ nach § 11, 1 Invarianten der Form fünfter Ordnung. Nach § 12, 15 hängen aber diese Invarianten linear ab von gewissen Aggregaten der fundamentalen Invarianten $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, nämlich

$$\begin{aligned}
&A_1 \text{ von } \vartheta_1\\
&A_2 \quad „ \quad \vartheta_1^2, \vartheta_2,\\
&A_3 \quad „ \quad \vartheta_1^3, \vartheta_1\vartheta_2, \vartheta_3,\\
&A_4 \quad „ \quad \vartheta_1^4, \vartheta_1^2\vartheta_2, \vartheta_1\vartheta_3, \vartheta_2^2,\\
&A_5 \quad „ \quad \vartheta_1^5, \vartheta_1^3\vartheta_2, \vartheta_1^2\vartheta_3, \vartheta_1\vartheta_2^2, \vartheta_2\vartheta_3,\\
&A_6 \quad „ \quad \vartheta_1^6, \vartheta_1^4\vartheta_2, \vartheta_1^3\vartheta_3, \vartheta_1^2\vartheta_2^2, \vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3, \vartheta_2^3, \vartheta_3^2,
\end{aligned}$$

wo $\vartheta_1 = J_4$, $\vartheta_2 = J_8$, $\vartheta_3 = J_{12}$ ist. In diesen Koefficienten $A_1, \ldots$ kommt die Hermitesche Invariante $J_{18} = \vartheta_4$ nicht vor, weil diese Koefficienten rationale, ganze Funktionen der $a_0, \ldots, a_5$ allgemein vom $4\mu^{\text{ten}}$ Grade sind, wo 4μ höchstens gleich 24 sein kann. Mit Hilfe dieser allgemeinen Formen der A wird aber die weitere numerische Ausrechnung einfach.

Fünfter Abschnitt.

Kovarianten.

§ 14. Fundamentaleigenschaften der Kovarianten.

1. Man versteht unter Kovariante einer Form m^{ter} Ordnung

1) $$f(x,y) = a_0 x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \binom{m}{2} a_2 x^{m-2} y^2 + \ldots$$

eine Funktion φ von x und y, deren Koefficienten aus den Koefficienten der gegebenen Form gebildet sind, von folgender Eigenschaft:

„Transformiert man sowohl φ als f durch die lineare Substitution

$$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta,$$

in $\Phi(\xi,\eta)$ und $F(\xi,\eta)$ und bildet aus der transformierten Form F die der Funktion φ entsprechende Funktion φ', so ist die aus der transformierten Form gebildete Funktion bis auf eine Potenz der Substitutionsdeterminante gleich der durch die lineare Substitution transformierten Funktion der ursprünglichen Form, nämlich

2) $$\varphi' = (pq' - p'q)^{\alpha}\, \Phi,$$

d. h. die Kovariante der transformierten Form ist, bis auf einen Faktor, gleich der transformierten Kovariante der ursprünglichen Form."

Beispiel. Die Funktion

$$\varphi = (a_0 a_2 - a_1^2)\, x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)\, xy + (a_1 a_3 - a_2^2)\, y^2$$

ist eine Kovariante* der kubischen Form

$$f = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3.$$

Denn durch die lineare Substitution

* Von Clebsch wird dieselbe durch $\frac{1}{2}\Delta$ bezeichnet.

$$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta$$

geht die Kovariante φ über in

$$\begin{aligned}\Phi = &\{(a_0a_2 - a_1^2)p^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)pp' + (a_1a_3 - a_2^2)p'^2\}\,\xi^2 + \\ &+ \{2(a_0a_2 - a_1^2)pq + (a_0a_3 - a_1a_2)(pq' + p'q) + 2(a_1a_3 - a_2^2)p'q'\}\,\xi\eta + \\ &+ \{(a_0a_2 - a_1^2)q^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)qq' + (a_1a_3 - a_2^2)q'^2\}\,\eta^2.\end{aligned}$$

Bildet man jetzt von der transformierten Form

$$F = A_0\xi^3 + 3A_1\xi^2\eta + 3A_2\xi\eta^2 + A_3\eta^3$$

die Kovariante, so hat man

$$\varphi' = (A_0A_2 - A_1^2)\,\xi^2 + (A_0A_3 - A_1A_2)\,\xi\eta + (A_1A_3 - A_2^2)\,\eta^2,$$

wo

$$\begin{aligned}A_0 &= a_0p^3 + 3a_1p^2p' + 3a_2pp'^2 + a_3p'^3\\ A_1 &= (a_0p^2 + a_2p'^2)\,q + 2(a_1q + a_2q')\,pp' + (a_1p^2 + a_3p'^2)\,q'\\ A_2 &= (a_0q^2 + a_2q'^2)\,p + 2(a_1p + a_2p')\,qq' + (a_1q^2 + a_3q'^2)\,p'\\ A_3 &= a_0q^2 + 3a_1q^2q' + 3a_2qq'^2 + a_3q'^3,\end{aligned}$$

und man findet, dass

$$(A_0A_2 - A_1^2)\,\xi^2 + (A_0A_3 - A_1A_2)\,\xi\eta + (A_1A_3 - A_2^2)\,\eta^2 = (pq' - p'q)^2 \cdot \Phi.$$

Die Kovarianten sind also Funktionen der Koefficienten und Variabeln einer Form, die sich nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante ändern, wenn man statt der Variabeln und Koefficienten der ursprünglichen Form die Variabeln und Koefficienten der linear transformierten Form einführt; d. h. eine Kovariante φ genügt der Gleichung

3) $$\varphi(A_0, A_1, \ldots, \xi, \eta) = (pq' - p'q)^\mu\,\varphi(a_0, a_1, \ldots, p\xi + q\eta, p'\xi + p'\eta)$$

oder

3a) $$\varphi(A_0, A_1, \ldots, \xi, \eta) = (pq' - p'q)^\mu\,\varphi(a_0, a_1, \ldots, x, y).$$

2. Bezeichnet man durch m die Ordnung der Form, nennt, wie bei den Invarianten, μ den Index der Kovariante und setzt fest, dass ν die Ordnung der Kovariante (in Bezug auf die Variabeln), ϱ der Grad der Kovariante (in Bezug auf die Koefficienten) bedeuten soll, so hat man zunächst den Satz:

Der Index der Kovariante ist $\mu = \frac{1}{2}(m\varrho - \nu)$.

Beweis. Da die Koefficienten A m^{ten} Grades in Bezug auf p, q, p', q' sind und auf dem ϱ^{ten} Grad in die Kovariante eingehen, so ist die Dimension von $\varphi(A, \xi, \eta)$ in den p, q gleich $m\varrho$. Die ξ, η treten in der Kovariante selbst auf dem ν^{ten} Grad auf und sind linear mit p, q verbunden, so dass die Dimension (Ordnung) von

$\varphi(a, p\xi+q\eta, p'\xi+q'\eta)$ gleich ν ist. Da nun die Substitutionsdeterminante selbst zweiten Grades ist, so hat man zufolge der Definitionsgleichung

$$\varphi(A, \xi, \eta) = (pq'-p'q)^{\mu} \cdot \varphi(a, p\xi+q\eta, p'\xi+q'\eta)$$

die Gleichung

$$m\varrho = 2\mu+\nu, \quad \mu = \tfrac{1}{2}(m\varrho-\nu).$$

So ist z. B. für $m=3$, $\varrho=2$, $\nu=2$, auch $\mu=2$, wie obiges Beispiel beweist.

Aus dem Werte von μ folgt noch:

Für Formen gerader Ordnung sind die Kovarianten ebenfalls gerader Ordnung.*

3. Die Gewichte der aufeinander folgenden Koefficienten einer Kovariante bilden eine arithmetische Progression mit dem Anfangsglied $\mu = \frac{1}{2}(m\varrho-\nu)$ und der Differenz 1.

Denn durch die Substitution

$$x=\xi, \quad y=\alpha\eta$$

erhält der Koefficient des Gliedes $\xi^{m-k}\eta^k$ in $\varphi(A, \xi, \eta)$ den Faktor α^{π_k}, wo π_k das Gewicht des Koefficienten bedeutet, während in

$$(pq'-p'q)^{\mu} \cdot \varphi(a, x, y)$$

der Faktor $\alpha^{\mu+k}$ eingeht. Also ist

$$\pi_k = \mu+k,$$

woraus die angegebene Eigenschaft folgt.

So sind z. B. für $m=4$, $\varrho=3$, $\nu=6$ die successiven Gewichte der Koefficienten der Kovariante 3, 4, ..., 9.

Mit Hilfe der Gewichte und des Grades der Koefficienten einer Kovariante kann dieselbe in allgemeiner Form angeschrieben werden. Die Bestimmung der Koefficienten geschieht nach dem Folgenden mit Hilfe von Differentialgleichungen.

4. Vertauscht man in einer Form die symmetrisch gelegenen Koefficienten mit einander, so gehen auch in der Kovariante die symmetrischen Glieder in einander über. Denn führt man die Substitution $x=\eta$, $y=\xi$ aus, was mit einer Vertauschung von x und y gleichbedeutend ist, so transformiert sich die Kovariante in die mit symmetrisch gelegenen Koefficienten und man hat

---

* Es soll hier konsequent an der schon früher, pag. 103 festgesetzten Unterscheidung zwischen Ordnung und Grad festgehalten werden. Die Ordnung entspricht den Variabeln und der Grad den Koefficienten.

$$\varphi(a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0, \xi, \eta) = (-1)^\mu \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_m, \eta, \xi),$$

was nur möglich ist, wenn der Koefficient von $\xi^{m-k}\eta^k$ dem von $\xi^k\eta^{m-k}$ durch Vertauschung von a_k mit a_{m-k}, welche an der Form durch obige Substitution geleistet wird, bis aufs Vorzeichen gleich wird. Durch diese Vertauschung ändern die Glieder der Kovariante das Vorzeichen oder nicht, je nachdem der Index ungerade oder gerade ist.

5. Jede Kovariante φ genügt der partiellen Differentialgleichung

$$4) \qquad y\frac{\partial\varphi}{\partial x} = a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + 3a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots + ma_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_m}.$$

Beweis. Durch die Substitution

$$x = \xi + \varepsilon\eta, \quad y = \eta$$

hat man

$$\varphi(A_0, \ldots, A_m, \xi, \eta) = \varphi(a_0, \ldots, a_m, \xi + \varepsilon\eta, \eta)$$

oder

$$\varphi(A_0, \ldots, A_m, x - \varepsilon y, y) = \varphi(a_0, \ldots, a_m, x, y).$$

Entwickelt man die linke Seite dieser Gleichung mit Hilfe des Taylorschen Satzes nach Potenzen von ε, so ergiebt sich die Gleichung*

$$\varphi + \varepsilon\left\{-y\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial a_0}\delta a_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial a_1}\delta a_1 + \ldots\right\} + M\varepsilon^2 + \ldots = \varphi,$$

die für jedes ε giltig ist. Es müssen daher die Koefficienten sämtlicher Potenzen von ε, insbesondere der Koefficient von ε^1 verschwinden, was unmittelbar die Gleichung 4) liefert.

Durch Vertauschung von x und y geht 4) über in

$$5) \qquad x\frac{\partial\varphi}{\partial y} = a_m\frac{\partial\varphi}{\partial a_{m-1}} + 2a_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{m-2}} + \ldots + ma_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0},$$

eine partielle Differentialgleichung, der die Kovariante ebenfalls genügt.

Anwendung. Die allgemeine Form einer Kovariante ν^{ter} Ordnung sei

$$6) \qquad \varphi = C_0x^\nu + \binom{\nu}{1}C_1x^{\nu-1}y + \binom{\nu}{2}C_2x^{\nu-2}y^2 + \ldots + C_\nu y^\nu.$$

Führt man diesen Ausdruck für φ in die partielle Differentialgleichung 4) ein, so erhält man

---

* Vergleiche § 10, 8.

$$\begin{aligned}
&\nu C_0 x^{\nu-1}y+\nu(\nu-1)C_1x^{\nu-2}y^2+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2}C_2x^{\nu-3}y^3+\ldots+\nu C_{\nu-1}y^\nu=\\
&=a_0\left\{\frac{\partial C_0}{\partial a_1}x^\nu+\nu\frac{\partial C_1}{\partial a_1}x^{\nu-1}y+\binom{\nu}{2}\frac{\partial C_2}{\partial a_1}x^{\nu-2}y^2+\ldots+\frac{\partial C_\nu}{\partial a_1}y^\nu\right\}+\\
&+2a_1\left\{\frac{\partial C_0}{\partial a_2}x^\nu+\nu\frac{\partial C_1}{\partial a_2}x^{\nu-1}y+\binom{\nu}{2}\frac{\partial C_2}{\partial a_2}x^{\nu-2}y^2+\ldots+\frac{\partial C_\nu}{\partial a_2}y^\nu\right\}+\\
&+3a_2\left\{\frac{\partial C_0}{\partial a_3}x^\nu+\nu\frac{\partial C_1}{\partial a_3}x^{\nu-1}y+\binom{\nu}{2}\frac{\partial C_2}{\partial a_3}x^{\nu-2}y^2+\ldots+\frac{\partial C_\nu}{\partial a_3}y^\nu\right\}+\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ma_{m-1}\left\{\frac{\partial C_0}{\partial a_m}x^\nu+\nu\frac{\partial C_1}{\partial a_m}x^{\nu-1}y+\binom{\nu}{2}\frac{\partial C_2}{\partial a_m}x^{\nu-2}y^2+\ldots+\frac{\partial C_\nu}{\partial a_m}y^\nu\right\}=\\
&=x^\nu\left\{a_0\frac{\partial C_0}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial C_0}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial C_0}{\partial a_3}+\ldots+ma_{m-1}\frac{\partial C_0}{\partial a_m}\right\}+\\
&+\nu x^{\nu-1}y\left\{a_0\frac{\partial C_1}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial C_1}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial C_1}{\partial a_3}+\ldots+ma_{m-1}\frac{\partial C_1}{\partial a_m}\right\}+\\
&+\binom{\nu}{2}x^{\nu-2}y^2\left\{a_0\frac{\partial C_2}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial C_2}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial C_2}{\partial a_3}+\ldots+ma_{m-1}\frac{\partial C_2}{\partial a_m}\right\}+\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+y^\nu\left\{a_0\frac{\partial C_\nu}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial C_\nu}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial C_\nu}{\partial a_3}+\ldots+ma_{m-1}\frac{\partial C_\nu}{\partial a_m}\right\},
\end{aligned}$$

woraus das System von Bedingungsgleichungen folgt:

$$7)\quad\begin{cases}
a_0\dfrac{\partial C_0}{\partial a_1}+2a_1\dfrac{\partial C_0}{\partial a_2}+3a_2\dfrac{\partial C_0}{\partial a_3}+\ldots+ma_{m-1}\dfrac{\partial C_0}{\partial a_m}=0\\
a_0\dfrac{\partial C_1}{\partial a_1}+2a_1\dfrac{\partial C_1}{\partial a_2}+3a_2\dfrac{\partial C_1}{\partial a_3}+\ldots+ma_{m-1}\dfrac{\partial C_1}{\partial a_m}=C_0\\
a_0\dfrac{\partial C_2}{\partial a_1}+2a_1\dfrac{\partial C_2}{\partial a_2}+3a_2\dfrac{\partial C_2}{\partial a_3}+\ldots+ma_{m-1}\dfrac{\partial C_2}{\partial a_m}=2C_1\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_0\dfrac{\partial C_\nu}{\partial a_1}+2a_1\dfrac{\partial C_\nu}{\partial a_2}+3a_2\dfrac{\partial C_\nu}{\partial a_3}+\ldots+ma_{m-1}\dfrac{\partial C_\nu}{\partial a_m}=\nu C_{\nu-1}.
\end{cases}$$

Durch Vertauschung von x und y entsteht das entsprechende System:

$$8)\quad\begin{cases}
ma_1\dfrac{\partial C_\nu}{\partial a_0}+(m-1)a_2\dfrac{\partial C_\nu}{\partial a_1}+\ldots+a_m\dfrac{\partial C_\nu}{\partial a_{m-1}}=0\\
ma_1\dfrac{\partial C_{\nu-1}}{\partial a_0}+(m-1)a_2\dfrac{\partial C_{\nu-1}}{\partial a_1}+\ldots+a_m\dfrac{\partial C_{\nu-1}}{\partial a_{m-1}}=C_\nu\\
ma_1\dfrac{\partial C_{\nu-2}}{\partial a_0}+(m-1)a_2\dfrac{\partial C_{\nu-2}}{\partial a_1}+\ldots+a_m\dfrac{\partial C_{\nu-2}}{\partial a_{m-1}}=2C_{\nu-1}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
ma_1\dfrac{\partial C_1}{\partial a_0}+(m-1)a_2\dfrac{\partial C_1}{\partial a_1}+\ldots+a_m\dfrac{\partial C_1}{\partial a_{m-1}}=(\nu-1)C_2\\
ma_1\dfrac{\partial C_0}{\partial a_0}+(m-1)a_2\dfrac{\partial C_0}{\partial a_1}+\ldots+a_m\dfrac{\partial C_0}{\partial a_{m-1}}=\nu C_1.
\end{cases}$$

C_0 ist, wie aus der ersten Gleichung des Systems 7) hervorgeht, eine Semiinvariante, deren Berechnung keine Schwierigkeit bietet.

Beispiel. Setzen wir $m=3$, $\nu=2$, $\varrho=2$. Die Kovariante zweiter Ordnung, zweiten Grades der kubischen Form

$$a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3$$

kann in der allgemeinen Form geschrieben werden

$$C_0x^2+2C_1xy+C_2y^2.$$

Die Gewichte der Koefficienten C_0, C_1, C_2 sind nach Nr. 3 bezüglich 2, 3, 4 und die Koefficienten haben die Form

$$\begin{aligned} C_0&=p_0a_0a_2+p_1a_1^2\\ C_1&=q_0a_0a_3+q_1a_1a_2\\ C_2&=p_0a_1a_3+p_1a_2^2. \end{aligned}$$

Bilden wir nun das System von Differentialgleichungen 7)

$$\begin{aligned} a_0\frac{\partial C_0}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial C_0}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial C_0}{\partial a_3}&=0\\ a_0\frac{\partial C_1}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial C_1}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial C_1}{\partial a_3}&=C_0, \end{aligned}$$

nämlich

$$\begin{aligned} 2a_0a_1(p_0+p_1)&=0\\ a_0a_2(q_1+3q_0)+2a_1^2q_1&=p_0a_0a_2+p_1a_1^2 \end{aligned}$$

und setzen $p_0=1$, so wird $p_1=-1$ und man hat für q_0, q_1 die identische Gleichung

$$a_0a_2(3q_0+q_1-1)+a_1^2(2q_1+1)=0,$$

woraus

$$q_0=\tfrac{1}{2},\quad q_1=-\tfrac{1}{2}.$$

Also hat man für die Koefficienten die Werte

$$\begin{aligned} C_0&=a_0a_2-a_1^2\\ C_1&=\tfrac{1}{2}(a_0a_3-a_1a_2)\\ C_2&=a_1a_3-a_2^2, \end{aligned}$$

und die gesuchte Kovariante lautet

$$(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)xy+(a_1a_3-a_2^2)y^2.$$

6. Berechnung der Koefficienten einer Kovariante.

Nimmt man den ersten Koefficienten C_0 als bekannt an, so können alle anderen Koefficienten der Reihe nach durch einfache Differentiationen gefunden werden. Denn den Gleichungen 8) zufolge hat man

9)
$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{\nu}\sum_0^{m-1} k\,(m-k)\,a_{k+1}\frac{\partial C_0}{\partial a_k} \\ C_2 = \frac{1}{\nu-1}\sum k\,(m-k)\,a_{k+1}\frac{\partial C_1}{\partial a_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_\nu = \sum k\,(m-k)\,a_{k+1}\frac{\partial C_{\nu-1}}{\partial a_k}. \end{cases}$$

Beispiel. Die Koefficienten der Kovariante sechster Ordnung, zweiten Grades der Form fünfter Ordnung, nämlich

x^6	x^5y	x^4y^2	x^3y^3	x^2y^4	xy^5	y^6
$+a_0a_2$	$+3a_0a_3$	$+3a_0a_4$	$+a_0a_5$	$+3a_1a_5$	$+3a_2a_5$	$+a_3a_5$
$-a_1^2$	$-3a_1a_2$	$+3a_1a_3$	$+7a_1a_4$	$+3a_2a_4$	$-3a_3a_4$	$-a_4^2$
		$-6a_2^2$	$-8a_2a_3$	$-6a_3^2$		

können aus
$$C_0 = a_0a_2 - a_1^2$$
abgeleitet werden vermöge der Gleichungen

$$C_1 = \tfrac{1}{6}\left(5a_1\frac{\partial C_0}{\partial a_0} + 4a_2\frac{\partial C_0}{\partial a_1} + 3a_3\frac{\partial C_0}{\partial a_2}\right)$$
$$C_2 = \tfrac{1}{5}\left(5a_1\frac{\partial C_1}{\partial a_0} + 4a_2\frac{\partial C_1}{\partial a_1} + 3a_3\frac{\partial C_1}{\partial a_2} + 2a_4\frac{\partial C_1}{\partial a_3}\right)$$
$$C_3 = \tfrac{1}{4}\left(5a_1\frac{\partial C_2}{\partial a_0} + 4a_2\frac{\partial C_2}{\partial a_1} + 3a_3\frac{\partial C_2}{\partial a_2} + 2a_4\frac{\partial C_2}{\partial a_3} + a_5\frac{\partial C_2}{\partial a_4}\right).$$

C_4, C_5, C_6 werden aus C_2, C_1, C_0, bezüglich durch Vertauschung der symmetrisch gelegenen Koefficienten gefunden.

Anmerkung. Bezeichnet man, wie früher, die Operation
$$a_0\frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots$$
zur Abkürzung durch δ, so verschwindet die Kovariante
$$\varphi = C_0x^\nu + \binom{\nu}{1}C_1x^{\nu-1}y + \ldots,$$
wenn man an ihr die Operation
$$\delta - y\frac{\partial}{\partial x}$$
ausführt; d. h.
$$\left[x^\nu.\delta C_0 + \binom{\nu}{1}x^{\nu-1}y.\delta C_1 + \ldots + y^\nu\delta C_\nu\right] -$$
$$-\nu y\left[C_0x^{\nu-1} + \binom{\nu}{1}C_1x^{\nu-2}y + \ldots + C_{\nu-1}y^{\nu-1}\right] = 0,$$

und diese Identität liefert durch Gleichsetzung der entsprechenden Koefficienten die obigen Relationen (7) in symbolischer Form:

$$\delta C_0 = 0, \quad \delta C_1 = C_0, \quad \delta C_2 = 2C_1, \quad \ldots, \quad \delta C_\nu = \nu C_{\nu-1},$$

mit Hilfe deren aus dem letzten Koefficienten C_ν die übrigen Koefficienten der Kovariante berechnet werden können. C_ν bestimmt man aus C_0, das als Semiinvariante nach früheren Sätzen berechnet werden kann, durch Vertauschung der symmetrisch gelegenen Koefficienten.

Bezeichnet man ferner die Operation

$$a_m \frac{\partial}{\partial a_{m-1}} + 2a_{m-1}\frac{\partial}{\partial a_{m-2}} + \ldots + m a_1 \frac{\partial}{\partial a_0}$$

durch δ', so findet man auf entsprechende Weise

$$\delta' C_0 = \nu C_1, \quad \delta' C_1 = (\nu-1) C_2, \quad \ldots, \quad \delta' C_{\nu-1} = C_\nu, \quad \delta' C_\nu = 0.$$

7. Bezeichnet man durch δ_1 und δ_2 die Prozesse

$$10) \qquad \delta_1 = p\frac{\partial}{\partial q} + p'\frac{\partial}{\partial q'}, \quad \delta_2 = q\frac{\partial}{\partial p} + q'\frac{\partial}{\partial p'},$$

so sind die für die Kovariante φ'* der transformierten Form F giltigen Gleichungen (vergl. Nr. 5 dieses Paragraphen)

$$11) \qquad \begin{cases} \sum_k k A_{k-1}\dfrac{\partial \varphi'}{\partial A_k} - \eta \dfrac{\partial \varphi'}{\partial \xi} = 0 \\ \sum_k (m-k) A_{k+1}\dfrac{\partial \varphi'}{\partial A_k} - \xi \dfrac{\partial \varphi'}{\partial \eta} = 0 \end{cases}$$

gleichbedeutend mit den beiden Gleichungen**

$$12) \qquad \delta_1 \varphi' = 0, \quad \delta_2 \varphi' = 0.$$

Beweis. Die Koefficienten der transformierten Form haben die Werte***

$$13) \qquad A_k = \frac{\Pi(m-k)}{\Pi(m)}\left(q\frac{\partial}{\partial p} + q'\frac{\partial}{\partial p'}\right)^k f(p, p')$$

oder

$$13a) \qquad A_k = \frac{\Pi(k)}{\Pi(m)}\left(p\frac{\partial}{\partial q} + p'\frac{\partial}{\partial q'}\right)^{m-k} f(q, q'),$$

woraus folgt, dass sie den Gleichungen genügen

$$14) \qquad k A_{k-1} = \delta_1 A_k, \quad (m-k) A_{k+1} = \delta_2 A_k.$$

Bezüglich der Variabeln gelten die Relationen

---

* Vergleiche Nr. 1 dieses Paragraphen.

** Vergleiche § 10, 10 oder Bruno, Math. Ann. XVIII.

*** Vergleiche § 10, 2.

14a)
$$\begin{cases} r\xi = q'x - qy \\ r\eta = py - p'x \\ r = pq' - p'q, \end{cases}$$

woraus

$$\delta_1\xi = -\eta, \quad \delta_2\xi = 0, \quad \delta_1\eta = 0, \quad \delta_2\eta = -\xi.$$

Bezeichnet man ferner durch

$$\delta_1[\varphi'], \quad \frac{\partial[\varphi']}{\partial p}, \text{ u. s. w.,}$$

dass die Differentiationen nach p, p', q, q' nur soweit vorgenommen werden sollen, als diese Grössen in ξ, η, nicht in den Koefficienten von φ', enthalten sind, so erhält man

15)
$$\begin{cases} \delta_1[\varphi'] = p\dfrac{\partial[\varphi']}{\partial q} + p'\dfrac{\partial[\varphi']}{\partial q'} = \\ \quad = p\left(\dfrac{\partial\varphi'}{\partial\xi}\cdot\dfrac{\partial\xi}{\partial q} + \dfrac{\partial\varphi'}{\partial\eta}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial q}\right) + p'\left(\dfrac{\partial\varphi'}{\partial\xi}\cdot\dfrac{\partial\xi}{\partial q'} + \dfrac{\partial\varphi'}{\partial\eta}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial q'}\right) = \\ \quad = \dfrac{\partial\varphi'}{\partial\xi}\left(p\dfrac{\partial\xi}{\partial q} + p'\dfrac{\partial\xi}{\partial q'}\right) + \dfrac{\partial\varphi'}{\partial\eta}\left(p\dfrac{\partial\eta}{\partial q} + p'\dfrac{\partial\eta}{\partial q'}\right) = \\ \quad = \dfrac{\partial\varphi'}{\partial\xi}\cdot\delta_1\xi + \dfrac{\partial\varphi'}{\partial\eta}\delta_1\eta = -\eta\dfrac{\partial\varphi'}{\partial\xi}; \\ \delta_2[\varphi'] = q\dfrac{\partial[\varphi']}{\partial p} + q'\dfrac{\partial[\varphi']}{\partial p'} = \dfrac{\partial\varphi'}{\partial\xi}\delta_2\xi + \dfrac{\partial\varphi'}{\partial\eta}\delta_2\eta = -\xi\dfrac{\partial\varphi'}{\partial\eta}. \end{cases}$$

Berücksichtigt man aber die Relationen

$$kA_{k-1} = \delta_1 A_k, \quad (m-k)A_{k+1} = \delta_2 A_k,$$

so lauten die Gleichungen 11)

$$\sum\nolimits_k \frac{\partial\varphi'}{\partial A_k}\delta_1 A_k - \eta\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi} = 0$$

$$\sum\nolimits_k \frac{\partial\varphi'}{\partial A_k}\delta_2 A_k - \xi\frac{\partial\varphi'}{\partial\eta} = 0$$

und mit Rücksicht auf 15)

16)
$$\begin{cases} \sum\nolimits_k \dfrac{\partial\varphi'}{\partial A_k}\delta_1 A_k + \delta_1[\varphi'] = 0 \\ \sum\nolimits_k \dfrac{\partial\varphi'}{\partial A_k}\delta_2 A_k + \delta_2[\varphi'] = 0, \end{cases}$$

die nach Ausdehnung der Symbole δ_1, δ_2 auf die Koefficienten und Variabeln von φ' liefern

17)
$$\delta_1\varphi' = 0, \quad \delta_2\varphi' = 0.$$

Diese beiden Gleichungen würden unmittelbar evident sein, wenn man die in 3a) Nr. 1 dieses Paragraphen ausgesprochene Definition der

Kovarianten zu Hilfe nehmen wollte, da $\delta_1 r = 0$, $\delta_2 r = 0$ ist. Allein hier sollte der Satz in Nr. 7 unabhängig von der angegebenen Definition der Funktion φ einzig auf die partiellen Differentialgleichungen 11) gestützt werden. Diese Eigenschaft soll nun im Folgenden umgekehrt zum Beweise benutzt werden, dass jede Funktion, die den Differentialgleichungen 4) und 5) genügt, eine Kovariante ist. Hiernach sieht man, dass diese Differentialgleichungen in der That charakteristisch für diese Funktionen sind, denn sie liefern die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für dieselben.

8. Jede homogene ganze Funktion $\varphi(a, x, y)$ ν^{ter} Ordnung, ϱ^{ten} Grades, die den partiellen Differentialgleichungen

$$18) \quad \begin{cases} \sum_k^k k a_{k-1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_k} = y \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \sum_k^k (m-k) a_{k+1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_k} = x \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

genügt, befriedigt auch die Gleichung

$$19) \quad \varphi'(\xi, \eta) = (pq' - p'q)^{\mu} \cdot \varphi(x, y),$$

wo φ' die Funktion $\varphi(A, \xi, \eta)$ für die durch die lineare Substitution

$$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta$$

transformierte Form F bedeutet.*

Beweis.** Sollen die beiden Gleichungen 18) für irgend eine Form f befriedigt sein, so sind ebenso auch die Gleichungen 11) für die Form F befriedigt, also auch, nach Nr. 7, die Gleichungen 12). Aus diesen folgen aber die beiden Gleichungen

$$0 = \delta_1(\delta_2\varphi') = p\left(q\frac{\partial^2\varphi'}{\partial p \partial q} + q'\frac{\partial^2\varphi'}{\partial p' \partial q} + \frac{\partial \varphi'}{\partial p}\right) + p'\left(q\frac{\partial^2\varphi'}{\partial p \partial q'} + q'\frac{\partial^2\varphi'}{\partial p' \partial q'} + \frac{\partial \varphi'}{\partial q'}\right),$$

$$0 = \delta_2(\delta_1\varphi') = q\left(p\frac{\partial^2\varphi'}{\partial p \partial q} + p'\frac{\partial^2\varphi'}{\partial p \partial q'} + \frac{\partial \varphi'}{\partial q}\right) + q'\left(p\frac{\partial^2\varphi'}{\partial p' \partial q} + p'\frac{\partial^2\varphi'}{\partial p' \partial q'} + \frac{\partial \varphi'}{\partial q'}\right),$$

aus denen man durch Subtraktion zunächst die Gleichung ableitet

$$20) \quad \delta_1(\delta_2\varphi') - \delta_2(\delta_1\varphi') = p\frac{\partial \varphi'}{\partial p} + p'\frac{\partial \varphi'}{\partial p'} - q\frac{\partial \varphi'}{\partial q} - q'\frac{\partial \varphi'}{\partial q'} = 0.$$

Hierzu fügt man eine zweite Gleichung, die nach dem bekannten Theorem über die homogenen Funktionen sich ergiebt. Es ist nämlich

$$p\frac{\partial \xi}{\partial p} + q\frac{\partial \xi}{\partial q} + p'\frac{\partial \xi}{\partial p'} + q'\frac{\partial \xi}{\partial q'} = -\xi,$$

$$p\frac{\partial \eta}{\partial p} + q\frac{\partial \eta}{\partial q} + p'\frac{\partial \eta}{\partial p'} + q'\frac{\partial \eta}{\partial q'} = -\eta,$$

* Cayley, second memoir on Quantics, Phil. Trans. 1855, pag. 101 u. f.

** Brioschi, Annali di Matematica Bd. 1, 1858, pag. 353.

woraus durch Multiplikation mit bezüglich $\frac{\partial \varphi'}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \varphi'}{\partial \eta}$ und Addition sich zunächst ergiebt

$$21)\quad p\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial p}+\frac{\partial \varphi'}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)+q\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial q}+\frac{\partial \varphi'}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial q}\right)+\ldots=p\frac{\partial [\varphi']}{\partial p}+$$
$$+q\frac{\partial [\varphi']}{\partial q}+p'\frac{\partial [\varphi']}{\partial p'}+q'\frac{\partial [\varphi']}{\partial q'}=-\left(\xi\frac{\partial \varphi'}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial \varphi'}{\partial \eta}\right)=-\nu\varphi',$$

wo ν die Ordnung der Form φ bedeutet.

Ebenso folgt aus der Erwägung, dass A_0, A_1, ... homogen in den p und q, vom m^{ten} Grad sind

$$p\frac{\partial A_k}{\partial p}+q\frac{\partial A_k}{\partial q}+p'\frac{\partial A_k}{\partial p'}+q'\frac{\partial A_k}{\partial q'}=mA_k,$$

und, indem man diese Gleichung mit $\frac{\partial \varphi'}{\partial A_k}$ multipliziert und über alle Werte k von 0 bis m summiert,

$$21a)\quad \sum\nolimits_k\left(p\frac{\partial \varphi'}{\partial A_k}\cdot\frac{\partial A_k}{\partial p}+q\frac{\partial \varphi'}{\partial A_k}\cdot\frac{\partial A_k}{\partial q}+p'\frac{\partial \varphi'}{\partial A_k}\cdot\frac{\partial A_k}{\partial p'}+q'\frac{\partial \varphi'}{\partial A_k}\cdot\frac{\partial A_k}{\partial q'}\right)=m\sum\nolimits_k A_k\frac{\partial \varphi'}{\partial A_k}.$$

Die Verbindung von 21) mit 21a) liefert

$$22)\quad p\frac{\partial \varphi'}{\partial p}+q\frac{\partial \varphi'}{\partial q}+p'\frac{\partial \varphi'}{\partial p'}+q'\frac{\partial \varphi'}{\partial q'}=m\sum_0^m{}_k A_k\frac{\partial \varphi'}{\partial A_k}-\nu\varphi'.$$

Nun ist aber jeder Koefficient in φ' eine homogene ganze Funktion der A vom Grade ϱ, so dass auch

$$\sum_0^m{}_k A_k\frac{\partial \varphi'}{\partial A_k}=\varrho\varphi'.$$

Wir erhalten also schliesslich aus 22) die gesuchte zweite Gleichung

$$23)\quad p\frac{\partial \varphi'}{\partial p}+q\frac{\partial \varphi'}{\partial q}+p'\frac{\partial \varphi'}{\partial p'}+q'\frac{\partial \varphi'}{\partial q'}=(m\varrho-\nu)\varphi'=2\mu\varphi',$$

wo μ den Index der Form φ bedeutet.

Die Gleichungen 20) und 23) liefern nun

$$24)\quad \begin{cases} p\dfrac{\partial \varphi'}{\partial p}+p'\dfrac{\partial \varphi'}{\partial p'}=\mu\varphi' \\ q\dfrac{\partial \varphi'}{\partial q}+q'\dfrac{\partial \varphi'}{\partial q'}=\mu\varphi', \end{cases}$$

die wir mit den Gleichungen

$$24a)\quad \begin{cases} p\dfrac{\partial \varphi'}{\partial q}+p'\dfrac{\partial \varphi'}{\partial q'}=0 \\ q\dfrac{\partial \varphi'}{\partial p}+q'\dfrac{\partial \varphi'}{\partial p'}=0 \end{cases}$$

zu einem simultanen System vereinen, das auch in der Form geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial \log \varphi'}{\partial p} = \frac{\partial \log (pq'-p'q)^\mu}{\partial p},$$
$$\frac{\partial \log \varphi'}{\partial p'} = \frac{\partial \log (pq'-p'q)^\mu}{\partial p'},$$
$$\frac{\partial \log \varphi'}{\partial q} = \frac{\partial \log (pq'-p'q)^\mu}{\partial q},$$
$$\frac{\partial \log \varphi'}{\partial q'} = \frac{\partial \log (pq'-p'q)^\mu}{\partial q'}.$$

Die Integration nach φ' ergiebt daher den Ausdruck

$$\varphi' = (pq'-p'q)^\mu \cdot \psi,$$

wo ψ eine Funktion von $a_0, a_1, \ldots, a_m$ und x, y bedeutet, die p, q, p', q' nicht mehr enthält.

Um ψ zu bestimmen, setze man in der Integralgleichung $p = q' = 1$, $q = p' = 0$, wodurch $A_0, A_1, \ldots, \xi, \eta$ bezüglich in $a_0, a_1, \ldots, x, y$ übergehen. Es ist also

$$\psi = \varphi(a_0, a_1, \ldots, x, y)$$

und

$$\varphi'(\xi, \eta) = (pq'-p'q)^\mu \cdot \varphi(x, y),$$

womit der Satz bewiesen ist.

9. Der Satz 3 dieses Paragraphen soll nun ebenfalls mittelst der Differentialgleichungen bewiesen werden:

In jeder Funktion φ, ν^{ter} Ordnung, ϱ^{ten} Grades, die den partiellen Differentialgleichungen

$$a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots = y \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
$$a_m \frac{\partial \varphi}{\partial a_{m-1}} + 2a_{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{m-2}} + \ldots = x \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

genügt, ist das Gewicht des Koefficienten C_k von $x^{\nu-k}y^k$

$$\pi_k = \tfrac{1}{2}(m\varrho - \nu) + k.$$

Beweis. Wir bezeichnen wie oben durch δ und δ' die Operationen

$$\delta = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + ma_{m-1} \frac{\partial}{\partial a_m},$$
$$\delta' = ma_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (m-1)a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + a_m \frac{\partial}{\partial a_{m-1}}.$$

Ferner sei

$$\delta\delta'\varphi$$

das Resultat der Operation δ, wenn dieselbe auf sämtliche in $\delta'\varphi$ enthaltene Koefficienten von f ausgedehnt wird; und

$$\delta\,[\delta'\varphi]$$

das Resultat der Operation δ, wenn dieselbe nur auf die explicite und linear in der Operation δ' stehenden Koefficienten a_1, a_2, ... erstreckt wird. Analog seien

$$\delta'\delta\varphi \text{ und } \delta'[\delta\varphi]$$

definiert. Man hat dann

$$\delta\,[\delta'\varphi]=ma_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}+2(m-1)a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+\ldots+2(m-1)a_{m-2}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{m-2}}+ma_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{m-1}},$$

$$\delta'\,[\delta\varphi]=ma_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+2(m-1)a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots+2(m-1)a_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{m-1}}+ma_m\frac{\partial\varphi}{\partial a_m},$$

$$\delta\,\delta'\varphi=\delta\,[\delta'\varphi]+D,$$
$$\delta'\delta\,\varphi=\delta'[\delta\,\varphi]+D',$$

wo

$$D=ma_0a_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_0\partial a_1}+2ma_1{}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_0\partial a_2}+\ldots=D'.$$

Daher

$$\delta\,\delta'\varphi-\delta'\delta\,\varphi=\delta\,[\delta'\varphi]-\delta'\,[\delta\,\varphi]=$$
$$=ma_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}+(m-2)a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+\ldots-(m-2)\,a_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{m-1}}-ma_m\frac{\partial\varphi}{\partial a_m}=\vartheta\varphi.$$

Nun verschwindet die Kovariante φ durch Anwendung einer der Operationen

$$\delta-y\frac{\partial}{\partial x},\quad \delta'-x\frac{\partial}{\partial y},$$

folglich auch durch Anwendung der successiven Operationen

$$\left(\delta-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\delta'-x\frac{\partial}{\partial y}\right)-\left(\delta'-x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\delta-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=\delta\,\delta'-\delta'\delta+y\frac{\partial}{\partial y}-x\frac{\partial}{\partial x},$$

d. h., da hierbei die Ordnung eines Terms nicht geändert wird: jeder Term der Kovariante verschwindet durch Anwendung der Operation

$$\vartheta+y\frac{\partial}{\partial y}-x\frac{\partial}{\partial x}.$$

Nehmen wir also einen Term der Kovariante von der Form

$$a_0{}^{\varepsilon_0}a_1{}^{\varepsilon_1}\ldots a_m{}^{\varepsilon_m}.x^hy^k$$

und wenden darauf die angegebene Operation an, so verschwindet der Ausdruck

$$m\varepsilon_0+(m-2)\varepsilon_1+\ldots-(m-2)\,\varepsilon_{m-1}-m\varepsilon_m+k-h=0$$

oder in anderer Form

$$2k-k-h+m\,(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_m)-2\,(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\ldots+m\varepsilon_m)=0.$$

Nun ist

$$k + h = \nu,$$
$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \ldots + m\varepsilon_m = \pi_k,$$
$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m = \varrho,$$

so dass sich der Wert von π_k ergiebt

$$\pi_k = \tfrac{1}{2}(m\varrho - \nu) + k.$$

Anmerkung 1. Für die Invarianten ist

$$h = k = 0,$$

und man hat in diesem Falle die bekannte Beziehung

$$\pi_k = \tfrac{1}{2} m\varrho$$

und den Satz, dass jede homogene Funktion ϱ^{ten} Grades der Koefficienten der Form, die den symbolischen Gleichungen

$$\delta = 0, \quad \delta' = 0$$

genügt, das Gewicht $\frac{1}{2} m\varrho$ hat.

10. Mit Hilfe der Gleichungen 9) Nr. 6 dieses Paragraphen, können aus C_0 die sämtlichen Koefficienten der Kovariante berechnet werden, doch bleibt dann zu beweisen, ob die so bestimmte Funktion in der That eine Kovariante ist. Dies leistet der folgende Satz von Cayley:*

Legt man eine Form m^{ter} Ordnung zu Grunde, setzt C_0 als eine Funktion der Koefficienten vom Grade ϱ und vom Gewicht $\frac{1}{2}(m\varrho - \nu)$ voraus, die der Bedingung

$$\delta C_0 = 0$$

genügt, und bestimmt die Funktionen $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ mit Hilfe der Gleichungen

$$25) \qquad C_1 = \frac{1}{\nu}\delta' C_0, \quad C_2 = \frac{1}{\nu - 1}\delta' C_1, \quad \ldots, \quad C_\nu = \delta' C_{\nu-1},$$

so ist die Funktion

$$C_0 x^\nu + \nu C_1 x^{\nu-1} y + \binom{\nu}{2} C_2 x^{\nu-2} y^2 + \ldots + C_\nu y^\nu$$

eine Kovariante.

Beweis.** Die k-mal hintereinander an C_0 ausgeführte Operation δ', die wir durch $\delta'^k C_0$ bezeichnen, giebt nach den Gleichungen 25) bis auf einen Zahlenfaktor den Wert des Koefficienten C_k, der vom Gewicht $\pi_k = \frac{1}{2}(m\varrho - \nu) + k$ wird. Fährt man mit der Operation δ' an C_0 fort, so erscheint schliesslich der Wert 0. Denn da das grösste

* Cayley, Philos. Trans. 1856, pag. 107 (Second memoir upon Quantics).
** Cayley, Philos. Trans. 1856, pag. 105.

Gewicht eines Koefficienten m ist, so ist das Gewicht von $\delta'^k C_0$ höchstens $m\varrho$, und folglich verschwindet $\delta'^k C_0$, sobald

$$\tfrac{1}{2}(m\varrho - \nu) + k > m\varrho \quad \text{oder} \quad k > \tfrac{1}{2}(m\varrho + \nu)$$

wird.

Nun hat man wie oben Nr. 9:

26) $\delta\delta' C_k - \delta'\delta C_k = \delta[\delta' C_k] - \delta'[\delta C_k] = \vartheta C_k = (m\varrho - 2\pi_k) C_k = (\nu - 2k) C_k$;

also spezieller

$$(\delta\delta' - \delta'\delta) C_0 = \nu C_0,$$

woraus folgt, dass

$$\delta\delta' C_0 = \delta'\delta C_0 + \nu C_0 = \nu C_0,$$

weil nach den Voraussetzungen $\delta C_0 = 0$. Ebenso ist nach 26)

$$(\delta\delta' - \delta'\delta)\,\delta' C_0 = (\nu - 2)\,\delta' C_0,$$

woraus

$$\delta\delta'^2 C_0 = \delta'(\delta\delta' C_0) + (\nu - 2)\,\delta' C_0 = \nu\delta' C_0 + (\nu - 2)\,\delta' C_0 = 2(\nu - 1)\,\delta' C_0.$$

Ferner ist nach 26)

$$(\delta\delta' - \delta'\delta)\,\delta'^2 C_0 = (\nu - 4)\,\delta'^2 C_0,$$

woraus

$$\delta\delta'^3 C_0 = \delta'(\delta\delta'^2 C_0) + (\nu - 4)\,\delta'^2 C_0 = 2(\nu - 1)\,\delta'^2 C_0 + (\nu - 4)\,\delta'^2 C_0 = 3(\nu - 2)\,\delta'^2 C_0,$$

und allgemein

$$\delta\delta'^k C_0 = k(\nu - k + 1)\,\delta'^{k-1} C_0.$$

Setzt man der Reihe nach

$$k = \nu + 1, \quad \nu + 2, \quad \ldots,$$

so hat man

$$\delta\delta'^{\nu+1} C_0 = 0,$$
$$\delta\delta'^{\nu+2} C_0 = -(\nu + 2)\,1\,.\,\delta'^{\nu+1} C_0,$$
$$\delta\delta'^{\nu+3} C_0 = -(\nu + 3)\,.\,2\,\delta'^{\nu+2} C_0,$$
$$\text{u. s. w.,}$$

woraus man schliesst, dass

$$\delta'^{\nu+1} C_0 = 0.$$

Denn wäre $\delta'^{\nu+1} C_0$ von Null verschieden, so wäre auch zufolge der zweiten Gleichung $\delta\delta'^{\nu+2} C_0$ von Null verschieden, folglich auch $\delta'^{\nu+2} C_0$ von Null verschieden; zufolge der dritten Gleichung wäre dann auch $\delta\delta'^{\nu+3} C_0$ und also auch $\delta'^{\nu+3} C_0$ von Null verschieden u. s. w., was nach dem Früheren unmöglich ist.

Aus dem Vorstehenden leitet man nun die Relationen ab

$$\delta C_0 = 0, \quad \delta\delta' C_0 = \nu C_0, \quad \delta\delta'^2 C_0 = 2(\nu - 1)\,\delta' C_0, \quad \ldots,$$
$$\delta\delta'^{\nu} C_0 = \nu\delta'^{\nu-1} C_0, \quad \delta'^{\nu+1} C_0 = 0,$$

die mit Rücksicht auf die Gleichungen 25) übergehen in

$$\delta C_0 = 0, \quad \delta C_1 = C_0, \quad \delta C_2 = 2C_1, \quad \ldots, \quad \delta C_\nu = \nu C_{\nu-1}, \quad \delta' C_\nu = 0.$$

Diese Gleichungen liefern aber unmittelbar die nach Nr. 8 dieses Paragraphen für die Kovarianten charakteristischen Gleichungen der Nr. 6 dieses Paragraphen.

Anmerkung. Insbesondere ist eine Funktion C_0 vom Grade ϱ und vom Gewicht $\frac{1}{2}m\varrho$, die der Bedingung

$$\delta C_0 = 0$$

genügt, eine Invariante, was der in § 10, 11 benutzte Satz ist.

11. Wir können die Operationen, vermöge welcher die Glieder einer Kovariante aus dem ersten oder letzten entstehen, auch noch in anderer Form ausdrücken.*

Vermöge der Beziehungen:

$$\delta C_0 = 0,\ \delta C_1 = C_0,\quad \delta C_2 = 2C_1,\quad \ldots,\ \delta C_\nu = \nu C_{\nu-1},$$
$$\delta' C_\nu = 0,\ \delta' C_{\nu-1} = C_\nu,\ \delta' C_{\nu-2} = 2C_{\nu-1},\ \ldots,\ \delta' C_0 = \nu C_1,$$

schreibt sich die Kovariante φ auch in den Formen:

$$27)\quad \frac{\varphi}{x^\nu} = C_0 + \frac{\delta' C_0}{1}\cdot\frac{y}{x} + \frac{\delta'^2 C_0}{1.2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \ldots + \frac{\delta'^\nu C_0}{1.2.3\ldots\nu}\left(\frac{y}{x}\right)^\nu$$

$$27a)\quad \frac{\varphi}{y^\nu} = C_\nu + \frac{\delta C_\nu}{1}\cdot\frac{x}{y} + \frac{\delta^2 C_\nu}{1.2}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \ldots + \frac{\delta^\nu C_\nu}{1.2.3\ldots\nu}\left(\frac{x}{y}\right)^\nu$$

oder symbolisch

$$\varphi = x^\nu . e^{\frac{y}{x}\delta'} . C_0 = y^\nu . e^{\frac{x}{y}\delta} . C_\nu .$$

Aber in § 10, 9 ist bewiesen, dass 27a) derjenige Ausdruck ist, in welchen das Glied C_ν übergeht, wenn man in C_ν die Grössen

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,$$

ersetzt bezüglich durch die dortigen Koefficienten:

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,$$

wobei nur noch $\frac{x}{y}$ für ε zu setzen ist. Man hat also das Theorem:

Die Koefficienten der Form F, welche sich durch die Substitution

$$x = \xi + \varepsilon\eta$$
$$y = \eta$$

aus f ergiebt, seien bezüglich durch

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots$$

bezeichnet. Jede Kovariante φ kann man dann dadurch aus ihrem letzten Glied C_ν ableiten, dass man an Stelle der in C_ν enthaltenen Grössen

---

* Vergl. Bruno, Crelle Journal 90, pag. 186.

die entsprechenden

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots$$
$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad \ldots$$

einsetzt und dann

$$\varepsilon = \frac{x}{y}$$

setzt.

So erhält man z. B. die quadratische Kovariante der kubischen Form

$$A_1A_3 - A_2^2 = (a_1a_3 - a_2^2) + (a_0a_3 - a_1a_2)\,\varepsilon + (a_0a_2 - a_1^2)\,\varepsilon^2.$$

Ferner erhält man die quadratische Kovariante der Form fünfter Ordnung

$$A_1A_5 - 4A_2A_4 + 3A_3^2 =$$
$$= (a_1a_5 - 4a_2a_4 + 3a_3^2) + (a_0a_5 - 3a_1a_4 + 2a_2a_3)\,\varepsilon +$$
$$+ (a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)\,\varepsilon^2.$$

Ein analoger Satz folgt für die Ableitung der Kovariante aus ihrem ersten Gliede C_0, indem man nur an Stelle der in C_0 enthaltenen Koefficienten von f

$$a_m,\quad a_{m-1},\quad a_{m-2},\quad \ldots$$

die entsprechenden Koeffitienten von F'

$$A'_m,\quad A'_{m-1},\quad A'_{m-2},\quad \ldots$$

setzt, wobei F' aus f durch die Substitution

$$x = \xi$$
$$y = \varepsilon\xi + \eta$$

hervorgeht.

§ 15. Polarenbildung und verwandte Prozesse.

1. Werden die Systeme von Variabeln

$$x, y \text{ und } x', y'$$

durch dieselbe Substitution

1) $$x = p\xi + q\eta,\quad y = p'\xi + q'\eta,$$
2) $$x' = p\xi' + q\eta',\quad y' = p'\xi' + q'\eta'$$

transformiert, so werden die Variabeln x, y und x', y' kogredient genannt.

Wird nun die Form $f(x, y)$ durch die Substitution 1) in $F(\xi, \eta)$ transformiert, dann ist auch

3) $$f(x + \lambda x', y + \lambda y') = F(\xi + \lambda\xi', \eta + \lambda\eta'),$$

wo λ einen willkürlichen Parameter bedeutet. Denn die Grössen $x + \lambda x'$, $y + \lambda y'$ hängen zufolge der Gleichungen 1) und 2) mit $\xi + \lambda\xi'$, $\eta + \lambda\eta'$ auf dieselbe Weise zusammen wie x, y mit ξ, η.

Entwickelt man aber die Gleichung 3) nach der Taylorschen Reihe nach Potenzen von λ, so findet man identisch

$$4) \qquad \left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)=\left(\xi'\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta'\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^k F(\xi,\eta)$$

oder

$$4a) \quad x'^k\frac{\partial^k f}{\partial x^k}+\binom{k}{1}x'^{k-1}y'\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1}\partial y}+\binom{k}{2}x'^{k-2}y'^2\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-2}\partial y^2}+\ldots+y'^k\frac{\partial^k f}{\partial y^k}=$$
$$=\xi'^k\frac{\partial^k F}{\partial \xi^k}+\binom{k}{1}\xi'^{k-1}\eta'\frac{\partial^k F}{\partial \xi^{k-1}\partial \eta}+\binom{k}{2}\xi'^{k-2}\eta'^2\frac{\partial^k F}{\partial \xi^{k-2}\partial \eta^2}+\ldots+\eta'^k\frac{\partial^k F}{\partial \eta^k};$$

d. h. für die kogredienten Variabeln x, y und x', y' besteht die identische Relation

$$4) \qquad \left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f=\left(\xi'\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta'\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^k F,$$

wo links die Koefficienten von a, x, y, rechts von A, ξ, η abhängen.

Die Funktion

$$5) \qquad \frac{1}{m(m-1)\ldots(m-k+1)}\cdot\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f$$

heisst die k^{te} Polare von f.* Man kann dieselbe eine Kovariante von f nennen, insofern sie durch simultane kogrediente Transformation der beiden Variabelnsysteme x, y und x', y' in die k^{te} Polare der transformierten Form F übergeht.

Beispiel. Die erste Polare der quadratischen Form

$$f=a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2$$

heisst

$$\tfrac{1}{2}\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)f=(a_0x+a_1y)x'+(a_1x+a_2y)y'$$

und ist identisch

$$=\tfrac{1}{2}\left(\xi'\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta'\frac{\partial}{\partial \eta}\right)F=(A_0\xi+A_1\eta)\xi'+(A_1\xi+A_2\eta)\eta'.$$

In der That ist

$$a_0[(p\xi+q\eta)+a_1(p'\xi+q'\eta)](p\xi'+q\eta')+[a_1(p\xi+q\eta)+a_2(p'\xi+q'\eta)](p'\xi'+q'\eta')=$$
$$=(a_0p^2+2a_1pp'+a_2p'^2)\xi\xi'+(a_0pq+a_1(pq'+p'q)+a_2p'q')(\xi\eta'+\xi'\eta)+$$
$$+(a_0q^2+2a_1qq'+a_2q'^2)\eta\eta'=(A_0\xi+A_1\eta)\xi'+(A_1\xi+A_2\eta)\eta'.$$

2. Der Prozess der Polarenbildung einer Form kann noch in anderer Weise erläutert werden. Es gehe $f(x,y)$ durch die lineare Substitution

---

* Emanante nach Sylvester. Vergl. Cayley, Phil. Trans. 1856, pag. 637.

6) $$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta$$

über in $F(\xi, \eta)$. Dann fliessen aus der Identität

$$f(x, y) = F(\xi, \eta)$$

die Differentialgleichungen

7) $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = \dfrac{\partial F}{\partial \xi}d\xi + \dfrac{\partial F}{\partial \eta}d\eta \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = \dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}d\xi^2 + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}d\xi d\eta + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}d\eta^2, \end{cases}$$

worin dx, dy als neue Variable betrachtet werden können, die mit $d\xi$, $d\eta$ durch die Gleichungen

8) $$dx = p\,d\xi + q\,d\eta, \quad dy = p'd\xi + q'd\eta$$

verbunden sind. Die Grössen dx, dy sind völlig willkürlich und durch dieselbe lineare Substitution mit einander verknüpft wie die Variabeln selbst. Sie können aber ebensowohl aus den beiden Differentialgleichungen 7) als aus dem System 8) bestimmt werden. Die Koefficienten derselben in 7) sind in diesem Falle als Konstante zu betrachten. Man kann daher in 7) zwei neue Variabeln x', y' an Stelle von dx, dy setzen und die Substitution 2) anwenden, wobei die Gleichungen 7) richtig bleiben müssen. An Stelle der Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta}d\eta\right)^k F(\xi, \eta)$$

tritt dann die Gleichung 4) für die k^{te} Polare.

Beispiel. Es sei

9) $$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = A_0\xi^2 + 2A_1\xi\eta + A_2\eta^2,$$

wo

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0p^2 + 2a_1pp' + a_2p'^2 \\ A_1 &= a_0pq + a_1(pq' + p'q) + a_2p'q' \\ A_2 &= a_0q^2 + 2a_1qq' + a_2q'^2. \end{aligned}$$

Aus 9) folgen die Gleichungen

10) $$(a_0x + a_1y)\,dx + (a_1x + a_2y)\,dy = (A_0\xi + A_1\eta)\,d\xi + (A_1\xi + A_2\eta)\,d\eta,$$

11) $$a_0dx^2 + 2a_1dx\,dy + a_2dy^2 = A_0d\xi^2 + 2A_1d\xi\,d\eta + A_2d\eta^2.$$

Aus 10) und 11) können die Werte von dx, dy als Funktionen von $d\xi$, $d\eta$ berechnet werden, die mit den Werten 8) zusammentreffen müssen. Einfacher ist es jedoch, die Werte 8) in 10) und 11) zu substituieren und zu zeigen, dass dieselben dadurch identisch erfüllt werden.

Man kann aus den Systemen

$$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta$$
$$x' = p\xi' + q\eta', \quad y' = p'\xi' + q'\eta'$$

auch direkt die Gleichung 4) ableiten. Denn dieselben liefern

$$\xi'\frac{\partial F}{\partial \xi} + \eta'\frac{\partial F}{\partial \eta} = \xi'\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) + \eta'\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) =$$
$$= \xi'\left(p\frac{\partial f}{\partial x} + p'\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \eta'\left(q\frac{\partial f}{\partial x} + q'\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(p\xi' + q\eta') + \frac{\partial f}{\partial y}(p'\xi' + q'\eta') = x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y},$$

und die wiederholte Anwendung dieser Gleichung ergiebt die Gleichung 4).

3. Jede Invariante der k^{ten} Polare von f ist eine Kovariante von f.

Beweis. Betrachtet man in der Polare*

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f$$

die Grössen x', y' als die einzigen Variabeln und transformiert man dieselbe durch die Substitution

12) $$x' = p\xi' + q\eta', \quad y' = p'\xi' + q'\eta',$$

so lässt sich die transformierte Polare nach Potenzen von ξ', η' entwickeln, nämlich

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f = P_0\xi'^k + \binom{k}{1}P_1\xi'^{k-1}\eta' + \ldots,$$

wo P_0, P_1, ... von $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, d. h. von den Koefficienten und Variabeln der gegebenen Form, und ferner von den Substitutions-Koefficienten p, q, p', q' abhängen. Anderseits gehen P_0, P_1, ... als Funktionen von x, y durch eine Transformation 1) nach 4) bezüglich über in

$$\frac{\partial^k F}{\partial \xi^k}, \quad \frac{\partial^k F}{\partial \xi^{k-1}\partial \eta}, \quad \ldots$$

Sei nun J eine Invariante der Polare und bezeichnet man durch r die Substitutionsdeterminante $pq' - p'q$, so ist nach früheren Sätzen über die Invarianten

---

* Bei diesen Beweisen kann der in der ersten Definition 5) der Polare mitgegebene numerische Faktor unberücksichtigt bleiben.

$$J(P_0, P_1, \ldots) = r^{\mu} \cdot J\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}, \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1}\partial y}, \cdots\right)$$

und vermöge der Transformation 1) der x, y

$$J(P_0, P_1, \ldots) = J\left(\frac{\partial^k F}{\partial \xi^k}, \frac{\partial^k F}{\partial \xi^{k-1}\partial \eta}, \cdots\right),$$

woraus die Identität folgt

$$J\left(\frac{\partial^k F}{\partial \xi^k}, \frac{\partial^k F}{\partial \xi^{k-1}\partial \eta}, \cdots\right) = r^{\mu} J\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}, \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1}\partial y}\right).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Beispiele. I. Es sei die kubische Form vorgelegt

$$f(x, y) = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3,$$

deren zweite Polare lautet

$$\tfrac{1}{6}\left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = (a_0 x + a_1 y)\, x'^2 + 2\,(a_1 x + a_2 y)\, x'y' + (a_2 x + a_3 y)\, y'^2.$$

Die Invariante der Polare ist von der Form

$$(a_0 x + a_1 y)(a_2 x + a_3 y) - (a_1 x + a_2 y)^2 = \\ = (a_0 a_2 - a_1^2) x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) xy + (a_1 a_3 - a_2^2) y^2,$$

was nach § 14 in der That eine Kovariante von f ist.

II. Aus der Form vierter Ordnung

$$f = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 x y^3 + a_4 y^4$$

bilde man die zweite Polare und suche deren Invariante. Man erhält alsdann die bekannte Kovariante der Form vierter Ordnung

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x^4 + 4\,(2a_0 a_3 - 2a_1 a_2) x^3 y + \\ + 6\,(a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2) x^2 y^2 + \\ + 4\,(2a_1 a_4 - 2a_2 a_3) x y^3 + (a_2 a_4 - a_3^2) y^4,$$

die Clebsch durch $\frac{1}{2} H$ bezeichnet hat.

III. Zu der Form fünfter Ordnung

$$f = a_0 x^5 + 5a_1 x^4 y + \ldots + a_5 y^5$$

bilde man die vierte Polare

$$\tfrac{1}{120}\left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f = (a_0 x + a_1 y)\, x'^4 + 4\,(a_1 x + a_2 y)\, x'^3 y' + \\ + 6\,(a_2 x + a_3 y)\, x'^2 y'^2 + 4\,(a_3 x + a_4 y)\, x' y'^3 + (a_4 x + a_5 y)\, y'^4,$$

der die Invariante dritten Grades angehört

$$\begin{vmatrix} a_0 x + a_1 y & a_1 x + a_2 y & a_2 x + a_3 y \\ a_1 x + a_2 y & a_2 x + a_3 y & a_3 x + a_4 y \\ a_2 x + a_3 y & a_3 x + a_4 y & a_4 x + a_5 y \end{vmatrix},$$

identisch mit der Kovariante dritter Ordnung, dritten Grades, der Form fünfter Ordnung, die ausgerechnet lautet

x^3	$3x^2y$	$3xy^2$	y^3
$+\ a_0a_2a_4$	$+\ a_0a_2a_5$	$+\ a_0a_3a_5$	$+\ a_1a_3a_5$
$-\ a_0a_3^2$	$-\ a_0a_3a_4$	$-\ a_0a_4^2$	$-\ a_1a_4^2$
$-\ a_1^2a_4$	$-\ a_1^2a_5$	$-\ a_1a_2a_5$	$-\ a_2^2a_5$
$+2a_1a_2a_3$	$+\ a_1a_2a_4$	$+\ a_1a_3a_4$	$+2a_2a_3a_4$
$-\ a_2^3$	$+\ a_1a_3^2$	$+\ a_2^2a_4$	$-\ a_3^3$
	$-\ a_2^2a_3$	$-\ a_2a_3^2$	

4. Jeder Form entspricht eine Reihe von Kovarianten gerader Ordnung und zweiten Grades und zwar von den Ordnungen $2m-4$, $2m-8$, ..., wenn m die Ordnung der Form bedeutet.

Beweis. Die Reihe der Polaren von f

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f, \quad (k=1, 2, \ldots, m-1)$$

ist linear in Bezug auf die Koefficienten und von den Ordnungen $m-1$, $m-2$, ... in Bezug auf die Variabeln der gegebenen Form. Die Invarianten zweiten Grades der darin enthaltenen Polaren gerader Ordnung sind Kovarianten $(2m-2k)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Reihe dieser Kovarianten schliesst mit einer Kovariante zweiter Ordnung oder einer Invariante zweiten Grades ab, je nachdem die Ordnung m ungerade oder gerade ist.

Anmerkung 1. Jeder Form entspricht eine Reihe von Invarianten vierten Grades. Denn man hat nur die Invarianten zweiten Grades (vergl. § 12, 11) der obigen Kovarianten gerader Ordnung zu betrachten, die bezüglich der gegebenen Form vierten Grades sind. Bei den Formen gerader Ordnung könnte es jedoch eintreten, dass die Invariante das Quadrat der Invariante zweiten Grades wird. So hat die kubische Form eine Kovariante von der Ordnung $2.3-4=2$, nämlich

$$(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)xy+(a_1a_3-a_2^2)y^2,$$

zu der die Invariante zweiten Grades gehört

$$(a_0a_2-a_1^2)(a_1a_3-a_2^2)-(a_0a_3-a_1a_2)^2,$$

die bezüglich der Koefficienten der gegebenen Form vom vierten Grade ist.

Anmerkung 2. Bildet man nach dem Theorem Nr. 4 für gerade k die Polaren

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)$$

einer Form $f(x, y)$ und aus diesen die Invarianten zweiten Grades, nämlich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\cdot\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}-4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}\cdot\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}+3\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}\cdot\frac{\partial^6 f}{\partial y^6}-6\frac{\partial^6 f}{\partial x^5\partial y}\cdot\frac{\partial^6 f}{\partial x\partial y^5}+15\frac{\partial^6 f}{\partial x^4\partial y^2}\cdot\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\partial y^4}-10\left(\frac{\partial^6 f}{\partial x^3\partial y^3}\right)^2,$$

u. s. w.,

so erhält man ebensoviele Kovarianten der gegebenen Form. Die erste in der Reihe dieser Kovarianten, nämlich die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

heisst die Hessesche Determinante der Form f, Hessian bei Sylvester (Cambr. and Dublin Math. Journal 6 pag. 186, 1851; vergl. Cayley, Phil. Trans. 1856, pag. 636 flg.), nach ihrem Entdecker (Hesse in Crelle Journal 28 pag. 83).

Beispiel. Die zweite Funktion in obiger Reihe liefert für Formen fünfter Ordnung die Kovariante zweiter Ordnung, zweiten Grades

$$(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)x^2+2(a_0a_5-3a_1a_4+2a_2a_3)xy+(a_1a_5-4a_2a_4+3a_3^2)y^2.$$

5. Ersetzt man in einer Form $f(x, y)$ die Variabeln x, y bezüglich durch $\frac{\partial}{\partial y}$, $-\frac{\partial}{\partial x}$ und führt die hierdurch angedeuteten Operationen an einer beliebigen Form φ aus, so gilt für die durch lineare Substitution in F und Φ transformierten Formen f und φ die Beziehung

13) $$F\left(\frac{\partial}{\partial\eta}, -\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\Phi = r^m f\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi,$$

wo

14) $$x=p\xi+q\eta,\quad y=p'\xi+q'\eta,\quad r=pq'-p'q.$$

Beweis. Mit Hilfe der Formeln

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

und der Werte für ξ, η, nämlich

$$\xi = \frac{1}{r}(q'x - qy), \quad \eta = \frac{1}{r}(-p'x + py),$$

findet man

15)
$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{1}{r}\left(p'\dfrac{\partial}{\partial \eta} - q'\dfrac{\partial}{\partial \xi}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{1}{r}\left(p\dfrac{\partial}{\partial \eta} - q\dfrac{\partial}{\partial \xi}\right). \end{cases}$$

Zu gleichem Resultat gelangt man, wenn man in den Substitutionsgleichungen 14) an Stelle von x, $\dfrac{\partial}{\partial y}$; an Stelle von y, $-\dfrac{\partial}{\partial x}$; an Stelle von ξ, $\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial \eta}$; an Stelle von η, $-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \xi}$ treten lässt.

Da nun durch das System 14) $f(x, y)$ in $F(\xi, \eta)$ übergeht, so können die Variabeln x, y, ξ, η bezüglich in diesen Formen gleichfalls durch die Symbole $\dfrac{\partial}{\partial y}$, $-\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \eta}$, $-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \xi}$ ersetzt werden, so dass

$$f\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right) = F\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \eta}, -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi}\right),$$

und, weil f homogen und m^{ter} Ordnung ist,

16)
$$F\left(\frac{\partial}{\partial \eta}, -\frac{\partial}{\partial \xi}\right) = r^m f\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Diese Identität gilt, wenn man die Symbole $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ und deren Produkte bezüglich auf eine beliebige Form $\varphi(x, y)$ und ihre durch die Substitution 14) transformierte $\Phi(\xi, \eta)$ anwendet, wobei unter dem symbolischen Ausdruck

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \cdot \varphi$$

immer

$$\frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial x^i \partial y^k}$$

zu verstehen ist.

Anmerkung 1. Die Anwendung der Operation

$$f\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

auf die Form

$$f = a_0 x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \ldots$$

selbst liefert für ein gerades $m = 2\mu$ die Invariante zweiten Grades

$$a_0 a_{2\mu} - \binom{2\mu}{1} a_1 a_{2\mu-1} + \binom{2\mu}{2} a_2 a_{2\mu-2} - \ldots (-1)^{\mu} \binom{2\mu}{\mu} a_{\mu}^2.$$

Dies beweist wieder, dass jede Form gerader Ordnung stets eine Invariante zweiten Grades besitzt. Bei ungeradem m dagegen zerstören sich die einzelnen Glieder der nach obigem Prozess behandelten Form.

Operiert man an einer Kovariante φ, so entsteht schliesslich wieder eine Kovariante, aus der auf gleiche Weise eine neue Kovariante gebildet werden kann, so dass man mit Hilfe des angegebenen Prozesses die Reihe der zu einer Form gehörigen Kovarianten bis ins Unendliche erweitern kann. Ersetzt man ferner in einer Kovariante φ der Form f die Variabeln x, y bezüglich durch $\frac{\partial}{\partial y}$, $-\frac{\partial}{\partial x}$ und wendet diese Operation auf eine andere Kovariante ψ derselben Form f an, so erhält man eine neue Kovariante χ der Form f. Damit jedoch die in der Operation angedeuteten Differentiationen ausführbar seien, muss ψ höherer Ordnung sein als φ. Die Differenz beider Ordnungen giebt die Ordnung der resultierenden Kovariante χ. Gehören also zu einer Form Kovarianten, deren Ordnungen aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind, so hat diese Form stets eine lineare Kovariante. Bei der kubischen Form, die eine quadratische und kubische Kovariante besitzt, liefert der angegebene Prozess eine Kovariante Null, bei der Form fünfter Ordnung, die ebenfalls eine quadratische und kubische Kovariante besitzt, ergiebt die Operation eine lineare Kovariante fünften Grades.

Beispiele. I. Ist f bezüglich von der vierten und sechsten Ordnung, so liefert der Prozess

$$f\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right) f$$

bezüglich die Invarianten zweiten Grades

$$a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$
$$a_0 a_6 - 6 a_1 a_5 + 15 a_2 a_4 - 10 a_3^2.$$

II. Ersetzt man in der Kovariante zweiter Ordnung, zweiten Grades der Form fünfter Ordnung die Variabeln x, y bezüglich durch $\frac{\partial}{\partial y}$, $-\frac{\partial}{\partial x}$, so lautet dieselbe

$$(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (a_0 a_5 - 3 a_1 a_4 + 2 a_2 a_3) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} +$$
$$+ (a_1 a_5 - 4 a_2 a_4 + 3 a_3^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Wendet man die hierin angedeuteten Operationen auf die Form fünfter Ordnung $a_0x^5+5a_1x^4y+\ldots$ selbst an, so erhält man die Kovariante

$$\begin{aligned}&(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)(a_2x^3+3a_3x^2y+3a_4xy^2+a_5y^3)-\\&-(a_0a_5-3a_1a_4+2a_2a_3)(a_1x^3+3a_2x^2y+3a_3xy^2+a_4y^3)+\\&+(a_1a_5-4a_2a_4+3a_3^2)(a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3),\end{aligned}$$

die bis auf den Zahlenfaktor -3 identisch ist mit der Kovariante, deren Verschwinden den kanonischen Ausdruck der Form fünfter Ordnung liefert [vergl. § 8, 3, 28) und § 15, 3, III].

Anmerkung 2. Eine andere Auffassung des Prozesses dieser Nr. 5 wird in dem Paragraphen 19 über simultane Formen gegeben werden.

6. Ersetzt man in einer Form $f(x,y)$ die Variabeln x, y bezüglich durch

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y},\quad -\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x},$$

wo φ eine beliebige Form ist, so gilt für die durch lineare Substitution in F, Φ transformierten Formen f, φ die Beziehung:

17) $$F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta},\ -\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)=r^m f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),$$

wo

18) $$x=p\xi+q\eta,\quad y=p'\xi+q'\eta,\quad r=pq'-p'q.$$

Denn aus den Gleichungen

19) $$\begin{cases}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{1}{r}\left(p'\dfrac{\partial\Phi}{\partial\eta}-q'\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)\\[2ex]\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{1}{r}\left(p\dfrac{\partial\Phi}{\partial\eta}-q\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right),\end{cases}$$

welche aus den Gleichungen 15) in Nr. 5 folgen, geht durch Vergleichung mit 18) hervor, dass man in $f(x,y)$ und $F(\xi,\eta)$ die Variabeln x, y, bezüglich ξ, η, und deren Potenzen und Produkte nicht nur durch die symbolischen Potenzen und Produkte von $\frac{\partial}{\partial y}$ u. s. w., wie in Nr. 5, sondern auch durch die wirklichen Potenzen und Produkte bezüglich von

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta},\quad -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}$$

ersetzen kann, um eine Gleichung zu erhalten:

$$f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = F\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}, -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right),$$

welche sogleich in 17) übergeht.

Ersetzt man in einer Kovariante von f (oder in der Form f selbst) die Variabeln x, y, bezüglich durch $\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, wo auch φ eine Kovariante von f, so erhält man wieder eine Kovariante von f.

Beispiel. Ersetzt man in

$$f = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

die Variabeln bezüglich durch

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = a_1x + a_2y,$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = -(a_0x + a_1y),$$

so erhält man

$$(a_0a_2 - a_1^2).f,$$

also das Produkt von f in die Invariante dieser Form.

7. Ist J eine Invariante der Form

$$f = a_0x^m + \binom{m}{1}a_1x^{m-1}y + \ldots,$$

so liefert die Operation

$$20) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial a_0}y^m - \frac{\partial}{\partial a_1}y^{m-1}x + \frac{\partial}{\partial a_2}y^{m-2}x^2 - \ldots\right)^k J$$

eine Kovariante der Form f. Diese Kovariante heisst Evektante von f; die erzeugende Operation der Evektor (vergl. Cayley, Phil. Trans. 1856, pag. 637).

Beweis. Sind die beiden Systeme von Variabeln x, y und x', y' kogredient, d. h. bestehen die Gleichungen

$$x = p\xi + q\eta, \quad x' = p\xi' + q\eta',$$
$$y = p'\xi + q'\eta, \quad y' = p'\xi' + q'\eta',$$
$$xy' - x'y = (pq' - p'q)(\xi\eta' - \xi'\eta),$$

so hat man identisch

$$f(x, y) + \lambda(xy' - x'y)^m = F(\xi, \eta) + \lambda'(\xi\eta' - \xi'\eta)^m,$$

wo λ ein willkürlicher Parameter ist und $\lambda' = (pq' - p'q)^m\lambda$. Daraus entwickelt man

$$21) \quad (a_0 + \lambda y'^m)x^m + \binom{m}{1}(a_1 - \lambda y'^{m-1}x')x^{m-1}y + \binom{m}{2}(a_2 + \lambda y'^{m-2}x'^2)x^{m-2}y^2 + \ldots =$$
$$= (A_0 + \lambda'\eta'^m)\xi^m + \binom{m}{1}(A_1 - \lambda'\eta'^{m-1}\xi')\xi^{m-1}\eta + \binom{m}{2}(A_2 + \lambda'\eta'^{m-2}\xi'^2)\xi^{m-2}\eta^2 + \ldots$$

Um eine beliebige Invariante dieser Form zu bilden, ersetze man in den Invarianten J der Form $f(x, y)$ die Koefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bezüglich durch

$$a_0 + \lambda y'^m, \quad a_1 - \lambda y'^{m-1} x', \quad a_2 + \lambda y'^{m-2} x'^2, \quad \ldots$$

und entwickle nach steigenden Potenzen von λ. Diese Entwicklung ergiebt

$$J + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial a_0} y'^m - \frac{\partial}{\partial a_1} y'^{m-1} x' + \frac{\partial}{\partial a_2} y'^{m-2} x'^2 - \ldots \right) J + \ldots,$$

was nach der bekannten Eigenschaft der Invarianten bis auf eine Potenz von $r = pq' - p'q$ gleich dem entsprechenden, aus der rechten Seite von 21) gebildeten Ausdruck ist. Man hat also identisch

$$22) \quad J(A_0, A_1, \ldots, A_m) + \lambda' \left(\frac{\partial}{\partial A_0} \eta'^m - \frac{\partial}{\partial A_1} \eta'^{m-1} \xi' + \ldots \right) J(A) + \ldots =$$
$$= r^\mu \left\{ J(a_0, a_1, \ldots, a_m) + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial a_0} y'^m - \frac{\partial}{\partial a_1} y'^{m-1} x' + \ldots \right) J(a) + \ldots \right\}.$$

Da nun

$$J(A) = r^\mu J(a), \quad \lambda' = r^m \lambda,$$

so ist

$$\frac{\partial}{\partial A_0} \eta'^m - \frac{\partial}{\partial A_1} \eta'^{m-1} \xi' + \ldots = r^{\mu - m} \left(\frac{\partial}{\partial a_0} y'^m - \frac{\partial}{\partial a_1} y'^{m-1} x' + \ldots \right),$$

woraus folgt, dass diese Funktion eine Kovariante ist. Dies ist aber der Satz 7. für $k = 1$. Durch Vergleichung der Koefficienten der k^{ten} Potenz von λ in Gleichung 22) ergiebt sich ebenso der allgemeine Satz 7.

Beispiele. I. Aus der zur kubischen Form

$$f = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3$$

gehörigen Invariante vierten Grades

$$J = a_0^2 a_3^2 + 4 a_0 a_2^3 + 4 a_1^3 a_3 - 3 a_1^2 a_2^2 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3$$

bildet man durch die Operation

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_0} y^3 - \frac{\partial}{\partial a_1} y^2 x + \frac{\partial}{\partial a_2} y x^2 - \frac{\partial}{\partial a_3} x^3 \right) J$$

bis auf den Zahlenfaktor $-\frac{1}{2}$ die Kovariante dritter Ordnung, dritten Grades

	x^3	$x^2 y$	$x y^2$	y^3
$Q =$	$+ a_0^2 a_3$ $- 3 a_0 a_1 a_2$ $+ 2 a_1^3$	$+ 3 a_0 a_1 a_3$ $- 6 a_0 a_2^2$ $+ 3 a_1^2 a_2$	$- 3 a_0 a_2 a_3$ $+ 6 a_1^2 a_3$ $- 3 a_1 a_2^2$	$- a_0 a_3^2$ $+ 3 a_1 a_2 a_3$ $- 2 a_2^3$

II. Aus der zur Form fünfter Ordnung gehörigen Invariante vierten Grades bildet man durch den angezeigten Prozess die Kovariante fünfter Ordnung, dritten Grades (siehe die Tabellen).

Anmerkung. Da zu jeder Form eine Invariante vierten Grades gehört, so besitzt eine Form auch stets eine Kovariante gleicher Ordnung wie die Form und dritten Grades, bei geradem m eine reducible. Da ferner jede Form gerader Ordnung $2m$ eine Invariante $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades besitzt, wie aus der folgenden Nr. 8 hervorgeht, so gehört einer solchen Form stets eine Kovariante $2m^{\text{ter}}$ Ordnung und m^{ten} Grades an.

8. Cayley (Crelle Journal 54 pag. 48) hat eine Methode angegeben, um allgemein die kanonische Form einer Form gerader Ordnung zu bestimmen.*

Sei

$$23) \qquad f(x,y) = a_0 x^{2m} + \binom{2m}{1} a_1 x^{2m-1} y + \dots$$

die gegebene Form, die auf den kanonischen Ausdruck

$$24) \qquad b_1 (x+\alpha_1 y)^{2m} + b_2 (x+\alpha_2 y)^{2m} + \dots + b_m (x+\alpha_m y)^{2m} + \\ + \mu T (x+\alpha_1 y) \dots (x+\alpha_m y)$$

gebracht werden soll, wo T eine Kovariante m^{ter} Ordnung der Form m^{ter} Ordnung

$$25) \qquad (x+\alpha_1 y)(x+\alpha_2 y)\dots(x+\alpha_m y) = c_0 x^m + \binom{m}{1} c_1 x^{m-1} y + \dots$$

ist. Die $2m+1$ Unbekannten

$$b_1, b_2, \dots, b_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \mu,$$

deren Anzahl mit der Zahl der Koefficienten der gegebenen Form übereinstimmt, werden mit Hilfe des folgenden Satzes bestimmt:

Wendet man die Operation

$$26) \qquad c_0 \frac{\partial^m}{\partial y^m} - \binom{m}{1} c_1 \frac{\partial^m}{\partial y^{m-1} \partial_x} + \dots$$

auf eines der Binome

$$b_i (x+\alpha_i y)^{2m}$$

an, so ergiebt das Resultat Null. Denn man findet nach Ausführung des Prozesses 26)

$$27) \qquad \left[c_0 \alpha_i^m - \binom{m}{1} c_1 \alpha_i^{m-1} + \binom{m}{2} c_2 \alpha_i^{m-2} - \dots \right] b_i (x+\alpha_i y)^m,$$

was nach 25) verschwindet.

* Vergleiche die Bemerkung am Schlusse des Abschnittes über kanonische Formen, pag. 102.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Es soll nun vorausgesetzt werden, dass die Kovariante T so beschaffen sei, dass nach Anwendung der Operation 26) auf

$$T(x+\alpha_1 y)(x+\alpha_2 y)\dots(x+\alpha_m y)$$

das Resultat dem Produkt

$$(x+\alpha_1 y)\dots(x+\alpha_m y)$$

selbst proportional sei. Führt man unter dieser Voraussetzung die Operation 26) auf beiden Seiten der Identität

$$a_0 x^{2m}+\binom{2m}{1}a_1 x^{2m-1}y+\dots=\sum_1^m{}^i b_i(x+\alpha_i y)^{2m}+\mu\, T(x+\alpha_1 y)\dots(x+\alpha_m y)$$

aus und berücksichtigt den oben ausgesprochenen Satz, wonach das erste Glied der rechten Seite nach Ausführung der Operation verschwindet, so ergiebt sich durch Gleichsetzung der Koefficienten das folgende System von Bedingungsgleichungen:

$$28)\quad \begin{cases} c_0 a_m - \binom{m}{1}c_1 a_{m-1} + \binom{m}{2}c_2 a_{m-2} - \dots = \lambda c_0 \\ c_0 a_{m+1} - \binom{m}{1}c_1 a_m + \binom{m}{2}c_2 a_{m-1} - \dots = \lambda c_1 \\ c_0 a_{m+2} - \binom{m}{1}c_1 a_{m+1} + \binom{m}{2}c_2 a_m - \dots = \lambda c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_0 a_{2m} - \binom{m}{1}c_1 a_{2m-1} + \binom{m}{2}c_2 a_{2m-2} - \dots = \lambda c_m, \end{cases}$$

woraus durch Elimination von $c_0, c_1, \dots, c_m$ die Gleichung folgt

$$29)\quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & . & a_m-\lambda \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m+\dfrac{\lambda}{\binom{m}{1}} & a_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-2} & a_{m-1} & a_m \mp \dfrac{\lambda}{\binom{m}{2}} & \dots & . & a_{2m-2} \\ a_{m-1} & a_m \pm \dfrac{\lambda}{\binom{m}{1}} & a_{m+1} & \dots & . & a_{2m-1} \\ a_m \mp \lambda & a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & . & a_{2m} \end{vmatrix} = 0.$$

Aus 28) ergiebt sich dann zu jeder Wurzel λ von 29) eine zugehörige Form (25). Die Kovariante T muss in den einzelnen Fällen aus der für T gemachten Voraussetzung, die zu nur linearen Bedingungen für deren Koefficienten führt, bestimmt werden, wobei sie sich als im allgemeinen vom Grade $2m+1$ ergiebt.

Anmerkung. Die Gleichung $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades 29) hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass alle ihre Koefficienten Invarianten sind. Für den Ausdruck $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades, der aus der linken Seite von 29) vermöge $\lambda = 0$ hervorgeht, erkennt man dies unmittelbar daran, dass für $\lambda = 0$, d. h. $\mu = 0$ sich f als Summe von $m(2m)^{\text{ten}}$ Potenzen darstellen lässt, was eine Invariantenrelation erfordert. Dieser Ausdruck $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades ist die in der Anmerkung zu Nr. 7 gemeinte Invariante $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades.

Beispiele. I. Es soll der kanonische Ausdruck der Form sechster Ordnung aufgestellt werden. Derselbe lautet in allgemeiner Form

$$b_1(x+\alpha_1 y)^6 + b_2(x+\alpha_2 y)^6 + b_3(x+\alpha_3 y)^6 + \mu T(x+\alpha_1 y)(x+\alpha_2 y)(x+\alpha_3 y),$$

wo T eine Kovariante dritter Ordnung der Form

$$\varphi = (x+\alpha_1 y)(x+\alpha_2 y)(x+\alpha_3 y) = c_0 x^3 + 3c_1 x^2 y + 3c_2 x y^2 + c_3 y^3$$

ist und zwar die in Nr. 7 Beispiel 1 aufgestellte Kovariante Q.* Um diese Eigenschaft von Q nachzuweisen, genügt es, dieselbe an der kanonischen Form von φ zu verifizieren, da sie von linearer Transformation unabhängig sein muss. Die kanonische Form für φ ist

$$\varphi = u^3 + v^3,$$

und die zugehörige Kovariante Q, nach Nr. 7, Beispiel I:

$$Q = u^3 - v^3,$$

also

$$\varphi Q = u^6 - v^6.$$

Der Prozess 26) wird zu

$$\frac{\partial^3}{\partial v^3} - \frac{\partial^3}{\partial u^3},$$

und man hat

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial v^3} - \frac{\partial^3}{\partial u^3}\right)(u^6 - v^6) = -120(u^3 + v^3),$$

das heisst

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial v^3} - \frac{\partial^3}{\partial u^3}\right)(\varphi Q) = -120\varphi,$$

womit bewiesen ist, dass $T = Q$ wird. Man hat sodann aus 29)

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 - \lambda \\ a_1 & a_2 & a_3 + \frac{\lambda}{3} & a_4 \\ a_2 & a_3 - \frac{\lambda}{3} & a_4 & a_5 \\ a_3 + \lambda & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = 0,$$

und alsdann 28) zur Bestimmung von φ.

* Für diese Form f rührt der obige kanonische Ausdruck schon von Sylvester her, Cambr. and Dublin Math. Journal VI und Phil. Magaz. 1851. Vergl. auch Salmon, Vorlesungen zur Einführung u. s. w., Nr. 132.

II. Es soll der kanonische Ausdruck der Form vierter Ordnung f aufgestellt werden. Derselbe lautet in allgemeiner Form

$$f = b_1 (x + \alpha_1 y)^4 + b_2 (x + \alpha_2 y)^4 + 6\mu (x + \alpha_1 y)^2 (x + \alpha_2 y)^2.$$

Wendet man nämlich auf diese Identität die Operation

$$c_0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2c_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

an, wo

$$\varphi = (x + \alpha_1 y)(x + \alpha_2 y) = c_0 x^2 + 2c_1 xy + c_2 y^2,$$

so geht aus dem Glied

$$6\mu\varphi^2 = 6\mu (x + \alpha_1 y)^2 (x + \alpha_2 y)^2$$

hervor:

$$96 (c_0 c_2 - c_1^2) . \mu . \varphi.$$

Setzt man nun

$$8 (c_0 c_2 - c_1^2) . \mu = \lambda,$$

so liefert die angegebene Operation das folgende System von Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} c_0 a_2 - 2c_1 a_1 + c_2 a_0 &= \lambda c_0, \\ c_0 a_3 - 2c_1 a_2 + c_2 a_1 &= \lambda c_1, \\ c_0 a_4 - 2c_1 a_3 + c_2 a_2 &= \lambda c_2, \end{aligned}$$

woraus durch Elimination von c_0, c_1, c_2 die Gleichung folgt

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - \lambda \\ a_1 & a_2 + \frac{\lambda}{2} & a_3 \\ a_2 - \lambda & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

in Übereinstimmung mit § 9, 1.

§ 16. Die Kovarianten als Funktionen der Wurzeln.

1. Eine Kovariante φ ϱ^{ten} Grades genügt ausser den beiden partiellen Differentialgleichungen

$$1) \quad \begin{cases} a_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + m a_{m-1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_m} = y \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ a_m \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_{m-1}} + 2a_{m-1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_{m-2}} + \ldots + m a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_0} = x \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

auch den für alle Funktionen φ der Koefficienten, die als Funktionen der Wurzeln dargestellt sind, giltigen Gleichungen (§ 11,2, Anmerkung 2)

$$2) \quad \begin{cases} a_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + m a_{m-1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_m} = -\sum_1^m k \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}, \\ a_m \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_{m-1}} + 2a_{m-1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_{m-2}} + \ldots + m a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_0} = \sum_1^m k \alpha_k^2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} - s_1 \varrho \varphi, \end{cases}$$

$$(s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m).$$

Daraus ergiebt sich die folgende Form des Systems 1):

3) $$\sum_1^m{}_k \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} + y\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

4) $$\sum_1^m{}_k \alpha^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} - x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - s_1 \varrho \varphi = 0.$$

Dies sind die partiellen Differentialgleichungen, denen die Kovarianten genügen, wenn sie als Funktionen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ auftreten.

Beispiel. Betrachten wir die Kovariante

$$\varphi = a_0^2 \Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (x - \alpha_3 y)^2 \ldots (x - \alpha_m y)^2.$$

Für ein Glied derselben

$$\varphi' = a_0^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (x - \alpha_3 y)^2 \ldots (x - \alpha_m y)^2$$

gelten die Gleichungen

$$\alpha_1^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_1} + \alpha_2^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_2} = 2a_0^2 (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (x - \alpha_3 y)^2 \ldots (x - \alpha_m y)^2,$$

$$\sum_3^m{}_k \alpha_k^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_k} - x\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 2a_0^2 (\alpha_3 + \ldots + \alpha_m)(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (x - \alpha_3 y)^2 \ldots (x - \alpha_m y)^2;$$

daher

$$\sum_1^m{}_k \alpha_k^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_k} - x\frac{\partial \varphi'}{\partial y} =$$

$$= 2a_0^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (x - \alpha_3 y)^2 \ldots (x - \alpha_m y)^2 = 2s_1 . \varphi',$$

und da dieses für jedes Glied von φ gilt und $\varrho = 2$ ist, so hat man identisch

$$\sum_1^m \alpha_k^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} - x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varrho s_1 \varphi = 2s_1 \varphi - 2s_1 \varphi = 0.$$

2. Anwendung. Es sei

5) $$f(x, y)$$

eine Form m^{ter} Ordnung und

$$\varphi_0(x, y), \quad \varphi_1(x, y), \quad \ldots, \quad \varphi_k(x, y)$$

Kovarianten der Form f, ν^{ter} Ordnung, ϱ^{ten} Grades. Setzt man nun

6) $$\psi(z) = z^k \varphi_0(x, 1) + z^{k-1} \varphi_1(x, 1) + z^{k-2} \varphi_2(x, 1) + \ldots + \varphi_k(x, 1)$$

und eliminiert x aus den beiden Gleichungen

$$f(x, 1) = 0, \quad \psi = 0,$$

so findet man als Resultante

7) $$\theta(z) = A_0 z^{km} + A_1 z^{km-1} + \ldots + A_{km},$$

deren Koefficienten $A_0, A_1, \ldots, A_{km}$ rationale ganze Funktionen der Koefficienten und Invarianten der gegebenen Form f sind.*

* Betti, Annali di Mat., Ser. I, Bd. 1, pag. 129 (1858).

Beweis. Bezeichnet man durch γ und γ' die Operationen

$$\gamma = \sum \frac{\partial}{\partial \alpha} + y \frac{\partial}{\partial x}, \quad \gamma' = \sum \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} - x \frac{\partial}{\partial y},$$

so gelten für φ die Relationen

8) $$\gamma \varphi = 0, \quad \gamma' \varphi = \varrho s_1 \varphi,$$

aus denen man durch Anwendung der Operationen γ und γ' auf $\psi(z) = 0$, wo z vermöge $\psi(z) = 0$ von x abhängt, die Gleichungen ableitet

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \gamma z = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \gamma' z + \varrho s_1 \psi = 0.$$

Wenn man nun voraussetzt, dass $\psi = 0$ keine gleichen Wurzeln hat, so kann $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ nicht verschwinden, so dass also $\gamma z = 0$, $\gamma' z = 0$ sein muss. Aus $\theta(z) = 0$ folgt dann aber, dass

$$\gamma \frac{A_1}{A_0} \cdot z^{km-1} + \ldots + \gamma \frac{A_{km}}{A_0} = 0,$$

$$\gamma' \frac{A_1}{A_0} \cdot z^{km-1} + \ldots + \gamma' \frac{A_{km}}{A_0} = 0$$

für alle Werte von z, für welche $\theta(z) = 0$, d. h. dass

$$\gamma \frac{A_1}{A_0} = 0, \quad \gamma \frac{A_2}{A_0} = 0, \quad \ldots, \quad \gamma \frac{A_{km}}{A_0} = 0,$$

$$\gamma' \frac{A_1}{A_0} = 0, \quad \gamma' \frac{A_2}{A_0} = 0, \quad \ldots, \quad \gamma' \frac{A_{km}}{A_0} = 0,$$

wodurch bewiesen ist, dass A_0, A_1, ..., A_{km} Invarianten der Form f sind. — Dasselbe folgt auch daraus, dass $\psi(z)$ für jeden konstanten Wert von z eine Kovariante von f, die Resultante $\theta(z)$ daher für jeden Wert von z eine Invariante ist.

3. Die Gleichungen 3) und 4) gelten auch für die Form f selbst. Man kann daher den Satz aussprechen:

Für jede binäre Form

9) $$f(x, y) = a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \ldots$$

gelten die Gleichungen

10) $$-y \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \ldots$$

11) $$x \frac{\partial f}{\partial x} = -s_1 f + \alpha_1^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \alpha_2^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \ldots,$$

wo

$$s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$$

Dies beweist man auch leicht direkt. Denn man hat die Relation

12) $$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \left(\frac{\alpha_1 f}{x - \alpha_1 y} + \frac{\alpha_2 f}{x - \alpha_2 y} + \frac{\alpha_3 f}{x - \alpha_3 y} + \ldots \right).$$

Nun ist identisch

$$x\frac{\alpha_i f}{x-\alpha_i y}=\alpha_i f+\alpha_i^2\frac{f.y}{x-\alpha_i y}=\alpha_i f-\alpha_i^2\frac{\partial f}{\partial \alpha_i},$$

woraus 11)

$$x\frac{\partial f}{\partial y}=-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots)f+\alpha_1^2\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}+\alpha_2^2\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}+\ldots,$$

während 10) ohne Weiteres sich ergiebt.

Anmerkung. Ist φ eine Kovariante von f, deren Wurzeln β_1, β_2, ..., seien und setzt man in 10) und 11) φ und β an Stelle von f und α, so liefert eine Vergleichung von 3) und 10), bezüglich 4) und 11) die Beziehungen

13) $$\sum_1^m{}_k\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}=\sum{}_k\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k},$$

14) $$\sum{}_k\alpha_k^2\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}-\varrho s_1\varphi=\sum{}_k\beta_k^2\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k}-s'_1\varphi,$$

wo

$$s'_1=\beta_1+\beta_2+\ldots$$

Beispiel. Es sei

$$\varphi=a_0^2\,\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(x-\alpha_3 y)^2$$

die quadratische Kovariante der kubischen Form

$$f=a_0(x-\alpha_1 y)(x-\alpha_2 y)(x-\alpha_3 y),$$

und seien β_1, β_2 die Wurzeln von $\varphi=0$. Dann ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_1}+\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2}=\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_3},$$

$$-(\beta_1+\beta_2)\varphi+\beta_1^2\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_1}+\beta_2^2\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2}=\alpha_1^2\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}+\alpha_2^2\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}+$$

$$+\alpha_3^2\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_3}-2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\varphi.$$

4. Der aus den Wurzeldifferenzen gebildete Ausdruck

15) $$\varphi=a_0^\varrho\,\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^{\varkappa_1}(\alpha_2-\alpha_3)^{\varkappa_2}\ldots(x-\alpha_1 y)^{\lambda_1}(x-\alpha_2 y)^{\lambda_2}\ldots,$$

wo in jedem Term die sämtlichen Wurzeln, und zwar gleich oft, nämlich je ϱ-mal vorkommen, ist eine Kovariante der Form

16) $$f=a_0(x-\alpha_1 y)(x-\alpha_2 y)\ldots$$

Beweis. Soll φ eine Kovariante sein, so ändert es sich durch die lineare Substitution

$$x=p\xi+q\eta,\quad y=p'\xi+q'\eta$$

nur um den Faktor r^μ, wo μ der Index der Kovariante, $r=pq'-p'q$ ist.

Sind also A_1, A_2, ..., die Wurzeln der transformierten Form, A_0 die Transformierte von a_0, so muss die Identität bestehen

17) $$A_0^\varrho \Sigma(\mathsf{A}_1-\mathsf{A}_2)^{\varkappa_1}(\mathsf{A}_2-\mathsf{A}_3)^{\varkappa_2}\ldots(\xi-\mathsf{A}_1\eta)^{\lambda_1}(\xi-\mathsf{A}_2\eta)^{\lambda_2}\ldots =$$
$$= r^\mu a_0^\varrho \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^{\varkappa_1}(\alpha_2-\alpha_3)^{\varkappa_2}\ldots(x-\alpha_1 y)^{\lambda_1}(x-\alpha_2 y)^{\lambda_2}\ldots$$

Durch obige Substitution findet man aber

$$\mathsf{A}=\frac{q'\alpha-q}{p-\alpha p'},\quad \mathsf{A}_i-\mathsf{A}_j=r\cdot\frac{\alpha_i-\alpha_j}{(p-\alpha_i p')(p-\alpha_j p')},\quad \xi-\mathsf{A}_i\eta=\frac{x-\alpha_i y}{p-\alpha_i p'},$$

wodurch die linke Seite von 17) die Form annimmt

$$\frac{r^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots}A_0^\varrho \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^{\varkappa_1}(\alpha_2-\alpha_3)^{\varkappa_2}\ldots(x-\alpha_1 y)^{\lambda_1}(x-\alpha_2 y)^{\lambda_2}\ldots}{(p-\alpha_1 p')^{\varkappa_1}(p-\alpha_2 p')^{\varkappa_1}.(p-\alpha_2 p')^{\varkappa_2}(p-\alpha_3 p')^{\varkappa_3}\ldots(p-\alpha_1 p')^{\lambda_1}(p-\alpha_2 p')^{\lambda_2}\ldots}$$

Da nun die Wurzeln α_1, α_2, ... in diesem Ausdruck alle auf derselben Potenz, nämlich auf der ϱ^{ten}, eingehen, so treten auch die Faktoren

$$p-\alpha_1 p',\quad p-\alpha_2 p',\quad \ldots$$

im Nenner sämtlich auf der ϱ^{ten} Potenz auf. Der Nenner wird jedoch durch den Faktor

$$A_0^\varrho = \{a_0(p-\alpha_1 p')(p-\alpha_2 p')\ldots\}^\varrho = f(p,p')^\varrho$$

im Zähler zerstört, so dass 17) identisch erfüllt wird. Damit ist der Satz bewiesen. Zugleich folgt $\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots=\mu$.

Anmerkung 1. Sind ω_1, ω_2, ..., bezüglich die höchsten Exponenten der Wurzeln α_1, α_2, ..., in dem Differenzenprodukt, so ist unter den obigen Voraussetzungen

$$\varrho=\omega_1+\lambda_1=\omega_2+\lambda_2=\omega_3+\lambda_3=\ldots$$

und, wenn m die Anzahl der Wurzeln angiebt,

$$m\varrho=\omega_1+\omega_2+\ldots+\lambda_1+\lambda_2+\ldots=\Sigma\omega+\nu$$

oder

$$\Sigma\omega=m\varrho-\nu,$$

wo ν die Ordnung der Kovariante φ ist.

Nun ist

$$\Sigma\omega=2(\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots)=2\mu,$$

wo μ der Index der Kovariante, woraus die bekannte Relation folgt

$$\mu=\tfrac{1}{2}(m\varrho-\nu).$$

Anmerkung 2. Das Glied x^ν der Kovariante ν^{ter} Ordnung φ hat den Koefficienten

$$C_0=\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^{\varkappa_1}(\alpha_2-\alpha_3)^{\varkappa_2}\ldots,$$

der als symmetrische Funktion der Wurzeldifferenzen gleichzeitig eine Semiinvariante ist und als solche der partiellen Differentialgleichung

$$\sum_i{}'\frac{\partial C_0}{\partial\alpha_i}=0$$

genügt, was in der That der Fall ist.

5. a) Ist $m = 4p$, also durch 4 teilbar, so hat man für ein gerades λ die Kovariante

$$\varphi = a_0^{\,2}\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^\lambda(\alpha_3-\alpha_4)^\lambda\ldots(\alpha_{2p-1}-\alpha_{2p})^\lambda(x-\alpha_{2p+1}y)^\lambda(x-\alpha_{2p+2}y)^\lambda\ldots(x-\alpha_m y)^\lambda,$$

deren Ordnung $\frac{1}{2}m\lambda$, deren Grad λ ist. So hat z. B. die Form vierter Ordnung eine Kovariante vierter Ordnung, zweiten Grades; die Form achter Ordnung hat Kovarianten $(4\lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung, λ^{ten} Grades, z. B. achter Ordnung, zweiten Grades.

b) Ist $m = 4p+2$ oder $= 4p$, so sind Ausdrücke bez. von den Formen

$$\varphi = \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^\lambda(\alpha_2-\alpha_3)^\lambda\ldots(\alpha_{2p}-\alpha_{2p+1})^\lambda(\alpha_{2p+1}-\alpha_1)^\lambda.(x-\alpha_{2p+2}y)^{2\lambda}\ldots(x-\alpha_m y)^{2\lambda}$$
$$\varphi = \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^\lambda(\alpha_2-\alpha_3)^\lambda\ldots(\alpha_{2p-1}-\alpha_{2p})^\lambda(\alpha_{2p}-\alpha_1)^\lambda\,.\,(x-\alpha_{2p+1}y)^{2\lambda}\ldots(x-\alpha_m y)^{2\lambda}$$

ebenfalls Kovarianten von der Ordnung $m\lambda$ und dem Grad 2λ. Für $m = 6$ giebt es eine Kovariante zwölfter Ordnung, vierten Grades.

c) Für Formen ungerader Ordnung hat man eine Kovariante von der Form

$$\varphi = \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^\lambda(\alpha_3-\alpha_4)^\lambda\ldots(\alpha_{m-2}-\alpha_{m-1})^\lambda(x-\alpha_m y)^\lambda,$$

λ^{ter} Ordnung, λ^{ten} Grades.

6. Die Betrachtung der Kovarianten als Funktionen der Wurzeln einer Form gestattet eine bemerkenswerte Anwendung auf die Sturmschen Reste. Sylvester* hat bemerkt, dass die Sturmschen Reste in der Form dargestellt werden können:

$$S_2 = a_0^{\,2}\quad \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\ldots(x-\alpha_m)$$
$$S_3 = a_0^{\,4}\quad \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)\ldots(x-\alpha_m)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_k = a_0^{\,2k-2}\Sigma\Delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)^2(x-\alpha_{k+1})(x-\alpha_{k+2})\ldots(x-\alpha_m).$$

Nun ist von Schramm** gefunden worden, dass diese Ausdrücke durch die folgenden Kovarianten ersetzt werden können:

$$C_2 = a_0^{\,2}\quad \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(x-\alpha_3 y)^2(x-\alpha_4 y)^2\ldots(x-\alpha_m y)^2$$
$$C_3 = a_0^{\,4}\quad \Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(x-\alpha_4 y)^4(x-\alpha_5 y)^4\ldots(x-\alpha_m y)^4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_k = a_0^{\,2k-2}\Sigma\Delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)^2(x-\alpha_{k+1}y)^{2k-2}.(x-\alpha_{k+2}y)^{2k-2}\ldots(x-\alpha_m y)^{2k-2}.$$

Mit Hilfe dieser Kovarianten ist man also im Stande die Anzahl der realen und imaginären Wurzeln einer Gleichung zu bestimmen.

---

* Sylvester, Philos. Magaz. 1839; Sturm, Liouville Journal VII.

** Annali di Mat., Ser. 2, t. I, 1867.

§ 17. Besondere Eigenschaften der Kovarianten.

1. Jede Invariante einer Kovariante von f ist auch eine Invariante von f.

Sei

1) $$\varphi = c_0 x^\nu + \binom{\nu}{1} c_1 x^{\nu-1} y + \ldots$$

eine Kovariante von f, J eine Invariante von φ. Bezeichnet man die durch die lineare Substitution

2) $$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta$$

transformierte Form φ durch φ' und deren Koefficienten bezüglich durch $c'_0, c'_1, \ldots$, so hat man $\varphi = \varphi'$, und es unterscheidet sich die Invariante der transformierten Form φ' von der Invariante der ursprünglichen Form φ nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante $r = pq' - p'q$, so dass

3) $$J(c') = r^\lambda J(c).$$

Sei weiter Φ die Kovariante φ der transformierten Form F, und $C_0, C_1, \ldots$, deren Koefficienten. Da nun nach der Definition der Kovarianten (§ 14) die Koefficienten $C_0, C_1, \ldots$ der Kovariante Φ bis auf eine Potenz von r gleich den entsprechenden Koefficienten $c'_0, c'_1 \ldots$ von φ' sind, so wird, wenn man die Koefficienten von φ und Φ, $c_0, c_1, \ldots$, resp. $C_0, C_1, \ldots$ durch die Koefficienten der Formen f und F, $a_0, a_1, \ldots$, resp. $A_0, A_1, \ldots$ ausdrückt, noch die Gleichung

4) $$J(A) = r^\mu J(a)$$

bestehen bleiben. Damit ist aber bewiesen, dass J auch eine Invariante von f ist.

Anmerkung 1. Man kann auf dieselbe Art den allgemeineren Satz beweisen:

Jede Kovariante einer Kovariante von f ist auch eine Kovariante der Form f.

Anmerkung 2. Mit Hilfe des Satzes, dass jede Invariante einer Kovariante auch eine Invariante der Form ist, beweist man einen Satz von Eisenstein:

Sei

$$Q = C_0 x^3 + 3C_1 x^2 y + 3C_2 xy^2 + C_3 y^3$$

die kubische Kovariante der kubischen Form (§ 15, 7), so ist

$$R' = -\begin{vmatrix} 2(C_0 C_2 - C_1^2) & C_0 C_3 - C_1 C_2 \\ C_0 C_3 - C_1 C_2 & 2(C_1 C_3 - C_2^2) \end{vmatrix}$$

die Invariante von Q, die nach obigem Theorem auch eine Invariante der kubischen Form f sein muss. Nun besitzt aber die kubische Form als einzige Invariante die Diskriminante

$$R = -\begin{vmatrix} 2(a_0a_2 - a_1^2) & a_0a_3 - a_1a_2 \\ a_0a_3 - a_1a_2 & 2(a_1a_3 - a_2^2) \end{vmatrix}.$$

In der That hat man nach Eisenstein die Relation:

$$R' = R^3$$

und ferner

$$C_0 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial a_3} = a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3,$$

$$C_1 = -\tfrac{1}{6}\frac{\partial R}{\partial a_2} = a_0a_1a_3 - 2a_0a_2^2 + a_1^2a_2,$$

$$C_2 = \tfrac{1}{6}\frac{\partial R}{\partial a_1} = -a_0a_2a_3 + 2a_1^2a_3 - a_1a_2^2,$$

$$C_3 = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial a_0} = -a_0a_3^2 + 3a_1a_2a_3 - 2a_2^3.$$

Vergleicht man überhaupt die Invarianten einer Kovariante mit den Invarianten der zugehörigen Form, so bemerkt man zahlreiche Relationen zwischen den bezüglichen Koefficienten. Als weiteres Beispiel diene die Kovariante sechster Ordnung, dritten Grades der biquadratischen Form, die man etwa aus der dritten Polare der biquadratischen Form nach der Theorie der Formen dritter Ordnung herleiten kann:

$$T = C_0x^6 + 6C_1x^5y + 15C_2x^4y^2 + 20C_3x^3y^3 + 15C_4x^2y^4 + 6C_5xy^5 + C_6,$$

wo

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3, \\ 6C_1 &= a_0^2a_4 + 2a_0a_1a_3 - 9a_0a_2^2 + 6a_1^2a_2, \\ 15C_2 &= 5a_0a_1a_4 - 15a_0a_2a_3 + 10a_1^2a_3, \\ 20C_3 &= -10a_0a_3^2 + 10a_1^2a_4, \\ 15C_4 &= -5a_0a_3a_4 + 15a_1a_2a_4 - 10a_1a_3^2, \\ 6C_5 &= -a_0a_4^2 - 2a_1a_3a_4 + 9a_2^2a_4 - 6a_2a_3^2, \\ C_6 &= -a_1a_4^2 + 3a_2a_3a_4 - 2a_3^3. \end{aligned}$$

Man findet, dass die quadratische Invariante von T,

$$C_0C_6 - 6C_1C_5 + 15C_2C_4 - 10C_3^2 = \tfrac{1}{6}(J_2^3 - 27J_3^2),$$

also gleich der Diskriminante der biquadratischen Form ist.

2. Sind φ und ψ Kovarianten von f, so ist die Funktionaldeterminante (Jacobische Determinante)

$$5) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

ebenfalls eine Kovariante von f.

Beweis. Vermöge der linearen Transformation

6) $$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta$$

gehen φ und ψ bezüglich über in Φ und Ψ, für welche die Identitäten bestehen

7) $$\Phi = r^\lambda \varphi, \quad \Psi = r^\mu \psi \,.\, (r = pq' - p'q).$$

Daraus leitet man ab

8) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi} = r^\lambda \left(p \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + p' \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \eta} = r^\lambda \left(q \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + q' \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial \xi} = r^\mu \left(p \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + p' \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial \eta} = r^\mu \left(q \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + q' \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \right), \end{cases}$$

woraus folgt, dass

9) $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial \xi} & \dfrac{\partial \Psi}{\partial \eta} \end{vmatrix} = r^{\lambda+\mu+1} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Beispiele. a) Aus den Kovarianten der Form fünfter Ordnung (vergl. unten § 18, 4 oder die Tabellen)

$$\varphi_{2,2} = C_0 x^2 + 2C_1 xy + C_2 y^2,$$
$$\varphi_{3,3} = D_0 x^3 + 3D_1 x^2 y + 3D_2 xy^2 + D_3 y^3,$$

die bezüglich von der zweiten und dritten Ordnung, vom zweiten und dritten Grad sind, komponiert man die neue Kovariante dritter Ordnung, fünften Grades:

$$\varphi_{3,5} = \begin{vmatrix} C_0 x + C_1 y & C_1 x + C_2 y \\ D_0 x^2 + 2D_1 xy + D_2 y^2 & D_1 x^2 + 2D_2 xy + D_3 y^2 \end{vmatrix}.$$

b) Sind

$$\varphi_{1,5} = B_0 x + B_1 y,$$
$$\varphi_{2,2} = C_0 x^2 + 2C_1 xy + C_2 y^2,$$

Kovarianten der Form fünfter Ordnung, bezüglich erster und zweiter Ordnung, fünften und zweiten Grades, so liefert die Funktionaldeterminante eine ebenfalls lineare Kovariante siebenten Grades, nämlich

$$\varphi_{1,7} = \begin{vmatrix} C_0 x + C_1 y & C_1 x + C_2 y \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix} =$$
$$= (B_1 C_0 - B_0 C_1) x + (B_1 C_1 - B_0 C_2) y = B'_0 x + B'_1 y.$$

c) Aus den Kovarianten der Form fünfter Ordnung

$$\varphi_{1,5} = B_0 x + B_1 y,$$
$$\varphi_{1,7} = B'_0 x + B'_1 y,$$

komponiert man die Invariante zwölften Grades

$$\varphi_{0,12} = \begin{vmatrix} B_0 & B_1 \\ B'_0 & B'_1 \end{vmatrix} = -(C_0 B_1^2 - 2 C_1 B_0 B_1 + C_2 B_0^2) = 2 J_{12}^{(5)}.$$

Anmerkung. Aus den Kovarianten einer Form $\varphi_{i,k}$ und $\varphi_{r,s}$ komponiert man durch Bildung der Funktionaldeterminante eine Kovariante

$$\varphi_{i+r-2,\,k+s}$$

derselben Form.

3. Die Determinante

$$10) \qquad \theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}} & \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n-1}\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} \\ \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n-1}\partial y} & \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n-2}\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{n-1}\partial y^{n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} & \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{n-1}\partial y^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial^{2n} f}{\partial y^{2n}} \end{vmatrix}$$

ist eine Kovariante von f.

Beweis. Man hat zu zeigen, dass die Determinante θ durch lineare Transformation 6) von f sich nur um eine Potenz von r ändert. Transformiert man nun $f(x, y)$ und bildet die Ableitung

$$\frac{\partial^n f}{\partial \xi^i \partial \eta^k} (i + k = n),$$

so lässt sich dieselbe zunächst in der symbolischen Form darstellen

$$\frac{\partial^n f}{\partial \xi^i \partial \eta^k} = \left(p \frac{\partial}{\partial x} + p' \frac{\partial}{\partial y}\right)^i \left(q \frac{\partial}{\partial x} + q' \frac{\partial}{\partial y}\right)^k f,$$

was den folgenden Ausdruck ergiebt

$$11) \qquad \frac{\partial^n f}{\partial \xi^i \partial \eta^k} = P_{ik} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + P'_{ik} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} + \ldots + P_{ik}^{(n)} \frac{\partial^n f}{\partial y^n},$$

wo die P_{ik} von den Substitutionskonstanten p, q, p', q' abhängen. Ausgerechnet ergeben sich dieselben in der Form

$$12)\begin{cases} P_{ik} = p^i q^k \\ P'_{ik} = \binom{i}{1} p^{i-1} p' q^k + \binom{k}{1} p^i q^{k-1} q' \\ P''_{ik} = \binom{i}{2} p^{i-2} p'^2 q^k + \binom{i}{1}\binom{k}{1} p^{i-1} p' q^{k-1} q' + \binom{k}{2} p^i q^{k-2} q'^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_{ik}^{(n-2)} = \binom{i}{i-2} p^2 p'^{i-2} q'^k + \binom{i}{i-1}\binom{k}{k-1} p p'^{i-1} q q'^{k-1} + \binom{k}{k-2} p'^i q^2 q'^{k-2} \\ P_{ik}^{(n-1)} = \binom{i}{i-1} p p'^{i-1} q'^k + \binom{k}{k-1} p'^i q q'^{k-1} \\ P_{ik}^{(n)} = p'^i q'^k. \end{cases}$$

Bezeichnet man also durch P die Determinante

$$13)\qquad P = \begin{vmatrix} P_{n,0} & P'_{n,0} & \dots & P_{n,0}^{(n)} \\ P_{n-1,1} & P'_{n-1,1} & \dots & P_{n-1,1}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{0,n} & P'_{0,n} & \dots & P_{0,n}^{(n)} \end{vmatrix}$$

und durch H die Determinante

$$14)\qquad H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^n \partial x^n} & \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^n \partial x^{n-1} \partial y} & \dots & \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^n \partial y^n} \\ \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^{n-1} \partial \eta \partial x^n} & \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^{n-1} \partial \eta \partial x^{n-1} \partial y} & \dots & \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^{n-1} \partial \eta \partial y^n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^{2n} f}{\partial \eta^n \partial x^n} & \frac{\partial^{2n} f}{\partial \eta^n \partial x^{n-1} \partial y} & \dots & \frac{\partial^{2n} f}{\partial \eta^n \partial y^n} \end{vmatrix},$$

so findet man nach der Multiplikationsregel der Determinanten mit Rücksicht auf 11)

$$15)\qquad H = P \,.\, \theta.$$

Die Transformierte von θ

$$16)\qquad \theta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^{2n}} & \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^{2n-1} \partial \eta} & \dots & \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^n \partial \eta^n} \\ \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^{2n-1} \partial \eta} & \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^{2n-2} \partial \eta^2} & \dots & \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^{n-1} \partial \eta^{n+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^n \partial \eta^n} & \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^{n-1} \partial \eta^{n+1}} & \dots & \frac{\partial^{2n} f}{\partial \eta^{2n}} \end{vmatrix}$$

wird ebenso:

$$17)\qquad \theta' = P \,.\, H = P^2 \,.\, \theta.$$

Man hat jetzt nur noch nachzuweisen, dass P eine Potenz von r ist.* Dividiert man zu dem Ende in P die Elemente der ersten Zeile durch p^n, die Elemente der zweiten Zeile durch $p^{n-1}q$ u. s. w., die Elemente der letzten Zeile durch q^n, und sondert den Faktor $p^{\binom{n+1}{2}} q^{\binom{n+1}{2}}$ ab, so wird

18) $$P = p^{\binom{n+1}{2}} q^{\binom{n+1}{2}} \cdot Q,$$

wo

19) $$Q = \begin{vmatrix} Q_{n,0} & Q'_{n,0} & \cdots & Q^{(n)}_{n,0} \\ Q_{n-1,1} & Q'_{n-1,1} & \cdots & Q^{(n)}_{n-1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{0,n} & Q'_{0,n} & \cdots & Q^{(n)}_{0,n} \end{vmatrix}$$

und

$$Q_{i,k} = 1,$$

$$Q'_{i,k} = \binom{i}{1}\frac{p'}{p} + \binom{k}{1}\frac{q'}{q},$$

$$Q''_{i,k} = \binom{i}{2}\left(\frac{p'}{p}\right)^2 + \binom{i}{1}\binom{k}{1}\left(\frac{p'}{p}\right)\left(\frac{q'}{q}\right) + \binom{k}{2}\left(\frac{q'}{q}\right)^2$$

. . . . . .

allgemein

20) $$Q^{(\mu)}_{i,k} = \frac{P^{(\mu)}_{i,k}}{p^i q^k}.$$

Die Determinante Q enthält aber eine Potenz von r als Faktor. Subtrahiert man nämlich in Q immer von den Elementen einer Zeile die der vorhergehenden, so sind alle Zeilen, ausser der ersten, teilbar durch $-\frac{r}{pq}$. Denn es ist nach 11) $P^{(\mu)}_{i,k}$ der Koefficient von $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\mu}\partial y^\mu}$ in der Entwicklung von $\frac{\partial^n f}{\partial \xi^i \partial \eta^k}$, $(i+k=n)$, d. h. nach einer früheren Bezeichnungsweise

$$P^{(\mu)}_{i,k} = \left\{\frac{\partial^n f}{\partial \xi^i \partial \eta^k}\right\}_{\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\mu}\partial y^\mu}} = \left\{\left(p\frac{\partial}{\partial x} + p'\frac{\partial}{\partial y}\right)^i \left(q\frac{\partial}{\partial x} + q'\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right\}_{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\mu}$$

also mit Berücksichtigung von 20)

$$Q^{(\mu)}_{i,k} = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{p'}{p}\frac{\partial}{\partial y}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{q'}{q}\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right\}_{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\mu} =$$

$$= \frac{\partial^\mu}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\mu}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{p'}{p}\frac{\partial}{\partial y}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{q'}{q}\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right\}.$$

* Der folgende Beweis würde sich etwas einfacher gestalten, indem man unmittelbar nachweist, dass P den für eine Potenz von r charakteristischen Gleichungen 24), 24a), § 14, 8, genügt (d. Verf. in Math. Ann. XVIII).

Danach bilde man:

$$Q^{(\mu)}_{i,k} - Q^{(\mu)}_{i-1,k+1} = \frac{\partial^\mu}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\mu}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{p'}{p}\frac{\partial}{\partial y}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{q'}{q}\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right] -$$

$$-\frac{\partial^\mu}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\mu}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{p'}{p}\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{q'}{q}\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1} f\right] =$$

$$= -\frac{\partial^\mu}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\mu}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{p'}{p}\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{q'}{q}\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{p'}{p}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}-\frac{q'}{q}\frac{\partial}{\partial y}\right) f\right] =$$

$$= -\frac{r}{pq}\cdot\frac{\partial^\mu}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\mu}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{p'}{p}\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{q'}{q}\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) f\right] =$$

$$= -\frac{r}{pq}\frac{\partial^{\mu-1}}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\mu-1}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{p'}{p}\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{q'}{q}\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\right] = -\frac{r}{pq}Q^{(\mu-1)}_{i-1,k}.$$

Man hat also identisch

21) $$Q^{(\mu)}_{i,k} - Q^{(\mu)}_{i-1,k+1} = -\frac{r}{pq}Q^{(\mu-1)}_{i-1,k}.$$

So findet man beispielsweise mit Hilfe der Werte

$$Q_{i-1,k+1} = 1,$$

$$Q'_{i-1,k+1} = \binom{i-1}{1}\frac{p'}{p} + \binom{k+1}{1}\frac{q'}{q},$$

$$Q''_{i-1,k+1} = \binom{i-1}{2}\left(\frac{p'}{p}\right)^2 + \binom{i-1}{1}\binom{k+1}{1}\frac{p'}{p}\cdot\frac{q'}{q} + \binom{k+1}{2}\left(\frac{q'}{q}\right)^2,$$

die Differenzen

$$Q_{i,k} - Q_{i-1,k+1} = 0,$$

$$Q'_{i,k} - Q'_{i-1,k+1} = -\frac{r}{pq},$$

$$Q''_{i,k} - Q''_{i-1,k+1} = -\frac{r}{pq}Q'_{i-1,k},$$

$$Q'''_{i,k} - Q'''_{i-1,k+1} = -\frac{r}{pq}\cdot Q''_{i-1,k}.$$

Führt man die successiven Subtraktionen in 19) aus, so verschwinden alle Elemente der ersten Kolonne ausser dem ersten, das gleich 1 ist. Man hat also durch Unterdrückung der ersten Zeile und Kolonne für Q das Produkt

$$Q = \left(\frac{r}{pq}\right)^n \begin{vmatrix} 1 & Q'_{n-1,0} & \cdots & Q^{(n-1)}_{n-1,0} \\ 1 & Q'_{n-2,1} & \cdots & Q^{(n-1)}_{n-2,1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & Q'_{0,n-1} & \cdots & Q^{(n-1)}_{0,n-1} \end{vmatrix} = \left(\frac{r}{pq}\right)^n Q', \text{ u. s. w.,}$$

also

$$Q=\left(\frac{r}{pq}\right)^{\binom{n+1}{2}},$$

woraus mit Rücksicht auf 18) folgt

$$P=r^{\binom{n+1}{2}}.$$

Die Gleichung 17) liefert jetzt unmittelbar

22) $$\theta'=r^{n\binom{n+1}{2}}.\theta.$$

Also ist θ eine Kovariante.

Anmerkung 1. Ist m die Ordnung von f und gerade, so wird für $2n=m$, θ zu einer Invariante von f. Für eine Form f von gerader Ordnung wird also θ die Invariante vom Grad $\frac{1}{2}m+1$,* die wir schon früher (§ 15) betrachtet haben.

Beispiele. Wir betrachten den Fall $n=2$. Man hat zunächst

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=p\frac{\partial}{\partial x}+p'\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}=q\frac{\partial}{\partial x}+q'\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}=p^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2pp'\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+p'\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}=pq\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(pq'+p'q)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+p'q'\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}=q^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2qq'\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+q'^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Ferner ist

$$H=\begin{vmatrix}\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial x^2} & \frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial y^2}\\ \frac{\partial^4}{\partial\xi\,\partial\eta\,\partial x^2} & \frac{\partial^4}{\partial\xi\,\partial\eta\,\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^4}{\partial\xi\,\partial\eta\,\partial y^2}\\ \frac{\partial^4}{\partial\eta^2\partial x^2} & \frac{\partial^4}{\partial\eta^2\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^4}{\partial\eta^2\partial y^2}\end{vmatrix} f=$$

$$=\begin{vmatrix}p^2 & 2pp' & p'^2\\ pq & pq'+p'q & p'q'\\ q^2 & 2qq' & q'^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\partial^4}{\partial x^4} & \frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} & \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\\ \frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} & \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} & \frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}\\ \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} & \frac{\partial^4}{\partial x\,\partial y^3} & \frac{\partial^4}{\partial y^4}\end{vmatrix} f=r^3\begin{vmatrix}\frac{\partial^4}{\partial x^4} & \frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} & \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\\ \frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} & \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} & \frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}\\ \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} & \frac{\partial^4}{\partial x\,\partial y^3} & \frac{\partial^4}{\partial y^4}\end{vmatrix} f=r^3\theta,$$

u. s. w.

* Katalektikante nach Sylvester.

a) Ist f vierter Ordnung, so hat man

$$\theta = \tfrac{1}{24^3}\begin{vmatrix} \frac{\partial^4}{\partial x^4} & \frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} & \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} \\ \frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} & \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} & \frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3} \\ \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} & \frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3} & \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = J_3;$$

d. h. θ ist die Invariante dritten Grades der biquadratischen Form.

b) Ist f fünfter Ordnung, so liefert

$$\theta = \tfrac{1}{120^3}\begin{vmatrix} \frac{\partial^4}{\partial x^4} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} a_0x+a_1y & a_1x+a_2y & a_2x+a_3y \\ a_1x+a_2y & a_2x+a_3y & a_3x+a_4y \\ a_2x+a_3y & a_3x+a_4y & a_4x+a_5y \end{vmatrix} = \varphi_{3,3} = j;$$

d. h. θ ist die Kovariante dritter Ordnung, dritten Grades der Form fünfter Ordnung.

Setzt man diese Kovariante Null, so erhält man nichts anderes als die Gleichung, welche die kanonische Form fünfter Ordnung liefert. Um dies zu zeigen, rändert man die Determinante in folgender Weise:

$$\begin{vmatrix} y^3 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_0x+a_1y & a_1x+a_2y & a_2x+a_3y \\ a_1 & a_1x+a_2y & a_2x+a_3y & a_3x+a_4y \\ a_2 & a_2x+a_3y & a_3x+a_4y & a_4x+a_5y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y^3 & -y^2x & yx^2 & -x^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \end{vmatrix}.$$

Der erste Faktor der rechten Seite, $=0$ gesetzt, ist aber die fragliche Gleichung (§ 8, 3, 28).

Anmerkung 2. Hätte man zuerst gezeigt, dass die Katalektikante der Form $2n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

eine Invariante ist (etwa durch den Schluss des § 15, letzte Nummer, Anmerkung), so würde daraus nach § 15, 4 offenbar sogleich folgen, dass die Form θ dieses Paragraphen eine Kovariante ist, da sie als Katalektikante der $2n^{\text{ten}}$ Polare einer Form f aufgefasst werden kann. Dass übrigens alle Koefficienten der Gleichung $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades in λ, welche zur kanonischen Form einer Form $2m^{\text{ter}}$ Ordnung führt (§ 15, letzte Nummer), Invarianten sind, lässt sich auf analoge Weise zeigen, wie es in diesem Paragraphen für die Funktion θ geschehen ist.

4. Sind

$$\varphi(x, y) \text{ und } \psi(x, y)$$

Kovarianten der Form

$$f(x, y),$$

bezüglich von den Ordnungen ν und ν', wo $\nu = \nu' - 2$, und eliminiert man x aus den beiden Gleichungen

23) $$\psi(x, 1) = 0,$$

24) $$\frac{\varphi(x, 1)}{\psi'(x, 1)} = z,$$

so sind die Koefficienten der Resultante sämtlich Invarianten von f.*

Beweis. Wir gehen von dem System der beiden Gleichungen 23) und 24), die wir zuerst homogen machen,

25) $$\begin{cases} \nu' . \psi(x, y) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} x + \dfrac{\partial \psi}{\partial y} y = 0, \\ z \dfrac{\partial \psi}{\partial x} - y . \varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$

aus, dem das folgende System äquivalent ist:

26) $$\begin{cases} z \dfrac{\partial \psi}{\partial y} + x . \varphi(x, y) = 0, \\ z \dfrac{\partial \psi}{\partial x} - y . \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Man kann also auch setzen

$$z = \frac{-x . \varphi}{\dfrac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{y . \varphi}{\dfrac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{(ay - bx) . \varphi}{a \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + b \dfrac{\partial \psi}{\partial y}},$$

ein Ausdruck, der von den Werten von a und b gänzlich unabhängig ist.

* Dieser Satz ist eine Erweiterung eines Satzes von Hermite (Mémoire sur l'équation du 5. degré, Comptes Rendus 1865). Die obige Funktion ψ ist bei Hermite $f(x, 1)$ und die Kovariante φ ist also daselbst $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Aus 26) geht nun durch die Substitution

27) $$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta,$$

ein transformiertes System der Art hervor:

28) $$\begin{cases} \xi \dfrac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \xi\, \Phi(\xi, \eta) = 0, \\ \xi \dfrac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \eta\, \Phi(\xi, \eta) = 0, \end{cases}$$

oder

$$\xi = \frac{(\alpha\eta - \beta\xi)\, \Phi(\xi, \eta)}{\alpha \dfrac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \beta \dfrac{\partial \Psi}{\partial \eta}};$$

denn vermöge der Relationen

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = p\frac{\partial}{\partial x} + p'\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = q\frac{\partial}{\partial x} + q'\frac{\partial}{\partial y},$$
$$\Phi = r^{\mu} \cdot \varphi, \quad \Psi = r^{\mu'} \cdot \psi, \quad r = pq' - p'q,$$

geht 28) über in

29) $$\begin{cases} \xi\left(q\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + q'\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \xi \cdot r^{\mu - \mu'} \cdot \varphi(x, y) = 0, \\ \xi\left(p\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + p'\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \eta \cdot r^{\mu - \mu'} \cdot \varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$

oder

$$\xi = r^{\mu - \mu' - 1} \cdot \frac{(qy - q'x) \cdot \varphi}{q\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + q'\dfrac{\partial \psi}{\partial y}} = r^{\mu - \mu' - 1} \frac{(py - p'x) \cdot \varphi}{p\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + p'\dfrac{\partial \psi}{\partial y}} = r^{\mu - \mu' - 1} \cdot \frac{y\varphi}{\dfrac{\partial \psi}{\partial x}},$$

d. h. nach 26)

30) $$\xi = r^{\mu - \mu' - 1} \cdot z.$$

Man sieht, dass die durch 24) definierte Funktion z die Eigenschaft hat, sich durch lineare Transformation nur um eine Potenz von r zu ändern.

Stellt man nun die Resultante von 23), 24) in der Form dar

$$\left[z - \frac{\varphi(\alpha_1, 1)}{\psi'(\alpha_1, 1)}\right]\left[z - \frac{\varphi(\alpha_2, 1)}{\psi'(\alpha_2, 1)}\right] \cdots \left[z - \frac{\varphi(\alpha_{\nu'}, 1)}{\psi'(\alpha_{\nu'}, 1)}\right] = 0,$$

wo die α die Wurzeln von $\psi(x, 1) = 0$ sind, und bezeichnet durch Δ die Diskriminante von ψ

$$\Delta = \psi_0^{\nu' - 2} \cdot \psi'(\alpha_1, 1) \cdot \psi'(\alpha_2, 1) \ldots,$$

so hat man für z die Gleichung ν'^{ten} Grades

31) $$z^{\nu'} + \frac{B_1}{\Delta} z^{\nu' - 1} + \frac{B_2}{\Delta} z^{\nu' - 2} + \ldots + \frac{B_{\nu'}}{\Delta} = 0,$$

wo $B_1, B_2, \ldots, B_{\nu'}$ ganze Funktionen der Koefficienten der Form f sind (und zwar B_1 bekanntlich $=0$) und die Diskriminante Δ eine Funktion der Invarianten von f ist.

Ersetzt man in dieser Gleichung 31) z durch seinen Wert 30)

$$z = r^{-\lambda} \cdot \zeta,$$

wo $\lambda = \mu - \mu' - 1$ ist, so entsteht die Gleichung

$$32) \qquad \zeta^{\nu'} + r^{\lambda} \frac{B_1}{\Delta} \zeta^{\nu'-1} + r^{2\lambda} \frac{B_2}{\Delta} \zeta^{\nu'-2} + \ldots + r^{\nu'\lambda} \frac{B_{\nu'}}{\Delta} = 0.$$

Würde man die Gleichung für z direkt durch die Substitution 27) transformieren, so können die Koefficienten der Transformierten von den Koefficienten der Gleichung 32) nicht verschieden sein, woraus folgt, dass diese sämtlichen Koefficienten Invarianten der gegebenen Form f sind.

Anmerkung. Für $\psi = f$, also $\nu = m - 2$, hat man den Satz von Hermite, der aber erst von $m = 5$ an verwendbar wird, da für $m < 5$ eine Kovariante φ von der Ordnung $m - 2$ nicht existiert.

§ 18. Anzahl der Grundformen einer gegebenen Form.

1. Nach den Sätzen des § 14 genügt es zur Bestimmung der Koefficienten einer Kovariante ausser ihrer Ordnung den ersten Koefficienten C_0 zu kennen, welcher der partiellen Differentialgleichung

$$1) \qquad \delta C_0 = a_0 \frac{\partial C_0}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial C_0}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial C_0}{\partial a_3} + \ldots + m a_{m-1} \frac{\partial C_0}{\partial a_m} = 0$$

genügt. Man nennt daher diesen Koefficienten C_0 den erzeugenden Koefficienten der Kovariante *(leading coefficient* nach Cayley, *source du covariant* bei den französischen Mathematikern).

Derselbe ist eine Semiinvariante der gegebenen Form und kann durch folgende Betrachtung bestimmt werden (vergl. § 12):

Man lege für C_0 die allgemeinste Funktion der Koefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_m$ vom Grade ϱ und vom Gewicht $p = \frac{1}{2}(m\varrho - \nu)$ zu Grunde. Dann ist δC_0 eine Funktion der Koefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_m$ vom Grade ϱ und vom Gewicht $p - 1$. Man hat nun die zunächst willkürlichen Zahlenkoefficienten in der Funktion C_0 so zu bestimmen, dass

$$2) \qquad \delta C_0 = 0$$

wird. Die Anzahl jener ist gleich der Zahl der Glieder in C_0, und die Zahl der Bedingungsgleichungen gleich der Zahl der Glieder in δC_0, so dass die Anzahl der willkürlichen Koefficienten, die unbestimmt

bleiben, gleich ist der Differenz der Gliederzahl von C_σ und der Gliederzahl von δC_0. Da nun eine Kovariante durch ihren erzeugenden Koefficienten C_0 und ihre Ordnung ν vollständig bestimmt ist, so giebt die fragliche Differenz die Anzahl der linear unabhängigen Kovarianten ϱ^{ten} Grades, ν^{ter} Ordnung der Form an. Wir haben also den Satz:

Die Anzahl der linear unabhängigen Kovarianten ν^{ter} Ordnung, ϱ^{ten} Grades, der Form m^{ter} Ordnung ist gleich der Differenz der Gliederzahlen einer Funktion ϱ^{ten} Grades, $\frac{1}{2}(m\varrho-\nu)^{\text{ten}}$ Gewichts und einer Funktion ϱ^{ten} Grades, $\{\frac{1}{2}(m\varrho-\nu)-1\}^{\text{ten}}$ Gewichts.*

Nun ist aber nach den Sätzen des § 12 die Gliederzahl einer Funktion der Koefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_m$, ϱ^{ten} Grades, p^{ten} Gewichts gleich der Anzahl, die angiebt, wie oft eine Zahl p aus ϱ Zahlen der Reihe 0, 1, 2, 3, ..., m mit unbedingter Wiederholung additiv zusammengesetzt werden kann, die wiederum gleich ist dem Koefficienten von $x^p z^\varrho$ in der Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^2z)\ldots(1-x^mz)},$$

d. h. gleich dem Koefficienten von x^p in der Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})\ldots(1-x^{m+\varrho})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^\varrho)},$$

oder von

$$\frac{(1-x^{\varrho+1})(1-x^{\varrho+2})\ldots(1-x^{\varrho+m})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}.$$

Also ist die Anzahl der linear unabhängigen Kovarianten ν^{ter} Ordnung, ϱ^{ten} Grades einer Form m^{ter} Ordnung gleich der Differenz der Anzahlen, die bezüglich angeben, wie oft die Zahlen

$$\tfrac{1}{2}(m\varrho-\nu) \text{ und } \tfrac{1}{2}(m\varrho-\nu)-1$$

aus ϱ Zahlen der Reihe 0, 1, 2, 3, ..., m mit unbedingter Wiederholung additiv zusammengesetzt werden können.

Bezeichnen wir, wie früher, diese Zahlen bezüglich durch

$$C(p,\varrho,m) \text{ und } C(p-1,\varrho,m)$$

und setzen wir zur Abkürzung

$$C'(p,\varrho,m)=C(p,\varrho,m)-C(p-1,\varrho,m),$$

so ist die Anzahl der linear unabhängigen Kovarianten ν^{ter} Ordnung, ϱ^{ten} Grades einer Form m^{ter} Ordnung

* Cayley, Phil. Trans. 1856 pag. 107.

$$C'\{\tfrac{1}{2}(m\varrho-\nu),\varrho,m\}.$$

Um die Gesamtzahl der Kovarianten vom Grade ϱ von $\nu=0$ bis zur höchst möglichen Ordnung $\nu=m\varrho$ zu erhalten, unterscheide man zwei Fälle:

I. $m\varrho$ gerade.

Setzt man ν der Reihe nach gleich

$$0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ m\varrho,$$

so hat man

$$\begin{array}{ll} C(\tfrac{1}{2}m\varrho) & -C(\tfrac{1}{2}m\varrho-1) \\ +C(\tfrac{1}{2}m\varrho-1) & -C(\tfrac{1}{2}m\varrho-2) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ +C(2) & -C(1) \\ +C(1) & -C(0) \\ +1 & =C(\tfrac{1}{2}m\varrho). \end{array}$$

Also ist die Anzahl der Kovarianten ϱ^{ten} Grades für ein gerades $m\varrho$

$$C\{\tfrac{1}{2}m\varrho,\varrho,m\}.$$

II. $m\varrho$ ungerade.

Ist $m\varrho$ ungerade, so erhält man ähnlich die Anzahl aller Kovarianten ϱ^{ten} Grades, indem man $\nu=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ m\varrho$ setzt:

$$C\{\tfrac{1}{2}(m\varrho-1),\varrho,m\}.$$

Beide Formeln können in eine Formel vereinigt werden; denn für ein ungerades $m\varrho$ ist $\frac{1}{2}m\varrho$ ein Bruch, wofür $C(\frac{1}{2}m\varrho)$ verschwindet. Für ein gerades $m\varrho$ ist $\frac{1}{2}(m\varrho-1)$ ein Bruch, so dass in diesem Falle $C\{\frac{1}{2}(m\varrho-1)\}$ verschwindet. Wir haben also den Satz:

Die Anzahl der linear unabhängigen Kovarianten ϱ^{ten} Grades einer Form m^{ter} Ordnung beträgt

3) $$C\{\tfrac{1}{2}m\varrho,\varrho,m\}+C\{\tfrac{1}{2}(m\varrho-1),\varrho,m\}.$$

Diese Kovarianten sind aber im allgemeinen noch reducibel und setzen sich aus Kovarianten niedrigeren Grades zusammen. Die Anzahl der irreducibeln Kovarianten bestimmen wir im folgenden nur an Beispielen.

2. Beispiele. a) Für quadratische Formen ist die Anzahl der linear unabhängigen Kovarianten ϱ^{ten} Grades

4) $$C\{\varrho,\varrho,2\}=C\{\varrho,2,\varrho\}=\left\{\frac{(1-x^{\varrho+1})(1-x^{\varrho+2})}{(1-x)(1-x^2)}\right\}_{x^\varrho}=\left\{\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}\right\}_{x^\varrho}$$

d. h. es giebt eine Kovariante ersten Grades, nämlich die Form selbst, dem Faktor $1-x$ entsprechend, und zwei Kovarianten zweiten Grades, nämlich die Invariante J von f

(dem Faktor $1-x^2$ entsprechend) und die reducible Kovariante, das Quadrat der quadratischen Form selbst. Für höhere ϱ erhält man nur ganze Funktionen von f und J.

b) Für Formen dritter Ordnung ist die Anzahl der linear unabhängigen Kovarianten ϱ^{ten} Grades

$$C\left\{\frac{3\varrho}{2}, \varrho, 3\right\} + C\left\{\tfrac{1}{2}(3\varrho-1), \varrho, 3\right\}.$$

Zunächst berechnen wir $C\{\frac{1}{2}(3\varrho-1), \varrho, 3\}$.

Man hat

$$C\{\tfrac{1}{2}(3\varrho-1), \varrho, 3\} = C\{\tfrac{1}{2}(3\varrho-1), 3, \varrho\} = \left\{\frac{(1-x^{\varrho+1})(1-x^{\varrho+2})(1-x^{\varrho+3})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right\}_{x^{\frac{1}{2}(3\varrho-1)}}$$

oder, indem man x mit x^2 vertauscht:

$$C\{\tfrac{1}{2}(3\varrho-1), \varrho, 3\} = \left\{\frac{x}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}\right\}_{x^{3\varrho}} -$$

$$-\left\{\frac{x(x^2+x^4+x^6)}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}\right\}_{x^{\varrho}} = \left\{\frac{x}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}\right\}_{x^{3\varrho}} - \left\{\frac{x^3}{(1-x^2)^2(1-x^4)}\right\}_{x^{\varrho}}.$$

Nun ist identisch

$$\frac{(1-x^6)^2(1-x^{12})}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)} = (1+x^2+x^4)(1+x^4+x^8),$$

oder

$$\frac{x}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)} = \frac{x(1+x^2+x^4)(1+x^4+x^8)}{(1-x^6)^2(1-x^{12})}.$$

Vernachlässigt man im Zähler alle Glieder, deren Exponenten nicht durch 3 teilbar sind, so kommt

$$\left\{\frac{x}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}\right\}_{x^{3\varrho}} = \left\{\frac{x^3+2x^9}{(1-x^6)^2(1-x^{12})}\right\}_{x^{3\varrho}} = \left\{\frac{x+2x^3}{(1-x^2)^2(1-x^4)}\right\}_{x^{\varrho}}.$$

Man hat also

$$C\{\tfrac{1}{2}(3\varrho-1), \varrho, 3\} = \left\{\frac{x+x^3}{(1-x^2)^2(1-x^4)}\right\}_{x^{\varrho}}.$$

Man findet ebenso den Wert von $C\left(\frac{3\varrho}{2}, \varrho, 3\right)$:

$$C\left\{\frac{3\varrho}{2}, \varrho, 3\right\} = \left\{\frac{1+x^4}{(1-x^2)^2(1-x^4)}\right\}_{x^{\varrho}}.$$

Also wird nach 3) die gesuchte Anzahl der linear unabhängigen Kovarianten ϱ^{ten} Grades einer kubischen Form:

5) $$C' = \left\{ \frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} \right\}_{x^\varrho}.$$

Entsprechend den vier Faktoren

$$1-x,\quad 1-x^2,\quad 1-x^3,\quad 1-x^4$$

folgen zunächst vier irreducible Kovarianten bezüglich von den Graden 1, 2, 3, 4; nämlich

1. die Kovariante ersten Grades oder die kubische Form selbst (f);
2. die Kovariante zweiten Grades und zweiter Ordnung ($\varphi_{2,2}$ oder Δ);
3. die Kovariante dritten Grades und dritter Ordnung ($\varphi_{3,3}$ oder Q), Funktionaldeterminante von f, Δ;
4. die Kovariante vierten Grades und nullter Ordnung, d. h. die Invariante, die zugleich Diskriminante ist (J oder R).

Die übrigen durch 4) angeführten Kovarianten sind reducible, nämlich

$$\text{für } \varrho = 2, \ldots f^2,$$
$$\text{für } \varrho = 3, \ldots f^3,\ f.\Delta,$$
$$\text{für } \varrho = 4, \ldots f^4,\ f^2\Delta,\ f.Q,\ \Delta^2;$$

ebenso werden für alle weiteren ϱ nur Produkte von f, Δ, Q, R erscheinen. Ferner sind diese vier irreducibeln Kovarianten wegen des Faktors $1-x^6$, der den Koefficienten von x^6 in der Entwicklung von 4) um 1 vermindert, durch eine Gleichung sechsten Grades verbunden; nämlich

$$\varphi_{3,3}^2 - Jf^3 + 4\varphi_{2,2}^3 = 0,$$

oder nach unserer späteren Bezeichnung (§ 20):

6) $$Q^2 = -4\Delta^3 + Rf^2,$$

eine Formel, auf welcher die Auflösung der kubischen Gleichungen beruht.

3. Für Formen vierter Ordnung ist die Anzahl der linear unabhängigen Kovarianten ϱ^{ten} Grades

$$C(2\varrho, \varrho, 4) + C\{\tfrac{1}{2}(4\varrho-1), \varrho, 4\} = C\{2\varrho, \varrho, 4\} = C\{2\varrho, 4, \varrho\} =$$
$$= \left\{ \frac{(1-x^{\varrho+1})(1-x^{\varrho+2})(1-x^{\varrho+3})(1-x^{\varrho+4})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} \right\}_{x^{2\varrho}} =$$
$$= \left\{ \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} \right\}_{x^{2\varrho}} - \left\{ \frac{x(1+x+x^2+x^3)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} \right\}_{x^\varrho}.$$

Berücksichtigt man die Identität

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} = \frac{1+x+x^3+x^4}{(1-x^2)^2(1-x^4)(1-x^6)}$$

und vernachlässigt im Zähler die Glieder mit x und x^3, so geht das erste Glied der rechten Seite über in:

$$\left\{\frac{1+x^4}{(1-x^2)^2(1-x^4)(1-x^6)}\right\}x^{2\varrho} = \left\{\frac{1+x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}\right\}x^{\varrho},$$

und man hat die Gleichung

$$C\{2\varrho, \varrho, 4\} = \left\{\frac{1-x+x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}\right\}x^{\varrho}.$$

Nun ist aber der Zähler

$$1-x+x^2 = \frac{1+x^3}{1+x} = \frac{1-x^6}{(1+x)(1-x^3)} = \frac{(1-x^6)(1-x)}{(1-x^2)(1-x^3)},$$

so dass

$$7) \qquad C\{2\varrho, \varrho, 4\} = \left\{\frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2}\right\}x^{\varrho}.$$

Es giebt also zunächst fünf irreducible Kovarianten der Form vierter Ordnung, nämlich eine Kovariante ersten Grades; zwei Kovarianten zweiten Grades, zwei Kovarianten dritten Grades, den Faktoren des Nenners von 7) entsprechend.

Die irreducible Kovariante ersten Grades ist vierter Ordnung, nämlich die biquadratische Form selbst (f).

Die eine Kovariante zweiten Grades ist nullter Ordnung, also eine Invariante (J_2 oder $\frac{1}{2}i$); die andere Kovariante zweiten Grades ist vierter Ordnung ($\varphi_{4,2}$ oder H).

Die eine Kovariante dritten Grades ist nullter Ordnung, also eine Invariante (J_3 oder $\frac{1}{6}j$); die andere Kovariante dritten Grades ist sechster Ordnung ($\varphi_{6,3}$ oder T), Funktionaldeterminante von f, H.

Die Form vierter Ordnung besitzt also die Kovarianten

$$f, \quad H, \quad T$$

und die Invarianten

$$J_2, \quad J_3.$$

Alle übrigen Kovarianten müssen aber ganze Funktionen der vorstehenden fünf irreducibeln werden, weil die durch 7) gelieferte Gesamtzahl der Kovarianten vom Grade ϱ hierdurch schon erschöpft wird. Für $\varrho = 6$ zeigt der Faktor $(1-x^6)$ im Zähler von 7), dass diese fünf irreducibeln Kovarianten der biquadratischen Form (wie die irreducibeln Kovarianten der kubischen Form) durch eine Gleichung sechsten Grades in den Koefficienten von f verbunden sind und

zwar kann, wie bei den kubischen Formen das Quadrat von Q, hier nur das Quadrat der ungeraden Form T durch die übrigen Formen ausgedrückt werden. Diese Gleichung lautet:

$$-\varphi_{6,3}^2 = J_3 f^3 - J_2 f^2 \varphi_{4,2} + 4\varphi_{4,2}^3,$$

oder nach unserer späteren Bezeichnung (§ 20):

8) $$T^2 = -(4H^3 - J_2 H f^2 + J_3 f^3).$$

4. Für die Formen von höherer als vierter Ordnung ist dieser von Cayley (Second memoir on Quantics, Phil. Trans. 1855) herrührende Weg, die Endlichkeit der Anzahl der irreducibeln Kovarianten zu beweisen und diese Anzahl selbst zu ermitteln, von demselben weiter verfolgt worden, ohne indes damals zu befriedigenden Resultaten zu führen. Dagegen hat Gordan (Borchardts Journ. Bd. 69, 1868) auf dem Weg symbolischer Darstellungsformen, in den im letzten Paragraphen dieses Buches noch eingeführt werden soll, die Endlichkeit des Systems nachgewiesen und zugleich für die binären Formen fünfter und sechster Ordnung das System (23, bezüglich 26 irreducible „Grundformen") aufgestellt, später auch für die Form siebenter Ordnung (Über das Formensystem binärer Formen, Leipzig, Teubner 1875).

Es möge hier nach Gordan das System irreducibler Grundformen der Form f von der fünften Ordnung folgen. Die Bezeichnung f, i, A, H, T u. s. w. ist „Clebsch, Binäre Formen" entnommen. Zur Abkürzung sei ferner die Funktionaldeterminante aus zwei Formen φ und ψ durch (φ, ψ) bezeichnet, und der Prozess (§ 15, 5), durch welchen in φ die Produkte der Potenzen der Variabeln x, y durch die symbolischen Produkte der Potenzen von $\frac{\partial}{\partial y}$, $-\frac{\partial}{\partial x}$, angewendet auf eine Form ψ, ersetzt werden, durch $[\varphi, \psi]$.

Als System der Grundformen kann (unter anderen) folgendes genommen werden:

1) $\varphi_{5,1} = f$;
2) $\varphi_{2,2} = i =$ quadratische Invariante der vierten Polare von f;
3) $\varphi_{6,2} = H =$ Hessesche Form von f;
4) $\varphi_{3,3} = j = [i, f] =$ kubische Invariante der vierten Polare von f;
5) $\varphi_{5,3} = (f, i)$;
6) $\varphi_{9,3} = T = (f, H)$;
7) $\varphi_{0,4} = A = J_4 = [i, i]$;
8) $\varphi_{4,4} = [i, H]$;
9) $\varphi_{6,4} = (H, i)$;

10) $\varphi_{1,5} = [i, j]$;
11) $\varphi_{3,5} = (i, j)$;
12) $\varphi_{7,5} = (j, H)$ oder auch die Form $[i, T]$;
13) $\varphi_{2,6} =$ Hessesche Form von $j = \varphi_{3,3}$;
14) $\varphi_{4,6} = (i, \varphi_{4,4})$;
15) $\varphi_{1,7} = (i, \varphi_{1,5})$;
16) $\varphi_{5,7} = (f, \varphi_{2,6})$;
17) $\varphi_{0,8} = J_8 =$ quadratische Invariante von $\varphi_{4,4}$;
18) $\varphi_{2,8} = (i, \varphi_{2,6})$;
19) $\varphi_{3,9} = (j, \varphi_{2,6})$;
20) $\varphi_{1,11} = (\varphi_{2,6}, \varphi_{1,5})$;
21) $\varphi_{0,12} = J_{12} =$ Diskriminante von j oder $(\varphi_{1,5}, \varphi_{1,7})$;
22) $\varphi_{1,13} = (\varphi_{1,5}, \varphi_{2,8})$;
23) $\varphi_{0,18} = J_{18} =$ kubische Invariante von $\varphi_{4,6}$ oder statt dessen $[\varphi_{2,8}, \varphi_{1,5}^2]$ oder Resultante von f und j.

Man hat also die Tabelle:

Anzahl.	Ordnung.	Grad.
4	0	4, 8, 12, 18
4	1	5, 7, 11, 13
3	2	2, 6, 8
3	3	3, 5, 9
2	4	4, 6
3	5	1, 3, 7
2	6	2, 4
1	7	5
1	9	3

Der Gordansche Satz von der Endlichkeit des Formensystems bildet den Fundamentalsatz für die höheren Entwicklungen der Invariantentheorie, für deren Studium wir auf das Buch von Clebsch und die letztgenannte Schrift von Gordan verweisen.

Erst in neuester Zeit ist der Cayleysche Weg von neuem und mit Erfolg eingeschlagen worden. Sylvester hat in einer Reihe von Noten in den Comptes Rendus der Pariser Akademie von 1878 und 1879 und im American Math. Journal Bd. 1 und 2, sowie in Borch. Journal Bd. 85, einen strengen Beweis der Formel 3) dieses Paragraphen, sowie eine solche Umformung der erzeugenden Funktion im allgemeinen Falle versucht, welche sogleich, wie für die Formen zweiter bis vierter Ordnung, durch ihre Faktoren die irreduciblen Kovarianten an-

zeigt. Auf diese Weise hat er die Anzahlen bis zu den Formen zehnter Ordnung incl. bestimmt. Da aber diese Untersuchungen noch nicht abgeschlossen sind, können wir hier nur auf dieses weite Feld hinweisen.

§ 19. Simultane Kovarianten.

1. Seien

1) $$\varphi(x, y) \text{ und } \psi(x, y)$$

zwei Formen bezüglich von den Ordnungen m_1 und m_2, deren Koefficienten bezüglich lauten

$$a_0, a_1, \ldots, a_{m_1}; \quad b_0, b_1, \ldots, b_{m_2}.$$

Dieselben mögen durch die Substitution

2) $$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta$$

bezüglich übergehen in

3) $$\Phi(\xi, \eta) \text{ und } \Psi(\xi, \eta).$$

Man bezeichnet nun als simultane Kovarianten von φ und ψ solche ganze rationale Funktionen der Koefficienten und Variabeln von φ und ψ, die bis auf eine Potenz der Substitutionsdeterminante $r = pq' - p'q$ denselben Wert annehmen, gleichviel, ob man sie für die ursprünglichen oder für die transformierten Formen bildet. Solche Bildungen genügen also der Gleichung:

4) $$\theta(A_0, A_1, \ldots; B_0, B_1, \ldots; \xi, \eta) = r^\lambda \theta(a_0, a_1, \ldots; b_0, b_1, \ldots; x, y).$$

Ist nun ν die Ordnung einer simultanen Kovariante von φ und ψ, sind ferner ϱ_1, ϱ_2 bezüglich die Grade in Bezug auf die Koefficienten $a_0, a_1, \ldots; b_0, b_1, \ldots$, so wird der Index der Kovariante λ durch die Formel gegeben

5) $$\lambda = \tfrac{1}{2}(m_1\varrho_1 + m_2\varrho_2 - \nu).$$

Man findet ferner vermittelst der Substitution

$$x = \xi, \quad y = \varkappa\eta,$$

dass die Gewichte der einzelnen Koefficienten einer simultanen Kovariante die von λ an aufsteigende Reihe natürlicher Zahlen bilden.

Auch die Symmetrie der von den beiden Enden gleich weit abstehenden Glieder lässt sich für die simultanen Kovarianten mit Leichtigkeit erweisen.

Endlich genügt jede simultane Kovariante θ der Formen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung

$$6) \qquad a_0\frac{\partial\theta}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\theta}{\partial a_2}+\ldots+b_0\frac{\partial\theta}{\partial b_1}+2b_1\frac{\partial\theta}{\partial b_2}+\ldots=y\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

die wir abkürzend schreiben wollen:

$$6a) \qquad \Delta=y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Vertauscht man die symmetrisch gelegenen Koefficienten, so geht 6a) über in

$$7) \qquad \Delta'=x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Sind C_0, C_1, ... die Koefficienten der simultanen Kovariante θ, so hat man also:

$$8) \qquad \begin{cases} \Delta C_0=0 & \Delta' C_0 = \nu C_1 \\ \Delta C_1=C_0 & \Delta' C_1 = (\nu-1)C_2 \\ \Delta C_2=2C_1 & \Delta' C_2 = (\nu-2)C_3 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \Delta C_\nu=\nu C_{\nu-1} & \Delta' C_{\nu-1}=C_\nu \\ & \Delta' C_\nu = 0. \end{cases}$$

Jede simultane Kovariante ist demnach nach Feststellung der Ordnung ν durch ihren ersten Koefficienten C_0 (resp. C_ν) bestimmt. Derselbe ist eine simultane Semiinvariante der ursprünglichen Formen.

Die Beweise erfolgen genau wie im § 14.

2. Die Funktionaldeterminante der beiden Formen

$$\varphi(x,y) \text{ und } \psi(x,y),$$

nämlich

$$9) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

ist eine simultane Kovariante der Formen φ und ψ. Denn zufolge der Relationen

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=p\frac{\partial}{\partial x}+p'\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial\eta}=q\frac{\partial}{\partial x}+q'\frac{\partial}{\partial y}$$

hat man die Identität

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} & \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} & \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Die gleiche Eigenschaft hat jede symbolische Potenz der Funktionaldeterminante. Bedeute zur Abkürzung

10) $$(\varphi, \psi)$$

die Funktionaldeterminante der Formen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$, so ist

11) $$(\varphi, \psi)^k,$$

wenn man in diesem Ausdruck

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^i, \text{ bez. } \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^h \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^i$$

als Symbol für

$$\frac{\partial^{h+i}\varphi}{\partial x^h \partial y^i}, \text{ bez. } \frac{\partial^{h+i}\psi}{\partial x^h \partial y^i}$$

betrachtet, eine simultane Kovariante der Formen φ und ψ.*

Diese Kovariante entsteht auch aus der k^{ten} Polare von φ

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \varphi$$

dadurch, dass man die Potenzen und Produkte der Grössen x', y' durch die symbolischen Potenzen und Produkte der Grössen

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi, \quad -\frac{\partial}{\partial x}\psi$$

ersetzt. Die hier gegebene Bildungsweise ist also für den Fall, dass φ und ψ Kovarianten einer Form f sind, identisch mit dem in § 15, Nr. 5 gegebenen Prozess.

Ist $m_2 \geqq m_1$, wo m_1 und m_2 die Ordnung bez. von φ und ψ, so wird

12) $$(\varphi, \psi)^{m_1} = [\varphi, \psi],$$

wo $[\varphi, \psi]$ die im vorigen Paragraphen Nr. 4 so bezeichnete Form ist.

Beispiele. I. Seien

$$\varphi = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2$$
$$\psi = b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2.$$

Die Operation

$$(\varphi, \psi)^2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

liefert die simultane Invariante

$$a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0.$$

* Cayley hat diese Funktion unter dem Namen Hyperdeterminante betrachtet und aus ihr die Haupteigenschaften der Kovarianten abgeleitet. Eine andere symbolische Darstellung desselben Ausdrucks wird im letzten Paragraphen gegeben werden.

II. Für die kubischen Formen

$$\varphi = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$$
$$\psi = b_0x^3 + 3b_1x^2y + 3b_2xy^2 + b_3y^3$$

liefert der Prozess $(\varphi, \psi)^3$ die simultane Invariante

$$a_0b_3 - 3(a_1b_2 - a_2b_1) - a_3b_0.$$

Die Operation $(\varphi, \psi)^2$ liefert die simultane Kovariante

$$(a_0b_2 - 2a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 - a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)xy + (a_1b_3 - 2a_2b_2 + a_3b_1)y^2,$$

die für $b = a$ in die quadratische Kovariante von $\varphi(x, y)$ übergeht.

III. Wendet man auf die Formen vierter Ordnung φ und ψ die Operation $(\varphi, \psi)^3$ an, so findet man die simultane Kovariante

$$\begin{pmatrix} a_0b_3 - 3a_1b_2 \\ -a_3b_0 + 3a_2b_1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} a_0b_4 - 2a_1b_3 \\ -a_4b_0 + 2a_3b_1 \end{pmatrix} xy + \begin{pmatrix} a_1b_4 + 3a_2b_3 \\ -a_4b_1 + 3a_3b_2 \end{pmatrix} y^2,$$

die für $b = a$ verschwindet, was auch sein muss, da für eine Form vierter Ordnung keine quadratische Kovariante existiert.

3. Eine andere wichtige Methode zur Bildung von Kovarianten besteht darin, dass man aus zwei gegebenen Formen φ und ψ, die beide von gleicher Ordnung vorausgesetzt werden, eine neue Funktion

$$\varphi + k\psi$$

komponiert, wo k einen willkürlichen Parameter bedeutet. Ersetzt man dann in einer Kovariante ω der Form $\varphi(x, y)$ die Koefficienten a_0, a_1, a_2, ... bezüglich durch

$$a_0 + kb_0, \quad a_1 + kb_1, \quad a_2 + kb_2, \quad \ldots,$$

wo b_0, b_1, b_2, ... die Koefficienten der Form $\psi(x, y)$ bedeuten, so ist die so gebildete Funktion Ω eine simultane Kovariante der Formen φ und ψ. Entwickelt man also Ω nach Potenzen von k, so hat jeder Koefficient dieser Entwicklung die Invarianteneigenschaft.

Es genügt insbesondere, den ersten Koefficienten dieser Entwicklung

$$13) \qquad \theta(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial a_0} b_0 + \frac{\partial \omega}{\partial a_1} b_1 + \frac{\partial \omega}{\partial a_2} b_2 + \ldots$$

zu betrachten, da durch Wiederholung des Prozesses $\theta(\omega)$ die übrigen Koefficienten erhalten werden:

Differentiiert man eine simultane Kovariante zweier Formen φ und ψ von gleicher Ordnung nach den Koefficienten von φ und multipliziert je mit den entsprechenden Koefficienten von ψ, so ist das Resultat $\theta(\omega)$ wieder eine simultane Kovariante von φ und ψ.

Beispiel. Sei

$$\omega = a_0 a_2 - a_1^2$$

die Invariante der Form

$$\varphi = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2,$$

so ist die simultane Invariante der beiden quadratischen Formen

$$\varphi = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2$$
$$\psi = b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2$$
$$= \theta(\omega) = a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0.$$

In der That ist

$$(a_0 p^2 + 2a_1 pp' + a_2 p'^2)(b_0 q^2 + 2b_1 qq' + b_2 q'^2) -$$
$$- 2[a_0 pq + a_1(pq' + p'q) + a_2 p'q'][b_0 pq + b_1(pq' + p'q) + b_2 p'q']$$
$$+ (b_0 p^2 + 2b_1 pp' + b_2 p'^2)(a_0 q^2 + 2a_1 qq' + a_2 q'^2) =$$
$$= r^2(a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0).$$

4. Unter den simultanen Formen zweier Formen φ, ψ von gleicher Ordnung zeichnen sich insbesondere diejenigen ω aus, für welche der Prozess

14) $$\theta(\omega) = 0$$

liefert. Dieselben ändern sich nicht, wenn man die Form φ durch $\varphi + k\psi$ ersetzt, so dass, wenn ϱ_1 der Grad von $\omega(\varphi, \psi)$ in Bezug auf die Koefficienten von φ:

15) $$\omega(\varkappa\varphi + \lambda\psi, \psi) = \varkappa^{\varrho_1} . \omega(\varphi, \psi).$$

Sei ebenso

16) $$\theta'(\omega) = \frac{\partial\omega}{\partial b_0} a_0 + \frac{\partial\omega}{\partial b_1} a_1 + \ldots = 0;$$

alsdann hat man auch, wenn ϱ_2 der Grad von ω in Bezug auf die Koefficienten von ψ:

17) $$\omega(\varphi, \mu\varphi + \nu\psi) = \nu^{\varrho_2} . \omega(\varphi, \psi).$$

Macht man also hinter einander die Substitutionen:

18) $$\varphi' = \varkappa\varphi + \lambda\psi, \quad \psi' = \psi,$$

19) $$\varphi'' = \varphi', \quad \psi'' = \mu\varphi' + \nu\psi',$$

d. h.

20) $$\varphi'' = \varkappa\varphi + \lambda\psi, \quad \psi'' = \varkappa'\varphi + \lambda'\psi,$$

wenn man

$$\mu = \frac{\varkappa'}{\varkappa}, \quad \nu = \frac{\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda}{\varkappa}$$

setzt, so erhält man nach einander

$$\omega' = \varkappa^{\varrho_1}\omega; \quad \omega'' = \nu^{\varrho_2}\omega' = (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)^{\varrho_2} . \varkappa^{\varrho_1 - \varrho_2} . \omega.$$

Setzt man aber 20) aus den Substitutionen

18a) $\varphi' = \varphi, \qquad \psi' = \varkappa'\varphi + \lambda'\psi;$

19a) $\varphi'' = \mu\varphi' + \nu\psi', \quad \psi'' = \psi;$

für

$$\nu = \frac{\lambda}{\lambda'}, \quad \mu = \frac{\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda}{\lambda'}$$

zusammen, so folgt ebenso

$$\omega'' = (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)^{\varrho_1}\lambda'^{\varrho_2 - \varrho_1}\omega,$$

daher aus beiden Ausdrücken für ω'', da die Grössen $\varkappa$, λ, $\varkappa'$, λ', ganz willkürlich sind

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$$

und

21) $$\omega'' = (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)^{\varrho} \cdot \omega.$$

Die Kovarianten ω zweier Formen φ, ψ von gleicher Ordnung haben also, wenn

$$\theta(\omega) = 0, \quad \theta'(\omega) = 0$$

sind, die Eigenschaft, dass sie sich nur um eine Potenz der Determinante

$$\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda$$

ändern, wenn man an Stelle der Formen φ, ψ zwei beliebige lineare Funktionen derselben

$$\varkappa\varphi + \lambda\psi, \quad \varkappa'\varphi + \lambda'\psi$$

zu Grunde legt.

Solche Kovarianten sind in Bezug auf die beiden Formen φ, ψ von gleichem Grade. Sie werden Kombinanten von φ, ψ genannt.* Ihre Eigenschaft auch in Bezug auf die Überführung von φ, ψ in beliebige lineare Funktionen von φ, ψ invariant zu sein, lässt sich auch so aussprechen:

Die Kombinanten sind zugleich simultane Invarianten der $m+1$ linearen Formen

$$a_i X + b_i Y (i = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

wo die a_i, bez. b_i die Koefficienten der Form m^{ter} Ordnung φ bez. ψ sind.

Hieraus folgt weiter, da irgend solche lineare Formen nur die Invarianten

$$a_i b_k - a_k b_i$$

haben: die Koefficienten der Kombinanten sind ganze Funktionen der Grössen $(a_i b_k - a_k b_i)$.

---

* Cayley, 8. Memoir upon Quantics, Phil. Trans. 1856, Vol. 146, pag. 638.

Beispiel 1. Wir haben in § 6, über die Eigenschaften der Resultante zweier binären Formen φ, ψ, Nr. 7, gezeigt, dass dieselbe eine simultane Invariante von φ und ψ ist. Aus § 6, 8 folgt ferner, dass, wenn φ und ψ von derselben Ordnung sind, die Resultante auch eine Kombinante von φ, ψ ist (vergl. die Bézoutsche Form § 5, 13).

Beispiel 2. Die Funktionaldeterminante (φ, ψ) zweier Formen m^{ter} Ordnung φ, ψ ist eine Kombinante von φ und ψ. Denn man hat

$$\begin{vmatrix} \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} & \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \varkappa' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda' \frac{\partial \psi}{\partial x} & \varkappa' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda' \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda \\ \varkappa' & \lambda' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

5. Sind in Nr. 3 die beiden Formen φ und ψ speziell:

$$\varphi(x, y) \text{ und } \psi = (y'x - x'y)^m,$$

wo auch φ vom Grade m, und wendet man nun den Prozess $\theta(\omega)$ auf eine Invariante ω von $\varphi(x, y)$ an, so erhält man offenbar die in § 15 Nr. 7 als Evektante bezeichnete Form

$$22) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial a_0} y'^m - \frac{\partial \omega}{\partial a_1} \cdot y'^{m-1} x' + \frac{\partial \omega}{\partial a_2} y'^{m-2} x'^2 - \ldots,$$

die eine simultane Invariante von φ und ψ ist, also auch eine Kovariante von φ allein, wenn man beachtet, dass x', y' dieselbe lineare Transformation erleiden wie x, y. Man erhält auf diese Weise die Bildung von § 15 Nr. 7 als speziellen Fall der vorhergehenden Nr. 3.

Ebenso kann der Prozess in Nr. 2 dieses Paragraphen als spezieller Fall des Prozesses $\theta(\omega)$ von Nr. 3 dieses Paragraphen aufgefasst werden, so dass also der Prozess $\theta(\omega)$ in der That der fundamentale ist.

Man hat zu diesem Zweck nur die drei Formen

$$23) \qquad \begin{cases} \omega = \left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y}\right)^k \varphi, \\ (y'x - x'y)^k, \\ \left(x \frac{\partial}{\partial x'} + y \frac{\partial}{\partial y'}\right)^k \psi(x', y') \end{cases}$$

zu betrachten, ω nach den Koefficienten

$$y'^k, \quad -y'^{k-1}x', \quad \ldots$$

der zweiten Form zu differentiieren und mit den entsprechenden Koefficienten der dritten Form, die k^{ter} Ordnung in x, y ist, zu multiplizieren, um im Resultat $\theta(\omega)$ eine Kovariante von φ und ψ zu erhalten, die für $x' = x$, $y' = y$ mit $(\varphi, \psi)^k$ übereinstimmt.

6. Zusammenstellung der simultanen Kovarianten zweier Formen zweiter, dritter und vierter Ordnung (die zweite Kolonne bezeichnet die Ordnung, die dritte bezüglich den Grad in den Koefficienten von φ und ψ).

I. Simultane Kovarianten zweier quadratischer Formen.

	Ordnung	Grad φ	Grad ψ	
D	0	2	0	Invariante von $\varphi = (\varphi,\varphi)^2 = D$
Δ	0	0	2	Invariante von $\psi = (\psi,\psi)^2 = \Delta$
θ	0	1	1	simultane Invariante $= (\varphi,\psi)^2 = \theta$
φ	2	1	0	Form φ
ψ	2	0	1	Form ψ
ϑ	2	1	1	$(\varphi,\psi) = \vartheta$

Auf diese Formen lassen sich alle übrigen zurückführen, z. B. das Quadrat von (φ,ψ). In der That sei

$$\varphi = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2, \qquad \psi = b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2,$$
$$D = a_0a_2 - a_1^2, \quad \Delta = b_0b_2 - b_1^2, \quad \theta = a_0b_2 - 2a_1b_1 + a_2b_0$$

und die Funktionaldeterminante

$$(\varphi,\psi) = \vartheta = (a_0b_1 - a_1b_0)x^2 + (a_0b_2 - a_2b_0)xy + (a_1b_2 - a_2b_1)y^2.$$

Dann kann man schreiben:

$$\vartheta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ y^2 & -xy & x^2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} a_2 & -2a_1 & a_0 \\ b_2 & -2b_1 & b_0 \\ x^2 & 2xy & y^2 \end{vmatrix},$$

also, indem man diese beiden Ausdrücke Reihe für Reihe mit einander multipliziert:

$$24) \qquad \vartheta^2 = -\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 2D & \theta & \varphi \\ \theta & 2\Delta & \psi \\ \varphi & \psi & 0 \end{vmatrix} = -\{D\psi^2 - \theta\psi\varphi + \Delta\varphi^2\}.$$

Diese Formel bleibt natürlich auch unverändert giltig, wenn man zwei Formen φ, ψ von irgend welchen Ordnungen m_1, m_2 zu Grunde legt und unter a_i, b_i die Ausdrücke $\dfrac{1}{m_1(m_1-1)} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^{m_1-i}\partial y^i}$, $\dfrac{1}{m_2(m_2-1)} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^{m_2-i}\partial y^i}$ versteht.

II. Simultane Kovarianten zweier kubischer Formen, φ, ψ.

Die quadratischen Kovarianten der einzelnen Grundformen seien bezüglich durch Δ, ∇, die kubischen durch Q, K bezeichnet

	Ordnung	Grad φ	Grad ψ	
R	0	4	0	Diskriminante von $\varphi = R$
P	0	0	4	Diskriminante von $\psi = \mathsf{P}$
	0	1	1	$(\varphi, \psi)^3 = [\varphi, \psi]$
	0	3	1	durch den Prozess $\theta(R)$
	0	2	2	$\theta\{\theta(R)\} = \theta^2(R)$ oder $(\Delta, \nabla)^2$
	0	1	3	$\theta^3(R)$
	0	3	3	Determinante der drei ersten Kovarianten zweiter Ordnung oder kubische Invariante von (φ, ψ)
	1	2	1	$(\Delta, \psi)^2 = [\Delta, \psi]$
	1	1	2	$(\nabla, \varphi)^2 = [\nabla, \varphi]$
	1	2	3	$(\Delta, \mathsf{K})^2 = [\Delta, \mathsf{K}]$
	1	3	2	$(\nabla, Q)^2 = [\nabla, Q]$
	1	1	4	$(\varphi, \nabla^2)^3 = [\varphi, \nabla^2]$
	1	4	1	$[\psi, \Delta^2]$
	1	3	4	$[Q, \nabla^2]$*
	1	4	3	$[\mathsf{K}, \Delta^2]$*
Δ	2	2	0	Hessesche Form von $\varphi = \Delta$
∇	2	0	2	Hessesche Form von $\psi = \nabla$
H	2	1	1	$(\varphi, \psi)^2 = H$
	2	2	2	(Δ, ∇)
	2	3	1	(Δ, H)
	2	1	3	(∇, H)
φ	3	1	0	φ
ψ	3	0	1	ψ
Q	3	3	0	$Q = (\varphi, \Delta)$
K	3	0	3	$\mathsf{K} = (\psi, \nabla)$
	3	1	2	(φ, ∇)
	3	2	1	(ψ, Δ)
	4	1	1	(φ, ψ)

* Diese beiden bei Clebsch und Gordan (vergl. Clebsch, binäre Formen § 61) noch enthaltenen Formen sind nach Sylvester, Americ. Math. Journal II, auf die übrigen Formen des Systems reducierbar.

III. Simultane Kovarianten zweier Formen vierter Ordnung, φ, ψ.

(Unter Δ ist die Hessesche von φ, unter Δ' die von ψ verstanden, $(\varphi, \Delta) = t$, $(\psi, \Delta') = t'$ gesetzt.)

	Ordnung	Grad φ	Grad ψ	
J_2	0	2	0	$J_2(\varphi) = (\varphi, \varphi)^4 = J_2$
J'_2	0	0	2	$J_2(\psi) = (\psi, \psi)^4 = J'_2$
J_3	0	3	0	$J_3(\varphi) = (\varphi, \Delta)^4 = J_3$
J'_3	0	0	3	$J_3(\psi) = (\psi, \Delta')^4 = J'_3$
	0	2	2	$(\Delta, \Delta')^4$
	0	1	1	$(\varphi, \psi)^4$
	0	2	1	$(\Delta, \psi)^4$
	0	1	2	$(\varphi, \Delta')^4$
	2	1	1	$(\varphi, \psi)^3$
	2	1	2	$(\varphi, \Delta')^3$
	2	2	1	$(\Delta, \psi)^3$
	2	2	2	$(\Delta, \Delta')^3$
	2	3	2	$(\Delta', t)^4 = [\Delta', t]$
	2	2	3	$(\Delta, t')^4 = [\Delta, t']$
	2	1	3	$[\varphi, t']$
	2	3	1	$[\psi, t]$
φ	4	4	0	φ
ψ	4	0	4	ψ
Δ	4	2	0	Δ
Δ'	4	0	2	Δ'
	4	1	1	$(\varphi, \psi)^2$
	4	1	2	$(\varphi, \Delta')^2$
	4	2	1	$(\psi, \Delta)^2$
	4	2	2	$(\Delta, \Delta')^2$ *
t	6	3	0	$(\varphi, \Delta) = t$
t'	6	0	3	$(\psi, \Delta') = t'$
	6	1	2	(φ, Δ')
	6	2	1	(ψ, Δ)
	6	1	1	(φ, ψ)
	6	2	2	(Δ, Δ') *

* Diese beiden bei Gordan, Math. Ann. II pag. 275, enthaltenen Formen sind nach Sylvester reduciebel.

Wir gehen nicht darauf ein zu beweisen, dass das volle System derjenigen Kovarianten, welche nicht als ganze Funktionen niedrigerer Kovarianten darstellbar sind, das hier angeschriebene ist. Die betreffenden Untersuchungen, welche den bei einer Form f erwähnten analog sind, sind ebenfalls von Gordan und neuerdings von Sylvester angestellt. Nach des Letzteren Untersuchungen im American Journal of Mathem. ergiebt sich für die Anzahlen der irreduciebeln Grundformen folgende Tabelle:

	I	II	III	IV
I	3	5	13	20
II		6	15	18
III			26	61
IV				28
ψ				

Hierbei bedeutet die erste Zeile die Ordnung der ersten Form φ, die erste Kolonne die Ordnung der zweiten Form ψ.

Die simultanen Kovarianten finden sich ausgerechnet in den Tabellen am Schlusse des Werkes.

§ 20. Anwendungen der Kovarianten, insbesondere Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen.*

1. Auflösung der kubischen Gleichungen.

Man lege die kubische Form zunächst in ihrem kanonischen Ausdruck zu Grunde, nämlich

1) $$f = px^3 + qy^3$$

und bestimme dafür die quadratische und kubische Kovariante. Erstere, die Hessesche Form, werde durch Δ, letztere durch Q bezeichnet. Man findet

* Wir folgen hier in Bezug auf die Auflösungen im Wesentlichen den von Cayley (Fünftes Memoir upon Quantics) eingeschlagenen Methoden; jedoch in Hinsicht der Darstellung und insbesondere in Bezug auf die Diskussion der Realität der Wurzeln aus den Invarianten und Kovarianten der Formen wesentlich den §§ 38, 44–49, von Clebsch, Binäre Formen, von einigen Beweisen und Hinzufügungen abgesehen, die von Herrn Noether herrühren (pag. 223, 224 etc.).

2) $$\Delta = pq\,xy$$

3) $$Q = pq(px^3 - qy^3).$$

Die Diskriminante, die wir durch R bezeichnen*, nimmt für die kanonische Gleichung 1) die Form an

4) $$R = p^2q^2,$$

so dass

$$\Delta = \sqrt{R}.xy$$

$$Q = \sqrt{R}(px^3 - qy^3).$$

Diese Kovarianten sind, wie man an diesen Formen unmittelbar erkennt (Cayley, fünftes Memoir Phil. Trans. Bd. 148, 1859 pag. 441), durch die Gleichung verbunden

5) $$Q^2 - Rf^2 + 4\Delta^3 = 0,$$

und diese invariante Beziehung gilt auch noch für die allgemeine Form f, welche jetzt behandelt werden soll.

Schreiben wir die Gleichung 5) in der Form

$$-\Delta^3 = \tfrac{1}{4}(Q^2 - Rf^2) = \tfrac{1}{2}(Q + f\sqrt{R}) \cdot \tfrac{1}{2}(Q - f\sqrt{R}),$$

so steht links der Kubus einer Form zweiten Grades, rechts das Produkt zweier kubischen Formen. Jeder der beiden Faktoren

$$\tfrac{1}{2}\{Q + f\sqrt{R}\} \text{ und } \tfrac{1}{2}\{Q - f\sqrt{R}\},$$

die im allgemeinen keinen Faktor gemein haben, ist also ein vollständiger Kubus und die dritte Wurzel aus jedem derselben ist eine lineare Funktion von x, y. Man kann also setzen

7) $$\begin{cases} \xi^3 = \tfrac{1}{2}\{Q + f\sqrt{R}\} \\ \eta^3 = \tfrac{1}{2}\{Q - f\sqrt{R}\}, \end{cases}$$

wodurch die Funktionen ξ und η bis auf dritte Einheitswurzeln vollständig bestimmt sind. Die Kovarianten $f\sqrt{R}$, Δ, Q lassen sich dann durch ξ, η ausdrücken, nämlich

8) $$\begin{cases} f\sqrt{R} = \xi^3 - \eta^3, \\ Q = \xi^3 + \eta^3, \\ \Delta = -\xi\eta, \end{cases}$$

wo man, was ohne Änderung von f geschehen kann, die dritten Wurzeln ξ, η so bestimmt hat, dass die dritte Gleichung besteht.

Ist $f = 0$ und R von Null verschieden, so kann die erste Gleichung 8) in der Form geschrieben werden:

* Clebsch hat bei Δ und R noch gewisse Zahlenfaktoren. Vergl. Binäre Formen § 34.

$$f\sqrt{R} = (\xi - \eta)(\xi - \varepsilon\eta)(\xi - \varepsilon^2\eta) = 0,$$

wo ε, ε^2 die dritten Einheitswurzeln bedeuten, nämlich

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$$
$$\varepsilon^2 = \tfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}),$$

und man findet die drei Wurzeln der kubischen Gleichung $f = 0$ aus den drei linearen Gleichungen

$$\xi - \eta = 0,$$
$$\xi - \varepsilon\eta = 0,$$
$$\xi - \varepsilon^2\eta = 0,$$

oder

$$9) \quad \begin{cases} \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\{Q + f\sqrt{R}\}} - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\{Q - f\sqrt{R}\}} = 0, \\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\{Q + f\sqrt{R}\}} - \varepsilon\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\{Q - f\sqrt{R}\}} = 0, \\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\{Q + f\sqrt{R}\}} - \varepsilon^2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\{Q - f\sqrt{R}\}} = 0. \end{cases}$$

Die Auflösung beruht also auf der Aufsuchung der linearen Faktoren ξ, η von Δ, so dass man hier dieselbe quadratische Resolvente hat, wie bei der Auflösungsmethode § 8, 2, Formel 12).

Ist, unter Voraussetzung realer Koefficienten von f, R positiv, so sind ξ, η real und der erste der drei Ausdrücke 9) ist real, die beiden anderen konjugiert komplex. Ist dagegen R negativ, so werden ξ und η selbst konjugiert komplex und die drei Ausdrücke 9) sind dann, von dem sich weghebenden Faktor i abgesehen, real.

Bei realen Koefficienten hat also die kubische Gleichung drei reale Wurzeln bei negativem R, aber eine reale und zwei konjugiert komplexe Wurzeln bei positivem R.

Ist dagegen

$$R = 0,$$

so wird

$$\xi = \eta$$

und Δ ein vollständiges Quadrat; nämlich

$$\Delta = (a_0a_2 - a_1^2)x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)xy + (a_1a_3 - a_2^2)y^2 = (\beta x - \alpha y)^2.$$

Man hat also

$$a_0a_2 - a_1^2 = \beta^2, \quad a_0a_3 - a_1a_2 = -2\beta\alpha, \quad a_1a_3 - a_2^2 = \alpha^2.$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit a_2, $-a_1$, a_0 und addiert, sodann ebenso mit a_3, $-a_2$, a_1 und addiert, so folgt:

$$0 = a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha\beta + a_2\beta^2,$$
$$0 = a_1\alpha^2 + 2a_2\alpha\beta + a_3\beta^2,$$

d. h. die partiellen Differentialquotienten von

$$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$$

verschwinden für $\frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\beta}$. Man hat also den Satz:

Für $R = 0$ wird Δ zum Quadrat eines linearen Ausdrucks, Q (nach 7) zum Kubus desselben linearen Ausdrucks, und f enthält denselben Ausdruck als Doppelfaktor.

Verschwindet aber auch Δ, also auch Q, identisch, so hat man

$$a_0a_2 - a_1^2 = 0, \quad a_0a_3 - a_1a_2 = 0, \quad a_1a_3 - a_2^2 = 0,$$

d. h.

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3},$$

wonach also f ein vollständiger Kubus wird, d. h.:

Bei identischem Verschwinden von Δ hat f einen dreifachen Faktor.

2. Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

Man lege zunächst den kanonischen Ausdruck der biquadratischen Form zu Grunde, nämlich

10) $$f = x^4 + 6px^2y^2 + y^4.$$

Die Invarianten J_2 und J_3 und die Diskriminante R der Form f können dann durch den Parameter p ausgedrückt werden wie folgt:

11) $$\begin{cases} J_2 = 1 + 3p^2, \\ J_3 = p(1 - p^2), \\ R = (1 - 9p^2)^2 = J_2^3 - 27J_3^2. \end{cases}$$

Ferner werden die Werte der Kovarianten H* und T für die kanonische Form f nach den Tabellen am Schlusse des Werks:

12) $$H = px^4 + (1 - 3p^2)x^2y^2 + py^4,$$

13) $$T = \tfrac{1}{8}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}\right\} = \sqrt{R}\,(x^4 - y^4)xy.$$

Für das Quadrat von T ergiebt sich hieraus

14) $$T^2 = Rx^2y^2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)(x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = \\ = Rx^2y^2\{f - 2x^2y^2(1 + 3p)\}\{f + 2x^2y^2(1 - 3p)\}.$$

Bedenkt man nun, dass 12) wird

12a) $$H = pf + x^2y^2\sqrt{R},$$

so geht 14) über in

---

* Bei Clebsch $\frac{1}{4}H$.

$$T^2 = \frac{H-pf}{\sqrt{R}}\{f\sqrt{R}-2(1+3p)(H-pf)\}\cdot\{f\sqrt{R}+2(1-3p)(H-pf)\},$$

oder mit Rücksicht auf die Relation

$$(1+3p)(1-3p) = \sqrt{R}$$

15) $$T^2 = (H-pf)\{(1-3p)f-2(H-pf)\}\{(1+3p)f+2(H-pf)\}.$$

Die Entwicklung dieses Ausdrucks führt auf die von Cayley entdeckte Gleichung

16) $$-T^2 = J_3 f^3 - J_2 f^2 H + 4H^3,^*$$

durch welche die Grundformen der Form f verbunden sind.

Diese Relation 16) ist, als Relation zwischen den Invarianten und Kovarianten von f, invariant und bleibt also auch für die allgemeine biquadratische Form f bestehen. Sie bildet die Grundlage für die Auflösung der allgemeinen Gleichung $f=0$, mit der wir uns weiterhin beschäftigen.

Anmerkung 1. Schreibt man die Kovariante sechster Ordnung T in der Form

$$T = C_0 x^6 + 6C_1 x^5 y + \ldots + C_6,$$

so gilt für die quadratische Invariante der Form T die Identität

17) $$C_0 C_6 - 6C_1 C_5 + 15C_2 C_4 - 10C_3^2 = \tfrac{1}{6} R,$$

die unmittelbar aus 13) folgt, wenn man für diese Form die quadratische Invariante bildet. Man erhält aus dem in den Tabellen gegebenen Ausdruck für T noch eine Reihe identischer quadratischer Relationen zwischen den C, welche die spezielle Form sechster Ordnung T charakterisieren. (Clebsch, Binäre Formen § 110.) Wir gebrauchen dieselben jedoch im folgenden nicht.

Anmerkung 2. Die Gleichung 16) kann durch eine einfache Substitution so umgeformt werden, dass ihre eine Seite in die linke Seite der § 9, 1 Formel 6) aufgestellten kubischen Resolvente von f** übergeht. Man braucht nur

$$\frac{2H}{f} = \lambda$$

zu setzen, so folgt

18) $$\Omega(\lambda) = \lambda^3 - J_2\lambda + 2J_3 = -\frac{2T^2}{f^3},$$

was mit Formel 6) in § 9, 1 übereinstimmt.

---

* Bei Clebsch: $T^2 = -\frac{1}{4}\left\{H^3 - \frac{i}{2}Hf^2 + \frac{j}{3}f^3\right\}$.

** Bei Clebsch: $\Omega(\varkappa, \lambda) = \varkappa^3 - \frac{i}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{j}{3}\lambda^3$.

Man hat auch aus 11)

$$\frac{J_2^3}{J_3^2} = \frac{(1+3p^2)^3}{p^2(1-p^2)^2}.$$

Der Ausdruck $\frac{J_2^3}{J_3^2}$ hat aber die Eigenschaft, bei beliebiger linearer Transformation überhaupt ungeändert zu bleiben und wird deshalb eine

absolute Invariante

genannt. Denn durch eine Substitution vom Modul Δ wird

$$\Delta^4 J_2 = J'_2; \quad \Delta^6 J_3 = J'_3,$$

woraus

$$\frac{J_2^3}{J_3^2} = \frac{J'^3_2}{J'^2_3}.$$

Man erhält also, wenn man die Invarianten und Kovarianten in Bezug auf die kanonische Form wie oben, die in Bezug auf die allgemeine Form f hier mit einem Strich bezeichnet:

18a) $$\frac{J'^3_2}{J'^2_3} = \frac{(1+3p^2)^3}{p^2(1-p^2)^2},$$

18b) $$\Delta^2 = \frac{1+3p^2}{p(1-p^2)} \cdot \frac{J'_3}{J'_2}.$$

Diese Gleichungen liefern, wenn die allgemeine Form f gegeben ist, den Parameter p der kanonischen Form und hieraus den Modul Δ, d. h. die Determinante der beiden linearen Funktionen x, y, welche in der kanonischen Form 10) die Variabeln werden. Setzt man in 18a):

18c) $$p^2 = \frac{J'_2 m + 2J'_3}{J'_2 m - 6J'_3},$$

also

$$J_2 = 1+3p^2 = \frac{4J'_2 m}{J'_2 m - 6J'_3},$$

$$\frac{J_3}{p} = 1-p^2 = \frac{-8J'_3}{J'_2 m - 6J'_3},$$

so folgt

18d) $$\Omega(m) = 0,$$

18e) $$\Delta^2 = -\frac{m}{2p},$$

und man findet auch p aus 18d) und 18c), sodann Δ aus 18e).

Die linearen Ausdrücke x, y oder vielmehr x^2, y^2 selbst ergeben sich dann aus den aus 10) und 12a) hervorgehenden Gleichungen:

$$H' + \frac{m}{2} f' = (1 - 9p^2)\, \Delta^2 . x^2 y^2 ,$$

$$2(1 - 3p) H' + (1 - 2p - 3p^2)\, \Delta^2 f' = (1 - 9p^2)\, \Delta^2 . (x^2 + y^2)^2 ,$$

$$-2(1 + 3p) H' + (1 + 2p - 3p^2)\, \Delta^2 f' = (1 - 9p^2)\, \Delta^2 (x^2 - y^2)^2 .$$

Diese Darstellungen treten hier an Stelle der in § 9, 1 gegebenen.

Anmerkung 3. Bezeichnet man die erzeugenden Koefficienten der Kovarianten H und T bezüglich durch

$$H_0 = a_0 a_2 - a_1^2 ,$$
$$T_0 = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3 ,$$

so gilt die Relation

19) $$-T_0^2 = 4 H_0^3 - a_0^2 J_2 H_0 + a_0^3 J_3 ,$$

aus der umgekehrt vermöge der partiellen Differentialgleichungen der Wert von T^2, also die Relation 16) abgeleitet werden kann.*

Anmerkung 4. Man bilde unter Zugrundelegung von 12) die Hessesche Form von H, das selbst Hessesche Form von f ist, und bezeichne die neue Form durch H'. Dann ist

$$36 H' = \begin{vmatrix} 6px^2 + (1 - 3p^2) y^2 & 2(1 - 3p^2) xy \\ 2(1 - 3p^2) xy & (1 - 3p^2) x^2 + 6py^2 \end{vmatrix} =$$
$$= 6p(1 - 3p^2)(x^4 + y^4) + \{36p^2 - 3(1 - 3p^2)^2\} x^2 y^2 ,$$

was mit Berücksichtigung der Formeln 10) und 12a) übergeht in

$$12 H' = 3p(1 - p^2) f - (1 + 3p^2) H$$

und mit Beachtung von 11) in

20) $$12 H' = 3 J_3 f - J_2 H .$$

Also hängt die Hessesche Form der Hesseschen Form von f linear von f und H ab.

3. Die Auflösung der allgemeinen biquadratischen Gleichung $f = 0$ kann auf die Auflösung einer kubischen Resolvente zurückgeführt werden. Man erhält dieselbe, wenn man in 16)

$$\frac{2H}{f} = \lambda$$

substituiert, wodurch

21) $$\Omega(\lambda) = \lambda^3 - J_2 \lambda + 2 J_3 = -\frac{2 T^2}{f^3}$$

wird. Die Wurzeln der kubischen Gleichung

22) $$\Omega(\lambda) = 0$$

mögen durch

---

* M. Roberts, Quarterly Journal IV.

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3$$

bezeichnet werden. Alsdann zerfällt die linke Seite der Gleichung 21) in drei Faktoren, nämlich

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = -\frac{2T^2}{f^3},$$

die mit Berücksichtigung des Wertes für $\lambda = \frac{2H}{f}$ übergeht in

23) $$-\frac{T^2}{4} = (H - \tfrac{1}{2}f\lambda_1)(H - \tfrac{1}{2}f\lambda_2)(H - \tfrac{1}{2}f\lambda_3).$$

Aus 23) ersieht man, dass das Produkt

$$\left(H - \frac{f}{2}\lambda_1\right)\left(H - \frac{f}{2}\lambda_2\right)\left(H - \frac{f}{2}\lambda_3\right)$$

das vollständige Quadrat eines Ausdrucks von der sechsten Ordnung ist. Da nun die drei biquadratischen Faktoren unter einander im allgemeinen keinen linearen Faktor, der gleichzeitig gemeinsamer Faktor von f und H sein müsste, gemein haben, so muss jeder derselben für sich allein das vollständige Quadrat eines quadratischen Ausdrucks sein und man kann daher drei quadratische Formen φ, ψ, χ finden, so dass

24)
$$\begin{cases} H - \frac{f}{2}\lambda_1 = -\varphi^2, \\ H - \frac{f}{2}\lambda_2 = -\psi^2, \\ H - \frac{f}{2}\lambda_3 = -\chi^2. \end{cases}$$

25) $$T = 2\varphi\psi\chi.$$

Ist nun einer der biquadratischen Faktoren in 23) von der Form

$$K = b_0x^4 + 4b_1x^3y + 6b_2x^2y^2 + 4b_3xy^3 + b_4y^4$$

und gleich dem Quadrat des Ausdrucks

$$\varphi = \alpha_0x^2 + 2\alpha_1xy + \alpha_2y^2,$$

so hat man die Identitäten

$$\begin{aligned} b_0 &= \alpha_0^2, \\ b_1 &= \alpha_0\alpha_1, \\ b_2 &= \tfrac{1}{3}(\alpha_0\alpha_2 + 2\alpha_1^2), \\ b_3 &= \alpha_1\alpha_2, \\ b_4 &= \alpha_2^2, \end{aligned}$$

vermöge deren die Koefficienten α_0, α_1, α_2 durch die Koefficienten von K, bis aufs Vorzeichen, ausgedrückt werden können. Die Formen

$$26) \qquad \begin{cases} \varphi = \sqrt{\frac{f}{2}\lambda_1 - H}, \\ \psi = \sqrt{\frac{f}{2}\lambda_2 - H}, \\ \chi = \sqrt{\frac{f}{2}\lambda_3 - H} \end{cases}$$

sind also in jedem Fall einfach bestimmbar. Bezüglich der Vorzeichen ist zu bemerken, dass dasselbe bei zweien willkürlich, bei der dritten Form durch die von uns angenommene Gleichung $T = 2\varphi\psi\chi$ gegeben ist.

Die Bestimmung von f aus je zwei der Gleichungen 24) liefert dann die drei möglichen Zerlegungen von f in das Produkt zweier quadratischer Faktoren.

4. Versuchen wir direkt die Aufgabe zu lösen, eine biquadratische Form f in zwei quadratische Faktoren zu zerlegen.

Schreibt man f in der Form des Produktes

$$27) \qquad f = (\alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 xy + \alpha_2 y^2)(\beta_0 x^2 + 2\beta_1 xy + \beta_2 y^2)$$

und vergleicht die Koefficienten beiderseits, so findet man identisch

$$28) \qquad \begin{cases} a_0 = \alpha_0\beta_0, \\ 2a_1 = \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0, \\ 6a_2 = \alpha_0\beta_2 + 4\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0, \\ 2a_3 = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1, \\ a_4 = \alpha_2\beta_2. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 = 2a_2 + 2\lambda,$$

also

$$\alpha_1\beta_1 = a_2 - \frac{\lambda}{2}$$

und schreibt das System 28) folgendermassen:

$$29) \qquad \begin{cases} a_0 a_4 = \alpha_0\beta_2 \cdot \alpha_2\beta_0, \\ a_0\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right) = \alpha_0\beta_1 \cdot \alpha_1\beta_0, \\ a_4\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right) = \alpha_1\beta_2 \cdot \alpha_2\beta_1, \\ 2(a_2 + \lambda) = \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0, \\ 2a_1 = \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0, \\ 2a_3 = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1, \end{cases}$$

so sind

$$\alpha_0\beta_2,\ \alpha_2\beta_0;\quad \alpha_0\beta_1,\ \alpha_1\beta_0;\quad \alpha_1\beta_2,\ \alpha_2\beta_1$$

bezüglich die Wurzeln der Gleichungen

30)
$$\begin{cases} \varrho^2 - 2(a_2+\lambda)\varrho + a_0 a_4 = 0, \\ \sigma^2 - 2a_1\sigma + a_0\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right) = 0, \\ \tau^2 - 2a_3\tau + a_4\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Nun verschwindet identisch die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_0\beta_0+\alpha_0\beta_0 & \alpha_1\beta_0+\alpha_0\beta_1 & \alpha_2\beta_0+\alpha_0\beta_2 \\ \alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0 & \alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2 \\ \alpha_0\beta_2+\alpha_2\beta_0 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2+\alpha_2\beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzt man für die Elemente derselben ihre Werte aus 28) und 29) und dividiert durch 4, so erhält man wieder die Gleichung für λ:

31)
$$0 = 2 \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2+\lambda \\ a_1 & a_2 - \frac{\lambda}{2} & a_3 \\ a_2+\lambda & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \lambda^3 - J_2\lambda + 2J_3 = \Omega(\lambda).$$

Mit Hilfe der Gleichungen 29) kann nun die Zerlegung der biquadratischen Form in folgender Weise bewerkstelligt werden: Man setze zur Abkürzung für die Wurzeln des Systems 30) bezüglich

32)
$$\begin{cases} \alpha_0\beta_2 = \varrho_1, & \alpha_2\beta_0 = \varrho_2, \\ \alpha_0\beta_1 = \sigma_1, & \alpha_1\beta_0 = \sigma_2, \\ \alpha_1\beta_2 = \tau_1, & \alpha_2\beta_1 = \tau_2. \end{cases}$$

Man hat alsdann für f die Darstellungen

33) $$a_0 f = [a_0x^2 + 2\sigma_1 xy + \varrho_1 y^2][a_0x^2 + 2\sigma_2 xy + \varrho_2 y^2],$$

34) $$\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)f = \left[\sigma_1 x^2 + 2\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)xy + \tau_2 y^2\right]\left[\sigma_2 x^2 + 2\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)xy + \tau_1 y^2\right],$$

35) $$a_4 f = [\varrho_1 x^2 + 2\tau_1 xy + a_4 y^2][\varrho_2 x^2 + 2\tau_2 xy + a_4 y^2].$$

Das System 30) liefert nun für ϱ, σ, τ die Werte

36)
$$\begin{cases} \varrho_1 = a_2 + \lambda + \sqrt{(a_2+\lambda)^2 - a_0 a_4}, \\ \varrho_2 = a_2 + \lambda - \sqrt{(a_2+\lambda)^2 - a_0 a_4}, \\ \sigma_1 = a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_0\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)}, \\ \sigma_2 = a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_0\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)}, \\ \tau_1 = a_3 + \sqrt{a_3^2 - a_4\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)}, \\ \tau_2 = a_3 - \sqrt{a_3^2 - a_4\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)}, \end{cases}$$

wo λ eine Wurzel der Gleichung $\Omega(\lambda) = 0$ bedeutet. Der Zusammenhang unter den Quadratwurzeln in 36) ist aus den Relationen zu erkennen, die aus 36) und 29) folgen, nämlich

$$4\sqrt{(a_2+\lambda)^2 - a_0 a_4}\cdot\sqrt{a_1^2 - a_0\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)} = 4(\varrho_1 - a_2 - \lambda)(\sigma_1 - a_1) =$$
$$= (\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0)(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0) = (\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0)(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0) -$$
$$- 2\alpha_0\beta_0(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = 4(a_2+\lambda)a_1 - 4a_0 a_3,$$

und ebenso für σ_1, τ_1 und ϱ_1, τ_1, nämlich

36a)
$$\begin{cases} \sqrt{(a_2+\lambda)^2 - a_0 a_4}\cdot\sqrt{a_1^2 - a_0\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)} = (\varrho_1 - a_2 - \lambda)(\sigma_1 - a_1) = \\ \qquad = (a_2+\lambda)a_1 - 4a_0 a_3, \\ \sqrt{a_1^2 - a_0\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)}\cdot\sqrt{a_3^2 - a_4\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)} = (\sigma_1 - a_1)(\tau_1 - a_3) = \\ \qquad = -a_1 a_3 + \left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)(a_2+\lambda), \\ \sqrt{(a_2+\lambda)^2 - a_0 a_4}\cdot\sqrt{a_3^2 - a_4\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)} = (\varrho_1 - a_2 - \lambda)(\tau_1 - a_3) = \\ \qquad = (a_2+\lambda)a_3 - a_4 a_0. \end{cases}$$

Hiernach kann nur das Vorzeichen einer der Quadratwurzeln, etwa in ϱ_1, willkürlich genommen werden; aber eine Änderung dieses Vorzeichens vertauscht nur die beiden quadratischen Faktoren von f unter sich.

Für eine bestimmte Wurzel λ stellen die drei Gleichungen 33), 34), 35) nur verschiedene Formen einer und derselben Zerlegung von f vor. Man kann aber die Zerlegung immer so vornehmen, dass beide Faktoren von f real werden. In der That lässt sich auch immer wenigstens eine reale Wurzel λ von 31) so bestimmen, dass ϱ_1, d. h. $\sqrt{(a_2+\lambda)^2 - a_0 a_4}$ real wird. Zu dem Zwecke muss sein:

$$(a_2+\lambda)^2 \geqq a_0 a_4.$$

Haben nun a_0 und a_4 entgegengesetzte Vorzeichen, so genügt jede reale Wurzel von 31). Ist aber $a_0 a_4$ positiv, so soll werden:

$$\lambda \geqq \sqrt{a_0 a_4} - a_2$$

oder

$$\lambda \leqq -\sqrt{a_0 a_4} - a_2.$$

Nun ist

$$\tfrac{1}{2}a_0\Omega(\lambda) = \{(a_2+\lambda)^2 - a_0 a_4\}\left\{a_1^2 - a_0\left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)\right\} - \{a_1(a_2+\lambda) - a_0 a_3\}^2,$$

also

$$\tfrac{1}{2}a_0\Omega(\pm\sqrt{a_0 a_4} - a_2) = -(a_1\sqrt{a_0 a_4} - a_0 a_3)^2,$$

d. h. $\Omega(\lambda)$ hat für die beiden Werte $\pm\sqrt{a_0 a_4} - a_2$ gleiches Vorzeichen, verschwindet also dazwischen nullmal oder zweimal, und wenigstens eine reale Wurzel λ muss ausserhalb dieser beiden Werte liegen, wie behauptet wurde.

Die drei Wurzeln der Gleichung

$$\Omega(\lambda) = 0$$

sind aber gegeben durch

$$37) \quad \begin{cases} -\lambda_1 = \sqrt[3]{J_3 + \frac{1}{9}(\varepsilon - \varepsilon^2)\sqrt{R}} + \sqrt[3]{J_3 - \frac{1}{9}(\varepsilon - \varepsilon^2)\sqrt{R}}, \\ -\lambda_2 = \varepsilon\sqrt[3]{J_3 + \frac{1}{9}(\varepsilon - \varepsilon^2)\sqrt{R}} + \varepsilon^2\sqrt[3]{J_3 - \frac{1}{9}(\varepsilon - \varepsilon^2)\sqrt{R}}, \\ -\lambda_3 = \varepsilon^2\sqrt[3]{J_3 + \frac{1}{9}(\varepsilon - \varepsilon^2)\sqrt{R}} + \varepsilon\sqrt[3]{J_3 - \frac{1}{9}(\varepsilon - \varepsilon^2)\sqrt{R}}, \end{cases}$$

wo

$$\sqrt[3]{J_3 + \tfrac{1}{9}(\varepsilon - \varepsilon^2)\sqrt{R}} \cdot \sqrt[3]{J_3 - \tfrac{1}{9}(\varepsilon - \varepsilon^2)\sqrt{R}} = \tfrac{1}{3}J_2,$$

$R = J_2^3 - 27J_3^2$, die Diskriminante der biquadratischen Form f bedeutet und $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ ist.

Die Zerlegungen von f folgen auch, wie am Schlusse von Nr. 3 erwähnt wurde, unmittelbar aus den Gleichungen 24)

$$-\varphi^2 = H - \frac{f}{2}\lambda_1,$$

$$-\psi^2 = H - \frac{f}{2}\lambda_2,$$

$$-\chi^2 = H - \frac{f}{2}\lambda_3,$$

die für f die Darstellungen liefern:

$$38) \quad \begin{cases} f = \dfrac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\varphi^2 - \psi^2) = \dfrac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\varphi - \psi)(\varphi + \psi), \\ f = \dfrac{2}{\lambda_1 - \lambda_3}(\varphi^2 - \chi^2) = \dfrac{2}{\lambda_1 - \lambda_3}(\varphi - \chi)(\varphi + \chi), \\ f = \dfrac{2}{\lambda_2 - \lambda_3}(\psi^2 - \chi^2) = \dfrac{2}{\lambda_2 - \lambda_3}(\psi - \chi)(\psi + \chi). \end{cases}$$

Stellt man die folgenden vier Gleichungssysteme zusammen:

$$39) \quad \begin{cases} \text{I.} & \varphi - \psi = 0, & \varphi - \chi = 0, & \psi - \chi = 0, \\ \text{II.} & \varphi - \psi = 0, & \varphi + \chi = 0, & \psi + \chi = 0, \\ \text{III.} & \varphi + \psi = 0, & \varphi - \chi = 0, & \psi + \chi = 0, \\ \text{IV.} & \varphi + \psi = 0, & \varphi + \chi = 0, & \psi - \chi = 0, \end{cases}$$

so sind die linearen Faktoren, welche je den drei Gleichungen dieser vier Systeme gemeinsam sind, identisch mit den vier linearen Faktoren von f, durch deren Verschwinden die Wurzeln der Gleichung $f = 0$ gefunden werden.

5. Eine andere Auflösungsmethode der biquadratischen Gleichung $f=0$ geht darauf aus, die zuletzt genannten linearen Faktoren von f wirklich anzugeben und knüpft an das Verhalten der drei quadratischen Formen φ, ψ, χ an. Es ist offenbar möglich, das Quadrat jedes linearen Ausdrucks als lineare Funktion der drei Formen φ, ψ, χ darzustellen und wir wollen diese Darstellung für die linearen Faktoren von f leisten.

Zunächst untersuchen wir die Funktionaldeterminanten aus je zweien der Formen φ, ψ, χ. Hierfür liefern die Gleichungen 24) und 25)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\lambda_1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\lambda_1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\lambda_2}{2}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\lambda_2}{2}\frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 4\varphi\psi \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2) \begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -4(\lambda_1-\lambda_2)T = -8(\lambda_1-\lambda_2)\varphi\psi\chi,$$

also

$$40) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2(\lambda_2-\lambda_1)\chi$$

und ebenso:

$$40a) \qquad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial y}-\frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial x} = 2(\lambda_3-\lambda_2)\varphi, \\ \frac{\partial \chi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2(\lambda_1-\lambda_3)\psi. \end{cases}$$

Nun ist der lineare Faktor von f, welcher nach 39) I. auch in den beiden quadratischen Formen

$$\varphi-\psi, \quad \psi-\chi$$

enthalten ist, nach § 6 Nr. 5 zugleich Doppelfaktor der Funktionaldeterminante U_1 von $\varphi-\psi$, $\psi-\chi$, so dass also U_1 das gesuchte Quadrat des linearen Faktors von f wird. Man erhält aber für U_1 nach 40) und 40a)

$$U_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}-\frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$= 2\{(\lambda_2-\lambda_1)\chi+(\lambda_1-\lambda_3)\psi+(\lambda_3-\lambda_2)\varphi\};$$

und analog für die weiteren linearen Faktoren von f.

Man kann auch nachträglich verifizieren*, dass U_1 ein vollständiges Quadrat eines linearen Faktors von f wird. Denn setzt man eine Wurzel von $f=0$ ein, so wird

$$\varphi-\psi=0, \quad \varphi-\chi=0,$$

also

$$U_1=2\varphi\{(\lambda_2-\lambda_1)+(\lambda_1-\lambda_3)+(\lambda_3-\lambda_2)\}=0.$$

Aber man hat aus 24) die Identität:

$$(\lambda_2-\lambda_1)\chi^2+(\lambda_1-\lambda_3)\psi^2+(\lambda_3-\lambda_2)\varphi^2=0,$$

also auch

$$(\lambda_2-\lambda_1)\chi\,d\chi+(\lambda_1-\lambda_3)\psi\,d\psi+(\lambda_3-\lambda_2)\varphi\,d\varphi=0$$

und für $\varphi-\psi=0$, $\varphi-\chi=0$

$$(\lambda_2-\lambda_1)\,d\chi+(\lambda_1-\lambda_3)\,d\psi+(\lambda_3-\lambda_2)\,d\varphi=\tfrac{1}{2}dU_1=0,$$

so dass U_1 für die eine Wurzel von f doppelt verschwindet.

Die linearen Faktoren von f sind nun der Reihe nach, wie sie aus 39) sich ergeben:

41)
$$\begin{cases} \text{I.} & \sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)\varphi+(\lambda_1-\lambda_3)\psi+(\lambda_2-\lambda_1)\chi}, \\ \text{II.} & \sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)\varphi+(\lambda_1-\lambda_3)\psi-(\lambda_2-\lambda_1)\chi}, \\ \text{III.} & \sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)\varphi-(\lambda_1-\lambda_3)\psi+(\lambda_2-\lambda_1)\chi}, \\ \text{IV.} & \sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)\varphi-(\lambda_1-\lambda_3)\psi-(\lambda_2-\lambda_1)\chi}, \end{cases}$$

oder zusammenfassend

41a) $$Mf=\Pi\left\{\sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)\sqrt{\tfrac{\lambda_1}{2}f-H}+(\lambda_1-\lambda_3)\sqrt{\tfrac{\lambda_2}{2}f-H}+(\lambda_2-\lambda_1)\sqrt{\tfrac{\lambda_3}{2}f-H}}\right\},$$

wo M eine Konstante und das Produkt Π über die vier Zeichenkombinationen der unter dem Hauptwurzelzeichen stehenden Quadratwurzeln zu erstrecken ist. Die Konstante M bestimmt man durch eine spezielle Annahme für die Variabeln, z. B. dadurch, dass man Werte annimmt, für welche H verschwindet.

Es folgt dann unmittelbar

41b) $$M=\tfrac{1}{2}\Pi\{\sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)}\sqrt{\lambda_1}+(\lambda_1-\lambda_3)\sqrt{\lambda_2}+(\lambda_2-\lambda_1)\sqrt{\lambda_3}\}.$$

Anmerkung. Es hat noch ein Interesse, die zwischen den φ, ψ, χ bestehenden Relationen anzugeben. Man kann dieselben finden, indem man die Bedingungen aufstellt, dass die Diskriminanten der vier quadratischen Funktionen U_1, U_2, U_3, U_4 verschwinden. Zieht man je zwei der so entstehenden vier Gleichungen von einander ab, so ergiebt sich, wenn A_{01}, A_{02}, A_{12} die simultanen Invarianten bezüglich von

* Darboux, Liouville Journal Bd. 38.

$$\varphi, \psi; \quad \varphi, \chi; \quad \psi, \chi$$

sind,

$$(\lambda_2 - \lambda_3) A_{01} + (\lambda_1 - \lambda_2) A_{12} = 0,$$
$$(\lambda_2 - \lambda_3) A_{02} + (\lambda_3 - \lambda_1) A_{12} = 0,$$
$$(\lambda_3 - \lambda_1) A_{01} + (\lambda_1 - \lambda_2) A_{02} = 0,$$

woraus

$$A_{01} = A_{02} = A_{12} = 0.$$

6. Diskussion der Wurzeln von $f = 0$.

I. Die kubische Resolvente $\Omega = 0$ habe eine reale Wurzel λ_1 und zwei konjugiert komplexe Wurzeln λ_2 und λ_3. Dieser Fall tritt nach Nr. 1 dieses Paragraphen ein, sobald die Diskriminante $R = J_2^3 - 27 J_3^2$ negativ wird. Die Formen ψ und χ sind dann nach 26) konjugiert komplex, während φ zufolge der Gleichung 25)

42) $$T = 2\varphi\psi\chi$$

real ist. Setzt man daher

$$\psi = u + iv, \quad \chi = u - iv, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

so geht das System 39) über in

$$\text{I.} \quad \varphi - u = 0, \quad v = 0,$$
$$\text{II.} \quad \varphi - iv = 0, \quad u = 0,$$
$$\text{III.} \quad \varphi + iv = 0, \quad u = 0,$$
$$\text{IV.} \quad \varphi + u = 0, \quad v = 0.$$

Nun können aber u und v nicht zugleich verschwinden, weil ψ und χ keinen Faktor gemein haben. Daher haben II. und III. je eine gemeinsame Lösung von komplexer, I. und IV. je eine gemeinsame Lösung von realer Form. Wir haben also den Satz:

Ist R negativ, so hat die biquadratische Gleichung zwei reale und zwei konjugiert komplexe Wurzeln.

II. Die kubische Resolvente $\Omega = 0$ habe drei reale Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Dies tritt ein, wenn die Diskriminante $R = J_2^3 - 27 J_3^2$ positiv ist.

Die Ausdrücke

$$\varphi^2, \quad \psi^2, \quad \chi^2$$

sind alsdann real. Die Formen φ, ψ, χ selbst sind dann entweder sämtlich real oder zwei derselben haben den Faktor $i = \sqrt{-1}$, und zur Entscheidung zwischen diesen beiden Fällen braucht man offenbar nur ein einziges, aber beliebiges, reales Wertsystem von x, y in φ, ψ, χ einzusetzen. In ersterem Fall sind alle gemeinsamen Lösungen von 39) ebenfalls real und die biquadratische Gleichung $f = 0$ hat vier reale

Wurzeln. Im anderen Fall, wenn ψ und χ mit dem Faktor i behaftet sind, etwa

$$\psi = i\psi', \quad \chi = i\chi',$$

gehen die Gleichungen des Systems 39) über in

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && \varphi - i\psi' = 0, && \varphi - i\chi' = 0, && \psi' - \chi' = 0,\\
&\text{II.} && \varphi - i\psi' = 0, && \varphi + i\chi' = 0, && \psi' + \chi' = 0,\\
&\text{III.} && \varphi + i\psi' = 0, && \varphi - i\chi' = 0, && \psi' + \chi' = 0,\\
&\text{IV.} && \varphi + i\psi' = 0, && \varphi + i\chi' = 0, && \psi' - \chi' = 0;
\end{aligned}$$

und alle gemeinsamen Lösungen der Gleichungen 39) sind imaginär, also auch sämtliche Wurzeln von $f = 0$. Wir haben also ferner den Satz:

Ist $R = J_2^3 - 27J_3^2$ positiv, so hat die Gleichung $f = 0$ entweder vier reale oder vier komplexe Wurzeln.

Um die Bedingungen festzustellen, unter denen diese beiden Fälle eintreten, bilde man die kubische Gleichung, deren Wurzeln φ^2, ψ^2, χ^2 sind. Dieselbe lautet nach 24)

$$\begin{aligned}
0 &= (z - \varphi^2)(z - \psi^2)(z - \chi^2) =\\
&= \left\{(z + H) - \lambda_1 \frac{f}{2}\right\}\left\{(z + H) - \lambda_2 \frac{f}{2}\right\}\left\{(z + H) - \lambda_3 \frac{f}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Identitäten

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = -J_2, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2J_3$$

und ausserdem die Relation 23)

$$-\frac{T^2}{4} = \left(H - \frac{\lambda_1}{2} f\right)\left(H - \frac{\lambda_2}{2} f\right)\left(H - \frac{\lambda_3}{2} f\right),$$

so ergiebt sich für z die Gleichung

$$43) \qquad z^3 + 3Hz^2 + \left(3H^2 - J_2\frac{f^2}{4}\right)z - \frac{T^2}{4} = 0.$$

Diese Gleichung hat drei reale Wurzeln, und zwar drei positive, wenn $f = 0$ vier reale Wurzeln, zwei negative und eine positive, wenn $f = 0$ vier komplexe Wurzeln hat. Im ersteren Fall muss aber H negativ, $3H^2 - J_2\frac{f^2}{4}$ positiv sein, im anderen Fall muss irgend eine andere der drei weiteren Zeichenkombinationen von H und $3H^2 - \frac{1}{4}J_2 f^2$ eintreten, und zwar braucht dies nur für irgend ein reales Wertsystem von x, y zu geschehen, um für alle realen Werte von x, y einzutreten.*

* Diese wesentliche Bemerkung, die bei Clebsch fehlt, ist von Herrn Noether gemacht worden (briefliche Mittheilung vom 3. Februar 1881). Sie betrifft einen Punkt, der bisher in der Theorie der biquadratischen Gleichungen nicht erledigt war. Zugleich ist dadurch der in der Anmerkung ausgesprochene Satz gewonnen worden.

Wir haben also schliesslich den Satz:

Ist $R = J_2^3 - 27J_3^2$ positiv, so betrachte man die Formen H und $H^2 - \frac{1}{12}J_2 f^2$ für **irgend ein reales** Wertsystem von x, y. Ist für dieses zu gleicher Zeit H negativ, $H^2 - \frac{1}{12}J_2 f^2$ positiv, so hat die Gleichung $f = 0$ vier reale Würzeln; wenn nicht, so hat $f = 0$ vier komplexe Wurzeln.

Anmerkung. Da für vier reale Wurzeln von $f = 0$ die Funktion H, für reale Wertsysteme von x, y, immer negativ sein muss, so folgt noch der Satz, der aber nicht umkehrbar ist:

Hat die Gleichung $f = 0$ vier verschiedene reale Wurzeln, so hat die Gleichung $H = 0$ vier komplexe Wurzeln.

7. Besondere Fälle. Es erübrigt noch die Betrachtung der Fälle, in denen R, J_2, J_3 u. s. w. verschwinden.

I. Nehmen wir zunächst $R = J_2^3 - 27J_3^2 = 0$ an. Dadurch wird angezeigt, dass die kubische Resolvente

$$\Omega = 0$$

zwei gleiche Wurzeln hat. Sei daher $\lambda_3 = \lambda_2$, so dass λ_2 eine Doppelwurzel, λ_1 eine einfache Wurzel von $\Omega = 0$, λ_2 aber sei verschieden von λ_1. Weil

$$R = J_2^3 - 27J_3^2 = 0,$$

so zerfällt die Gleichung Ω, nämlich

$$\Omega = \left(\lambda - \frac{3J_3}{J_2}\right)^2 \left(\lambda + \frac{6J_3}{J_2}\right),$$

so dass

$$44) \qquad \lambda_1 = -\frac{6J_3}{J_2}, \quad \lambda_2 = \frac{3J_3}{J_2}.$$

Nach 26) ist alsdann

$$\chi = \psi,$$

so dass in diesem Fall nach Nr. 5 die Funktionaldeterminante U_2 von $\varphi - \psi$, $\varphi + \psi$, d. h. die von φ, ψ, also nach 40) χ oder die Form ψ selbst das Quadrat einer linearen Funktion ist. Die Form $\psi\,(= \chi)$ kann aber auch identisch verschwinden.

a) Nehmen wir zunächst $\psi = \chi$ von Null verschieden an. Dann kann man setzen

$$\chi = \psi = \xi^2$$

oder

$$\tfrac{1}{2} f\lambda_2 - H = \xi^4,$$

d. h. eine gewisse lineare Funktion von f und H ist die vierte Potenz einer linearen Form. Da ferner auch die Funktionaldeterminante von φ und ψ durch ξ^2 teilbar ist, so muss ξ auch als Faktor in φ enthalten

sein, so dass φ in das Produkt zweier linearer Faktoren zerfällt, etwa

$$\varphi = \xi\eta.$$

Bildet man unter diesen Voraussetzungen die quadratischen Formen φ und ψ nach 24) und 25), so hat man

45)
$$\begin{cases} H - \frac{1}{2} f\lambda_1 = H + 3\frac{J_3}{J_2} f = -\xi^2\eta^2, \\ H - \frac{1}{2} f\lambda_2 = H - \frac{3}{2}\frac{J_3}{J_2} f = -\xi^4, \\ T = 2\xi^5\eta. \end{cases}$$

Daraus folgt

46)
$$\begin{cases} f = \frac{2}{9}\frac{J_2}{J_3}\xi^2(\xi^2 - \eta^2), \\ H = -\frac{1}{3}\xi^2(2\xi^2 + \eta^2), \\ T = 2\xi^5\eta. \end{cases}$$

Man schliesst ferner, dass f und H den linearen Faktor ξ doppelt enthalten, T denselben linearen Faktor fünffach enthält. Ist $R = J_2^3 - 27J_3^2 = 0$, so liefert $\xi = 0$, wo $\xi = \sqrt[4]{\frac{3J_3}{2J_2} f - H}$, eine Doppelwurzel von $f = 0$, die zugleich Doppelwurzel von $H = 0$, und fünffache Wurzel von $T = 0$ ist.

b) Verschwindet aber $\psi = \chi$ identisch, so ist nach 24), 25) und 44)

47)
$$\begin{cases} H = \frac{3}{2}\frac{J_3}{J_2} f, \\ T = 0, \\ f = -\frac{2J_2}{9J_3}\cdot\varphi^2. \end{cases}$$

Also wird f das Quadrat einer quadratischen Form und hat zwei von einander verschiedene Doppelwurzeln. Die Bedingung dafür ist, dass f und H sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, wodurch R von selbst verschwindet. Wir haben also den weiteren Satz:

Wenn H und f nur um einen konstanten Faktor verschieden sind, d. h. wenn die Koefficienten von H den Koefficienten von f proportional sind, so hat die Gleichung $f = 0$ zwei Doppelwurzeln.

Man löst dann die Gleichung auf, indem man setzt:

$$f = (\alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 xy + \alpha_2 y^2)^2,$$

d. h.

$$\alpha_0 = \sqrt{a_0},\quad \alpha_1 = \frac{a_1}{\alpha_0},\quad \alpha_2 = \frac{a_2}{\alpha_1}\alpha_0,$$

und die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 xy + \alpha_2 y^2 = 0$$

bestimmt.

II. Wir betrachten ferner den Fall, dass die kubische Resolvente $\Omega = 0$ drei gleiche Wurzeln hat. Sei also

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

Nun verschwindet aber die Summe der Wurzeln

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

woraus folgt, dass die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 einzeln verschwinden. Es verschwinden dann auch J_2 und J_3, also

$$J_2 = 0,\quad J_3 = 0.$$

Die quadratischen Formen φ, ψ, χ werden hier einander gleich. Betrachtet man zunächst diesen Fall als Grenzfall des in Ia behandelten Falles, indem man φ zuerst von $\psi = \chi$ verschieden annimmt und dann gegen ψ rücken lässt, so folgt, dass die dort angegebenen Eigenschaften von φ, ψ und f erhalten bleiben müssen. Hiernach wird wieder ψ, also hier φ, ψ und χ, zu dem Quadrat einer linearen Form, so dass hier H nach 24) als vierte Potenz einer linearen Form auftritt, also

$$-H = \xi^4.$$

Verschwindet aber $\varphi = \psi = \chi$ identisch, so wird dann auch H identisch Null.

a) Sei zunächst H die vierte Potenz einer linearen Form, ohne identisch zu verschwinden. Dann enthält f wie in Ia zunächst jedenfalls den Faktor ξ doppelt. Setzt man aber

$$f = \xi^2(\alpha_0\xi^2 + 4\alpha_1\xi\eta + 6\alpha_2\eta^2)$$

und bildet H, so erhält dieser Ausdruck nur dann die vierte Potenz von ξ, wenn $\alpha_2 = 0$, d. h. wenn f die dritte Potenz von ξ enthält. Man sieht auch direkt aus dem allgemeinen Ausdruck der Kovariante $H(\xi, \eta)$ von

$$f(\xi, \eta) = \alpha_0\xi^4 + 4\alpha_1\xi^3\eta + 6\alpha_2\xi^2\eta^2 + 4\alpha_3\xi\eta^3 + \alpha_4\eta^4,$$

dass $H(\xi, \eta)$ nur dann von der Form ξ^4 wird, wenn $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ sind, da für jede andere Lösung zugleich der Koefficient von ξ^4 in H verschwinden würde. f wird also hier von der Form $\xi^3\eta$, woraus wieder umgekehrt

$$J_2 = 0,\quad J_3 = 0$$

folgt.

Wir haben also noch den Satz:

Sind $J_2 = 0$, $J_3 = 0$, so hat die Gleichung $f = 0$ eine dreifache Wurzel. Als notwendige und genügende Bedingung hierfür kann man auch annehmen, dass H die vierte Potenz eines linearen Ausdrucks wird. Derselbe wird dann zugleich der dreifache Faktor von f.

b) Verschwindet $\varphi = \psi = \chi$, also auch H identisch, so verschwinden alle Koefficienten von H, nämlich

$$\begin{aligned} a_0 a_2 - a_1^2 &= 0, \\ a_0 a_3 - a_1 a_2 &= 0, \\ a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2 &= 0, \\ a_1 a_4 - a_2 a_3 &= 0, \\ a_2 a_4 - a_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber, wenn a_0 nicht $= 0$:

$$a_2 = \frac{a_1^2}{a_0},$$

$$a_3 = \frac{a_1^3}{a_0^2},$$

$$a_4 = \frac{a_1^4}{a_0^3},$$

also

$$f = a_0 \left(x + \frac{a_1}{a_0} y \right)^4,$$

für $a_0 = 0$ aber $f = a_4 y^4$; und umgekehrt verschwindet dann H identisch.

Wir haben also endlich den Satz:

Wenn H identisch verschwindet, und nur dann, hat die Gleichung $f = 0$ eine vierfache Wurzel.

8. Die Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die Normalform.

Das elliptische Integral erster Gattung

$$48) \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{f(z, 1)}},$$

wo $f(z, 1)$ eine Funktion von z vierten Grades ist, kann bekanntlich nach Auflösung der Gleichung $f = 0$ auf die Legendresche Normalform

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - \varkappa^2 \zeta^2)}}$$

gebracht werden, die selbst wieder durch die Substitution

$$\zeta^2 = \lambda$$

übergeht in

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-\varkappa^2\lambda)}},$$

wo $\varkappa$, der Modul des elliptischen Integrals, eine positive Konstante, die kleiner als 1 ist, λ eine reale, positive Variable bedeutet, und die Funktion unter dem Quadratwurzelzeichen jetzt nur noch dritten Grades ist, mit einem Parameter $\varkappa$.

Eine solche Reduktion kann nach Hermite (Crelle Journal Bd. 52) mit Hilfe der Relation 21) in Nr. 2 dieses Paragraphen auch direkt bewerkstelligt werden. Aus 21) folgt:

$$\sqrt{\left(\frac{2H}{f}\right)^3 - J_2\left(\frac{2H}{f}\right) + 2J_3} = \frac{T\sqrt{-2}}{f^2}\cdot\sqrt{f}$$

oder, wenn man

49) $$\frac{2H}{f} = \lambda$$

setzt:

50) $$\sqrt{\lambda^3 - J_2\lambda + 2J_3} = \frac{T\sqrt{-2}}{f^2}\sqrt{f}.$$

Das allgemeine Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{f(z,1)}},$$

wo $f(z,1)$ vierten Grades, kann daher nach dem Jacobischen Transformationsprincip (Fundamenta nova) auf die Form gebracht werden

$$\frac{1}{M}\int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^3 - J_2\lambda + 2J_3}}.$$

In der That sei, um homogen zu machen,

$$z = \frac{x}{y}, \quad dz = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

so hat man

$$\int \frac{dz}{\sqrt{f(z,1)}} = \int \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{f(x,y)}}.$$

Nun ist

$$H\,df - f\,dH = \tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}x + \frac{\partial H}{\partial y}y & \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y \\ \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy & \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \end{vmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 2(y\,dx - x\,dy)\,T.$$

Also ergiebt die Substitution 49)

$$51) \qquad \int^{\cdot} \frac{dz}{\sqrt{f(z,1)}} = \int^{\cdot} \frac{H df - f dH}{2T\sqrt{f(x,y)}} = -\tfrac{1}{4} \int^{\cdot} \frac{d\lambda}{T} \cdot f^{\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{-2}}{4} \int^{\cdot} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^3 - J_2\lambda + 2J_3}}.$$

Setzt man noch

$$\lambda = \frac{J_3}{J_2}\mu,$$

so folgt

$$52) \qquad \int^{\cdot} \frac{dz}{\sqrt{f(z,1)}} = -\frac{\sqrt{-2J_3}}{4J_2} \int^{\cdot} \frac{d\mu}{\sqrt{\frac{J_3^2}{J_2^3}\mu^3 - \mu + 2}},$$

so dass nur noch die absolute Invariante

$$\frac{J_3^2}{J_2^3}$$

unter dem Quadratwurzelzeichen vorkommt.

Sechster Abschnitt.

Typische Darstellungen.

---

§ 21. Associierte Formen.

1. Man verdankt Hermite* eine Methode, um alle Invarianten und Kovarianten einer Form f durch eine begrenzte Zahl solcher rational auszudrücken. Da alle Invarianten einer Form f, m^{ter} Ordnung, Funktionen der $m+1$ Koefficienten von f sind, von denen vier vermöge linearer Transformation von f vorgeschriebene Werte erhalten können, so hängen die Invarianten überhaupt von $m-2$ Parametern rational ab, nämlich von den $m-3$ Koefficienten der transformierten Form f' und der Substitutionsdeterminante. Hieraus folgt:

Zwischen je $m-1$ Invarianten einer Form m^{ter} Ordnung herrscht eine rationale Beziehung.

Die Kovarianten hängen weiter von den beiden Variabeln, also von m Parametern, ab, d. h.: zwischen je $m+1$ Formen des Systems einer Form m^{ter} Ordnung herrscht eine rationale Beziehung.

Die Hermitesche Methode liefert nun solche Systeme von m Invarianten und Kovarianten von f, durch welche sich alle Formen von f rational darstellen lassen, und zwar so, dass im Nenner immer nur eine Potenz einer bestimmten jener Kovarianten auftritt.

Man erhält also hierdurch in einfachster Form alle Relationen zwischen jenen Formen.

2. Um den Gedanken der Methode klarzulegen, bemerken wir zuerst nach § 19, 5, dass man eine Kovariante von $f(x, y)$ immer als simultane Invariante auffassen kann. Denn jede Kovariante

$$\varphi(x, y)$$

* Hermite, Cambr. and Dubl. math. J. IX (1854), Crelle J. 52. Brioschi, Annali di Matem. Bd. I (1858) p. 303.

ist eine simultane Invariante der beiden Formen mit den Variabeln x', y'

$$f(x', y'), \quad -yx' + xy'.$$

Man kann also in $f(x', y')$ und den Kovarianten $\varphi(x', y')$ eine lineare Substitution machen

$$\xi = \xi_1 x' + \xi_2 y',$$
$$\eta = \eta_1 x' + \eta_2 y',$$

in der die Koefficienten ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 noch Funktionen von x, y sind. Nimmt man insbesondere an Stelle von η die Form $-yx' + xy'$ selbst, an Stelle von ξ die erste Polare $\frac{\partial \psi}{\partial x} x' + \frac{\partial \psi}{\partial y} y'$ einer Kovariante $\psi(x, y)$ von $f(x, y)$, wo sich bekanntlich die $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ analog transformieren, wie die Grössen $-y$, x, so werden nach Hermite die Koefficienten der transformierten Funktion $\varphi(x', y')$ sämtlich Kovarianten von $f(x, y)$.

Wir wollen die Substitution in der Form schreiben

$$\psi . \xi = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} x' + \frac{\partial \psi}{\partial y} y'\right),$$
$$\psi . \eta = -yx' + xy',$$

wo unter ψ eine Kovariante $\psi(x, y)$, ν^{ter} Ordnung von $f(x, y)$ verstanden ist. Die Determinante der rechten Seite wird dann $= \psi$ und die umgekehrten Formeln lauten:

$$x' = x\xi - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial y} \eta,$$
$$y' = y\xi + \frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x} \eta,$$

mit dem Modul ψ.

Wir beweisen dann den Satz in der Form:

I. Es seien

$$\varphi(x, y) \quad \text{und} \quad \psi(x, y)$$

zwei Kovarianten der Form m^{ter} Ordnung

$$f(x, y),$$

bezüglich von den Ordnungen μ und ν. Führt man in φ an Stelle von x und y die neuen Variabeln

$$x' = x\xi - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial y} \eta, \quad y' = y\xi + \frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x} \eta$$

ein und entwickelt den Ausdruck

$$\varphi\left\{x\xi-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial y}\eta,\quad y\xi+\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x}\eta\right\}$$

nach der Taylorschen Reihe, so erhält man eine homogene Funktion μ^{ter} Ordnung von ξ und η, deren Koefficienten sämtlich Kovarianten der Form f sind.

Denn irgend ein Koefficient der Entwicklung, etwa der von $\xi^{m-k}\eta^k$ entsteht aus der k^{ten} Polaren von $\varphi(x,y)$

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x}+y_1\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\varphi(x,y)$$

dadurch, dass man die Grössen x_1, y_1 ersetzt bezüglich durch

$$-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

und der Koefficient wird also, da sich diese Ausdrücke bis auf eine Potenz des Moduls genau so wie x_1, y_1 bei linearer Substitution transformieren, eine Kovariante (siehe § 15 Nr. 6).

3. Transformiert man insbesondere die Form f selbst, so ergiebt sich:

$$1)\quad f\left(x\xi-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial y}\eta,\quad y\xi+\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x}\eta\right)=$$
$$=\psi_0\xi^m+\binom{m}{1}\psi_1\xi^{m-1}\eta+\binom{m}{2}\psi_2\xi^{m-2}\eta^2+\ldots+\psi_m\eta^m,$$

wo auch die Koefficienten ψ_0, ψ_1, …, ψ_m alle Kovarianten werden und zwar

$$2)\quad\begin{cases}\psi_0=f(x,y)\\ m\nu\psi_1=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\end{cases}$$

u. s. w.

Die Kovarianten

$$\psi,\ f,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_m$$

sollen ein der Kovariante ψ associiertes System von Formen genannt werden. Hätte man den Satz I nur für die Form f erwiesen, so würde sich derselbe vermöge der Kovarianteneigenschaft von φ für jede solche Form φ hieraus direkt ergeben haben. Wir wollen dies noch zeigen, weil hieraus auch noch der weitere Satz folgen wird:

II. Das Produkt irgend einer Kovariante φ von f mit einer gewissen ganzen Potenz der Kovariante ψ ist eine ganze homogene Funktion der ψ associierten Formen

$$f,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_m,$$

zwischen welchen Formen und ψ noch zwei Relationen bestehen.

Denn sei

$$\varphi(x, y) = c_0 x^\mu + \binom{\mu}{1} c_1 x^{\mu-1} y + \ldots + c_\mu y^\mu.$$

Vermöge der Definitionseigenschaft der Kovariante φ hat man durch die obige lineare Substitution zwischen den x', y' und ξ, η, vom Modul ψ, neben der Gleichung 1) auch

$$3) \qquad \psi^x . \varphi\left\{x\xi - \frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial y}\eta, \quad y\xi + \frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x}\eta\right\} = \Phi(\xi, \eta) =$$
$$= C_0\xi^\mu + \binom{\mu}{1} C_1 \xi^{\mu-1}\eta + \binom{\mu}{2} C_2 \xi^{\mu-2}\eta^2 + \ldots + C_\mu \eta^\mu,$$

wobei die Koefficienten C_0, C_1, C_2, ..., C_μ ganz genau ebenso aus den Koefficienten

$$f, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$$

der transformierten Form f in 1) hervorgehen, wie die Koefficienten c_0, c_1, c_2, ..., c_μ aus den Koefficienten

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$$

der ursprünglichen Form f. Hieraus folgt zunächst die in Satz I angegebene Eigenschaft der transformierten Form φ. Man erkennt hier aber genauer, dass jede Kovariante $\varphi(x', y')$, geschrieben in den Variabeln x', y', ein Bruch ist, dessen Zähler eine ganze rationale Funktion der ψ associierten Formen $f, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ und von ξ, η, und dessen Nenner eine Potenz von ψ ist, deren Exponent das Gewicht $\varkappa = \frac{1}{2}(m\varrho - \mu)$ ist. Bei einer Invariante von f fehlen nur im Zähler ξ, η.

Bildet man nun in der Gleichung 3) auf beiden Seiten den Koefficienten von ξ^μ, so findet man weiter:

$$4) \qquad \psi^x . \varphi(x, y) = C_0.$$

Diese Gleichung 4) liefert den ersten Teil des Satzes II und zugleich den Ausdruck von φ selbst, nämlich:

III. Man erhält den Ausdruck einer Kovariante $\varphi(x, y)$, indem man in dem ersten Koefficienten, dem erzeugenden Koefficienten von φ, die a_0, a_1, a_2, ..., a_m bezüglich durch die ψ associierten Formen f, ψ_1, ψ_2, ..., ψ_m ersetzt und durch die $\varkappa^{\text{te}}$ Potenz von ψ dividiert.

Hierdurch ist nun $\varphi(x, y)$ rational durch $m+2$ Formen ψ, f, ψ_1, ψ_2, ..., ψ_m ausgedrückt und es müssen also, wie in Nr. 1 dieses Paragraphen gezeigt worden, zwischen diesen letzteren Formen noch zwei Relationen bestehen. Man erhält diese Relationen, indem man

in Gleichung 3) an Stelle von $\varphi(x, y)$ die Funktion $\psi(x, y)$ selbst setzt. Sei

$$\psi(x, y) = b_0 x^\nu + \binom{\nu}{1} b_1 x^{\nu-1} y + \ldots + b_\nu y^\nu$$

und sei

$$\Psi(\xi, \eta) = B_0 \xi^\nu + \binom{\nu}{1} B_1 \xi^{\nu-1} \eta + \ldots + B_\nu \eta^\nu,$$

wo die $B_0, B_1, \ldots$ aus den $f, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ ebenso entstehen, wie die $b_0, b_1, \ldots$ aus den $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$. Dann liefert der Koefficient von ξ^ν in 3) eine 4) analoge Gleichung der Form

$$5) \qquad \psi^\lambda(x, y) = B_0,$$

und der Koefficient von $\xi^{\nu-1}\eta$ geht aus der Funktionaldeterminante von φ, ψ für $\varphi = \psi$ hervor, verschwindet also, d. h.

$$6) \qquad 0 = B_1.$$

In 5) und 6) sind die gesuchten Relationen gefunden. Die Gleichung 5) sagt aus, dass eine gewisse Potenz von ψ sich als ganze rationale Funktion der ψ associierten Formen $f, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ darstellen lässt; Gleichung 6) liefert eine Relation zwischen den letzteren $m+1$ Formen allein.

4. Besonders wichtig ist der besondere Fall der Darstellung in Nr. 3, in welchem für die Kovariante ψ die zu Grunde gelegte Form f selbst genommen wird, weil in diesem Falle die in Nr. 3 genannten beiden Relationen wegfallen und die Formen des Systems sich durch m von einander unabhängige Formen, die ein f associiertes System bilden, rational ausdrücken.

Sei

$$7) \quad f\left(x\xi - \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y}\eta,\ y\xi + \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}\eta\right) = u_0 \xi^m + \binom{m}{1} u_1 \xi^{m-1}\eta + \ldots + u_m \eta^m.$$

Es wird dann

$$8) \qquad \begin{cases} u_0 = f(x, y), \\ u_1 = 0; \end{cases}$$

denn

$$m^2 u_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Die beiden Relationen 5) und 6) Nr. 3 werden also hier zu den Identitäten $f = f$ und $u_1 = 0$, und das f associierte System besteht nur aus den m von einander unabhängigen Formen

$$f, u_2, u_3, \ldots, u_m.$$

Das Produkt irgend einer Kovariante φ mit einer gewissen ganzen Potenz von f ist eine ganze rationale Funktion

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

von $f, u_2, u_3, \ldots, u_m$. Man erhält dieselbe, indem man im ersten Koefficienten von φ die Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_m$ bezüglich durch $f, 0, u_2, \ldots, u_m$ ersetzt.

Beispiel. Für die kubische Form

9) $$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$$

ist die Hessesche Form

10) $$\Delta(x, y) = (a_0a_2 - a_1^2)x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)xy + (a_1a_3 - a_2^2)y^2 = \\ = c_0x^2 + 2c_1xy + c_2y^2.$$

Sei nun nach 7) und 3) für $\psi = f$:

11) $$f\left(x\xi - \tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y}\eta,\ y\xi + \tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x}\eta\right) = f\xi^3 + 3u_2\xi\eta^2 + u_3\eta^3,$$

12) $$f^2.\Delta\left(x\xi - \tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y}\eta,\ y\xi + \tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x}\eta\right) = C_0\xi^2 + 2C_1\xi\eta + C_2\eta^2,$$

so wird

13) $C_0 = u_0u_2 - u_1^2 = f.u_2$, $2C_1 = u_0u_3 - u_1u_2 = fu_3$, $C_2 = u_1u_3 - u_2^2 = -u_2^2$.

Ferner folgt aus 12), wie in 4), und 13):

14) $$f^2\Delta = C_0 = fu_2,$$

also

15) $$f.\Delta = u_2.$$

Diese Beziehung, welche Δ durch die f associierten Formen f, u_2 ausdrückt, dient auch umgekehrt dazu, u_2 in 11) durch f und Δ auszudrücken.

Um u_3 analog zu bestimmen, hat man aus 12) und 13)

$$\tfrac{1}{3}f^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial \Delta}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) = 2C_1 = fu_3,$$

und aus 15)

$$f\left(\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial \Delta}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

16) $$u_3 = \tfrac{1}{3}f\left(\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial \Delta}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) = fQ = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right),$$

wo Q die Kovariante dritter Ordnung, dritten Grades von f ist.

Dieselbe Beziehung würde man auch erhalten, wenn man die Kovariante Q direkt nach 4) darstellen würde; denn da

$$Q = (a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)x^3 + \ldots,$$

so folgt

$$f^3.Q = u_0^2u_3 - 3u_0u_1u_2 + 2u_1^3 = f^2u_3,$$

und hieraus 16). Aus 11), 12), 13), 15), 16) zusammen folgt

17) $$f^{-1}.f\left(x\xi-\tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y}\eta,\ y\xi+\tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x}\eta\right)=\xi^3+3\Delta.\xi\eta^2+Q.\eta^3,$$

18) $$\Delta\left(x\xi-\tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y}\eta,\ y\xi+\tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x}\eta\right)=\Delta.\xi^2+Q.\xi\eta-\Delta^2.\eta^2.$$

Für die Diskriminante von f

$$R=(a_0a_3-a_1a_2)^2-4(a_0a_2-a_1^2)(a_1a_3-a_2^2)$$

ergiebt sich nach 4) oder aus 18):

$$f^6.R=u_0^2u_3^2+4u_0u_2^3=f^4(Q^2+4\Delta^3),$$

woraus die bekannte Relation für das System von f hervorgeht:

19) $$Rf^2-4\Delta^3=Q^2.$$

5. Die ψ associierten Formen $f, \psi_2, \ldots, \psi_m$ können durch die f associierten Formen $f, u_2, \ldots, u_m$ und durch die Formen ψ und $\psi_1=\frac{1}{m\nu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ ausgedrückt werden.

Setzt man nämlich

$$-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial y}=h,\quad \frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x}=k,$$

so liefert die Taylorsche Reihe

$$f(h\eta+x\xi,\ k\eta+y\xi)=f(h,k).\eta^m+\left(x\frac{\partial}{\partial h}+y\frac{\partial}{\partial k}\right)f(h,k).\eta^{m-1}\xi+\ldots,$$

woraus folgt

20) $$m(m-1)\ldots(i+1).\psi_i=\left(x\frac{\partial}{\partial h}+y\frac{\partial}{\partial k}\right)^{m-i}f(h,k).$$

Nun ist aber

$$\psi_1=\frac{1}{m\nu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}.\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\psi=\frac{1}{\nu}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x}+y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),$$

so dass man findet

21) $$\begin{cases} h=\frac{1}{f}\left(x\psi_1-\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y}.\psi\right), \\ k=\frac{1}{f}\left(y\psi_1+\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}\psi\right). \end{cases}$$

Setzt man diese Werte für h und k in f ein und sondert den Faktor f^m ab, so hat man mit Rücksicht auf 7)

22) $$f^m.f(h,k)=u_0\psi_1^m+\binom{m}{1}u_1\psi_1^{m-1}\psi+\binom{m}{2}u_2\psi_1^{m-2}\psi^2+\ldots=u(\psi_1,\psi).$$

Nun folgt durch Differentiation von 21)

$$\frac{\partial h}{\partial\psi_1}=\frac{x}{f},\quad \frac{\partial k}{\partial\psi_1}=\frac{y}{f}.$$

Differentiiert man ferner die Gleichung 22) nach ψ_1, so kommt

$$\frac{\partial u}{\partial \psi_1} = f^{m-1}.\left(\frac{\partial}{\partial h}x + \frac{\partial}{\partial k}y\right) f(h,k),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \psi_1^2} = f^{m-2}.\left(\frac{\partial}{\partial h}x + \frac{\partial}{\partial k}y\right)^2 f(h,k),$$

u. s. w.,

woraus mit Rücksicht auf 20)

$$23)\qquad \psi_i = \frac{1}{f_i}\left\{u_0\psi_1{}^i + \binom{i}{1}u_1\psi_1{}^{i-1}\psi + \binom{i}{2}u_2\psi_1{}^{i-2}\psi^2 + \ldots\right\}.$$

6. Um die u_i selbst zu berechnen, kann man zunächst bemerken, dass dieselben sämtlich sich reducieren lassen, indem sie alle den Faktor f besitzen. Man kann dies, wie in dem Beispiel zu Nr. 4, etwa durch Bilden der Hesseschen Kovariante H erkennen. Man habe

$$24)\qquad H(x,y) = c_0x^{2m-4} + \binom{2m-4}{1}c_1x^{2m-5}y + \ldots + c_{2m-4}y^{2m-4},$$

wobei c_i ein Ausdruck der Form wird:

$$25)\qquad c_i = \alpha_0{}^{(i)}a_0a_{i+2} + \alpha_1{}^{(i)}a_1a_{i+1} + \alpha_2{}^{(i)}a_2a_i + \ldots,$$

mit Zahlenkoefficienten α; das letzte Glied wird

$$\alpha^{(i)}_{\frac{1}{2}(i+2)}a^2_{\frac{1}{2}(i+2)}, \quad \text{bezüglich } \alpha^{(i)}_{\frac{1}{2}(i+1)}a_{\frac{1}{2}(i+1)}a_{\frac{1}{2}(i+3)},$$

je nachdem i gerade oder ungerade ist.

Hieraus ergiebt sich

$$26)\qquad f^2.H\left(x\xi - \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y}\eta,\ y\xi + \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}\eta\right) =$$

$$= C_0\xi^{2m-4} + \binom{2m-4}{1}C_1\xi^{2m-5}\eta + \ldots + C_{2m-4}\eta^{2m-4},$$

wo

$$27)\qquad C_i = \alpha_0{}^{(i)}fu_{i+2} + \alpha_2{}^{(i)}u_2u_i + \alpha_3{}^{(i)}u_3u_{i-1} + \ldots$$

wird. Bezeichnet man auf der linken Seite von 26) den Koefficienten von $\xi^{2m-4-i}\eta^i$ mit

$$\binom{2m-4}{i}.f^2.H^{(i)},$$

so hat man also

$$28)\qquad C_i = f^2H^{(i)}$$

und hieraus und aus 27) die Gleichungen:

$$29)\qquad \begin{cases} \alpha_0{}^{(0)}fu_2 = f^2H, \\ \alpha_0{}^{(1)}fu_3 = f^2H^{(1)}, \\ \alpha_0{}^{(2)}fu_4 + \alpha_2{}^{(2)}u_2{}^2 = f^2H^{(2)}, \\ \alpha_0{}^{(3)}fu_5 + \alpha_2{}^{(3)}u_2u_3 = f^2H^{(3)}, \end{cases}$$

u. s. w.

oder

29a)
$$\begin{cases} u_2 = \beta f H, \\ u_3 = \beta_1 f H^{(1)}; \\ u_4 = f(\beta_2 H^{(2)} + \gamma_2 H^2), \\ u_5 = f(\beta_3 H^{(3)} + \gamma_3 H H^{(1)}), \end{cases}$$

u. s. w.

wo die β, γ wieder Zahlenkoefficienten bedeuten. Die Gleichungen 29a) zeigen, dass f in allen u_i als Faktor enthalten ist. Die übrigen Faktoren wird man aber besser als durch die $H^{(i)}$ durch die Funktionen

$$H,\ H^{(1)} = (f, H) = \varphi_1,\ (f, \varphi_1) = \varphi_2,\ (f, \varphi_2) = \varphi_3,\ \text{u. s. w.}$$

ausdrücken, wo (f, φ) die Funktionaldeterminante der beiden Formen f, φ vorstellt. Man erhält ihre Beziehungen zu den u_i, indem man diese Funktionen φ_i durch f und die u_i berechnet.

Der folgende, von Hermite eingeschlagene Weg, die u_i zu bestimmen, der ebenfalls nur die ersten Koefficienten der Formen benutzt, liefert am einfachsten die gesuchten Funktionen, wenigstens die ersten derselben.

Hermite setzt zunächst in der Darstellung

$$f\left(x\xi - \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y}\eta,\ y\xi + \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}\eta\right) = u_0\xi^m + \binom{m}{1} u_1 \xi^{m-1}\eta + \ldots$$

$y = 0$.

Dann ist

$$\left[x\xi - \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y}\eta\right]_{y=0} = x\xi - a_1 x^{m-1}\eta,$$

$$\left[y\xi + \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}\eta\right]_{y=0} = a_0 x^{m-1}\eta,$$

so dass

30) $$f(x\xi - a_1 x^{m-1}\eta,\ a_0 x^{m-1}\eta) = \left[u_0\xi^m + \binom{m}{1} u_1 \xi^{m-1}\eta + \ldots\right]_{y=0},$$

wo also sämtliche associierten Formen u_0, u_1, u_2, ... sich auf ihr erstes Glied reducieren.

Setzt man in 30)

$$\frac{\eta}{\xi} = \zeta,$$

so geht die linke Seite dieser Gleichung über in

$$x^m . \xi^m . f(1 - a_1 x^{m-2}\zeta,\ a_0 x^{m-2}\zeta).$$

Die Vergleichung der Koefficienten gleich hoher Potenzen von ξ und η in 30) liefert dann zunächst die Eigenschaft, dass das erste Glied von u_k den Faktor $x^{m+(m-2)k}$ enthält und dass der konstante

Teil in diesem ersten Term gleich dem Koefficienten von ζ^k in der Entwicklung des Ausdrucks

$$f(1-a_1\zeta,\ a_0\zeta),$$

also teilbar durch a_0, ist. Um eine bequeme Form dieses Terms zu gewinnen, lege man für f die symbolische Form

$$f=(\alpha x+\beta y)^m$$

zu Grunde, wonach

$$f(1-a_1\zeta,\ a_0\zeta)=\{\alpha+\zeta(-\alpha a_1+\beta a_0)\}^m$$

wird. Dann ist der Koefficient von ζ^k in diesem Ausdruck

$$\binom{m}{k}\alpha^{m-k}(-\alpha a_1+\beta a_0)^k=\binom{m}{k}f_k(-a_1, a_0),$$

wo $f_k(x, y)$ die mit den Koefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ versehene Funktion k^{ter} Ordnung

30a) $$f_k(x,y)=\frac{1}{m(m-1)\ldots(k+1)}\cdot\frac{\partial^{m-k}f(x,y)}{\partial x^{m-k}}$$

bedeuten soll.

Also hat man für u_k den Ausdruck

31) $$u_k=f_k(-a_1,\ a_0).x^{m+(m-2)k}+\ldots$$

Die übrigen Glieder der Kovariante u_k können dann nach § 14, 6 pag. 150 durch einfache Differentiationen bestimmt werden.

Während

$$u_0=f,\ \ u_1=0,$$

hat man also zur Berechnung von $u_2, u_3, \ldots$ zunächst die folgenden erzeugenden Koefficienten:

$$\frac{1}{a_0}f_0=1,$$

$$\frac{1}{a_0}\cdot f_1=0,$$

$$\frac{1}{a_0}f_2=-a_1^2+a_0a_2,$$

$$\frac{1}{a_0}f_3=2a_1^3-3a_0a_1a_2+a_0^2a_3,$$

$$\frac{1}{a_0}f_4=-3a_1^4+6a_0a_1^2a_2-4a_0^2a_1a_3+a_0^3a_4,$$

$$\frac{1}{a_0}f_5=4a_1^5-10a_0a_1^3a_2+10a_0^2a_1^2a_3-5a_0^3a_1a_4+a_0^4a_5,$$

u. s. w.

I. Bestimmung von u_2. Man hat

$$u_2 = a_0(a_0a_2 - a_1^2)x^{m+2(m-2)} + \ldots$$

Nun ist die Hessesche Form von f:

$$H = \frac{1}{m^2(m-1)^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = (a_0a_2 - a_1^2)x^{2(m-2)} + \ldots,$$

so dass

32) $$u_2 = f.H.$$

II. Bestimmung von u_3. Man hat

$$u_3 = a_0(2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3).x^{m+3(m-2)} + \ldots$$

Nun ist aber

$$2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3$$

der erzeugende Koefficient der Kovariante

$$\theta = \frac{1}{m(m-2)}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial H}{\partial x}\right\},$$

die von der $3(m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Also hat man

33) $$u_3 = f.\theta.$$

III. Bestimmung von u_4. Man hat

$$u_4 = a_0(-3a_1^4 + 6a_0a_1^2a_2 - 4a_0^2a_1a_3 + a_0^3a_4)x^{m+4(m-2)} + \ldots$$

Da nun

$$4(m-2) = 2.2(m-2) = 2m + 2(m-4)$$

ist, so kann zur Erzeugung der Form vierten Grades $\frac{u_4}{f}$ sowohl das Quadrat der Hesseschen Form H, als auch die quadratische Invariante H' der vierten Polaren von f,

$$\frac{1}{m(m-1)(m-2)(m-3)}\left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f,$$

die nach § 15, 3 eine Kovariante von f ist, verbunden mit f^2, herangezogen werden.

Der erzeugende Koefficient des Quadrats der Hesseschen Form ist

$$(a_0a_2 - a_1^2)^2,$$

der erzeugende Koefficient der quadratischen Invariante H' der vierten Polaren ist

$$(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2),$$

welche die Relation ergeben

$$\frac{1}{a_0} f_4 = (a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2)\, a_0^2 - 3 (a_0 a_2 - a_1^2)^2,$$

woraus dann folgt, dass

34) $$u_4 = f(f^2 H' - 3 H^2).$$

IV. Bestimmung von u_5. Durch ähnliche Betrachtung findet man

35) $$u_5 = -f(2 H\theta - f^2 \theta'),$$

wo

$$\theta' = \frac{1}{m(m-4)} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial H'}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial H'}{\partial x} \right)$$

mit dem erzeugenden Koefficienten

$$a_0^2 a_5 - 5 a_0 a_1 a_4 + 2 a_0 a_2 a_3 + 8 a_1^2 a_3 - 6 a_1 a_2^2, \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung. Setzt man in 30)

$$x = 1, \quad y = 0, \quad \eta = 1,$$

so wird diese Gleichung

$$a_0^m f\left(\frac{\xi - a_1}{a_0}, \ 1 \right) = u_0 \xi^m + \binom{m}{2} u_2 \xi^{m-2} + \ldots,$$

so dass also die gewöhnliche Methode, das zweite Glied einer Gleichung wegzuschaffen, ein specieller Fall der obigen allgemeinen Methode ist.

Beispiele. I. Für

$$f = a_0 x^2 + 2 a_1 xy + a_2 y^2$$

ist

36) $$f\left(x\xi - \tfrac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \eta, \ y\xi + \tfrac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \eta \right) = f \cdot \{ \xi^2 + R \eta^2 \},$$

wo

$$R = a_0 a_2 - a_1^2.$$

II. Für

$$f = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 xy^2 + a_3 y^3$$

ist

37) $$f\left(x\xi - \tfrac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial y} \eta, \ y\xi + \tfrac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial x} \eta \right) = f \cdot \{ \xi^3 + 3 \Delta \xi \eta^2 + Q \eta^3 \}.$$

III. Für

$$f = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 y + 6 a_2 x^2 y^2 + 4 a_3 xy^3 + a_4 y^4$$

hat man

38) $$f\left(x\xi - \tfrac{1}{4} \frac{\partial f}{\partial y} \eta, \ y\xi + \tfrac{1}{4} \frac{\partial f}{\partial x} \eta \right) = f \cdot \{ \xi^4 + 6 H \xi^2 \eta^2 + 4 T \xi \eta^3 + (J_2 f^2 - 3 H^2) \eta^4 \}.$$

Bildet man hier die Invariante J_3, so ergiebt sich die bekannte Relation:

39) $$J_3 f^3 = J_2 f^2 H - 4 H^3 - T^2.$$

7. Anwendung auf die Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten, vierten Grades.

Die Hermitesche Methode der associierten Formen, durch welche das zweite Glied in der transformierten Form zu 0 wird, liefert Auflösungen der Gleichungen $f(x', y') = 0$, in welche noch ein willkürlicher Parameter $\frac{x}{y}$ eintritt. Man findet vermöge der Substitution in Nr. 2:

I. bei quadratischen Gleichungen:

$$f(x', y') = f(x, y) \cdot (\xi^2 + R\eta^2),$$

also für $f(x', y') = 0$:

$$\xi^2 + R\eta^2 = 0, \quad \xi = \pm \eta \sqrt{-R},$$

d. h. nach Nr. 2 dieses Paragraphen

$$\tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} x' + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y'\right] = \pm (xy' - yx')\sqrt{-R},$$

eine lineare Gleichung zur Bestimmung der Wurzel $\frac{x'}{y'}$, woraus

$$40) \qquad \frac{x'}{y'} = \frac{-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} \pm x\sqrt{-R}}{\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} \pm y\sqrt{-R}}.$$

II. Bei kubischen Gleichungen ist

$$f(x', y') = f \cdot \{\xi^3 + 3\Delta\xi\eta^2 + Q\eta^3\}.$$

Für $f(x', y') = 0$ hat man die Gleichung

$$41) \qquad \xi^3 + 3\Delta\xi\eta^2 + Q\eta^3 = 0,$$

die nach der Regel des Tartaglia aufgelöst werden kann. Man hat alsdann

$$\frac{\xi}{\eta} = t + u,$$
$$t^3 + u^3 = -Q,$$
$$tu = -\Delta;$$

daher sind t^3 und u^3 die Wurzeln der Gleichung

$$z^2 + Qz - \Delta^3 = 0,$$

woraus dann

$$t^3 = -\tfrac{1}{2}Q + \sqrt{\tfrac{1}{4}Q^2 + \Delta^3},$$
$$u^3 = -\tfrac{1}{2}Q - \sqrt{\tfrac{1}{4}Q^2 + \Delta^3}.$$

Nach § 20, 1, pag. 212 hat man aber die Relation

$$42) \qquad Q^2 - Rf^2 + 4\Delta^3 = 0,$$

die unmittelbar liefert

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}Q^2 + \Delta^3} = \tfrac{1}{2}f\sqrt{R}.$$

Die Grössen t und u folgen dann aus den Gleichungen

$$t^3 = \tfrac{1}{2}(-Q + f\sqrt{R}),$$
$$u^3 = \tfrac{1}{2}(-Q - f\sqrt{R}),$$

wobei die Bedingung

$$tu = -\Delta$$

zu erfüllen ist, wodurch die dritten Wurzeln t und u durch einander bestimmt sind. Man findet nun

$$\tfrac{1}{3}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right\} = (xy' - yx').(\varepsilon t + \varepsilon^2 u),$$

wo ε eine dritte Wurzel der Einheit ist, und

$$43) \qquad \frac{x'}{y'} = \frac{-\tfrac{1}{3}\dfrac{\partial f}{\partial y} + x(\varepsilon t + \varepsilon^2 u)}{\tfrac{1}{3}\dfrac{\partial f}{\partial x} + y(\varepsilon t + \varepsilon^2 u)}.$$

Wählt man für x, y eines der Wertepaare α, β, für welche Δ verschwindet, so geht die Gleichung 41) in eine reine kubische Gleichung über, aus der man findet

$$\frac{\xi}{\eta} = -\sqrt[3]{Q} = -\sqrt[3]{f(\alpha, \beta).\sqrt{R}},$$

wo die dritte Wurzel ihre sämtlichen drei Werte annehmen kann. Alsdann hat man für die Lösung der kubischen Gleichung die beiden Formen

$$\tfrac{1}{3}\left\{\frac{\partial f}{\partial \alpha}x' + \frac{\partial f}{\partial \beta}y'\right\} = -(\alpha y' - \beta x').\sqrt[3]{Q(\alpha, \beta)},$$
$$\tfrac{1}{3}\left\{\frac{\partial f}{\partial \alpha'}x' + \frac{\partial f}{\partial \beta'}y'\right\} = -(\alpha' y' - \beta' x').\sqrt[3]{Q(\alpha', \beta')}.$$

III. Bei biquadratischen Gleichungen hat man für die transformierte Form von f

$$f(x', y') = f.\{\xi^4 + 6H\xi^2\eta^2 + 4T\xi\eta^3 + (J_2 f^2 - 3H^2)\eta^4\}.$$

Man gelangt hier direkt zu der zuerst von Aronhold (Crelle Journal 52) gegebenen Auflösung, indem man auf

$$44) \qquad 0 = \xi^4 + 6H\xi^2\eta^2 + 4T\xi\eta^3 + (J_2 f^2 - 3H^2)\eta^4$$

eine der bekannten Methoden, etwa die Eulersche, verwendet. Hiernach setze man

$$\frac{\xi}{\eta} = t + u + v$$

und substituiere die Potenzen dieses Ausdrucks in 44). Dann kann man die Gleichung 44) ersetzen durch folgende drei Gleichungen

$$t^2+u^2+v^2=-3H,$$
$$t^2u^2+t^2v^2+u^2v^2=3H^2-\tfrac{1}{4}J_2f^2,$$
$$tuv=-\frac{T}{2},$$

aus denen die Grössen t, u, v vollständig bestimmt werden können. Nun bilde man die kubische Gleichung, deren Wurzeln t^2, u^2, v^2 sind. Dieselbe lautet

45) $$(z-t^2)(z-u^2)(z-v^2)=z^3+3Hz^2+(3H^2-\tfrac{1}{4}J_2f^2)z-\frac{T^2}{4}=0,$$

wo t, u, v ausserdem noch der Bedingung

46) $$tuv=-\frac{T}{2}$$

genügen müssen. Setzt man jetzt in 45)

$$-z=H-\frac{f}{2}\lambda$$

und führt dadurch an Stelle von z die neue Unbekannte λ ein, so geht die Gleichung 45), unter Berücksichtigung der bekannten Relation [vergl. § 20, 2, 16)]:

$$-T^2=J_3f^3-J_2f^2H+4H^3,$$

über in die § 20, 3 aufgestellte kubische Resolvente

$$\Omega(\lambda)=\lambda^3-J_2\lambda+2J_3=0.$$

Sind λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der Gleichung $\Omega(\lambda)=0$, so hat man

$$t=\sqrt{\frac{f}{2}\lambda_1-H},\quad u=\sqrt{\frac{f}{2}\lambda_2-H},\quad v=\sqrt{\frac{f}{2}\lambda_3-H},$$

wo für die Vorzeichen der drei Quadratwurzeln die Bedingung

$$tuv=-\frac{T}{2}$$

zu erfüllen ist. Man sieht, dass t, u, v bis auf das Vorzeichen mit den Werten übereinstimmen, den die § 20, 3, 24) und 26) aufgestellten quadratischen Formen φ, ψ, χ für ein beliebiges Wertsystem x, y annehmen. Daher kann man die Lösung der biquadratischen Gleichung nach Aronhold auch schreiben:

47) $$\tfrac{1}{4}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right\}=(xy'-x'y)(\pm\varphi\pm\psi\pm\chi),$$

wo

$$(\pm\varphi)\cdot(\pm\psi)\cdot(\pm\chi)=-\frac{T}{2}.$$

Eine andere Lösungsform der biquadratischen Gleichungen ergiebt sich, indem man $\frac{x}{y}$ so bestimmt, dass

$$T(x, y) = 0$$

wird. Sei $\frac{\alpha}{\beta}$ irgend eine Wurzel von

$$T\left(\frac{x}{y}, 1\right) = 0,$$

so zerfällt dann die Gleichung

$$0 = \xi^4 + 6H(\alpha, \beta) . \xi^2\eta^2 + [J_2 . f^2(\alpha, \beta) - 3H^2(\alpha, \beta)]\eta^4$$

in das Produkt

$$\{\xi^2 + [3H(\alpha, \beta) + \sqrt{12H^2(\alpha, \beta) - J_2 . f^2(\alpha, \beta)}]\eta^2\} .$$
$$. \{\xi^2 + [3H(\alpha, \beta) - \sqrt{12H^2(\alpha, \beta) - J_2 . f^2(\alpha, \beta)}]\eta^2\},$$

woraus

$$\frac{\xi}{\eta} = \sqrt{-3H(\alpha, \beta) + \sqrt{12H^2(\alpha, \beta) - J_2 f^2(\alpha, \beta)}},$$

ein Ausdruck, der vier verschiedene Werte annimmt. $T = 0$ tritt also hier an Stelle der früheren kubischen Resolvente, und diese trennt in der That auch nach dem Früheren gerade die drei quadratischen Faktoren von T.

8. Endliches Formensystem für die kubische Form.

Die f associierten Formen von

$$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$$

lauten

$$u_0 = f, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = f . \Delta, \quad u_3 = f . Q,$$

und die Δ associierten Formen ergeben sich nach 23), so dass man auch, unter Benutzung der Relation Cayleys

$$Q^2 - Rf^2 + 4\Delta^3 = 0,$$

die Darstellung hat:

$$f\left(x\xi - \tfrac{1}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial y}\eta, \; y\xi + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial x}\eta\right) = f\xi^3 - \tfrac{3}{2}Q\xi^2\eta + \tfrac{3}{4}Rf\xi\eta^2 - \tfrac{1}{8}RQ\eta^3.$$

Hiernach und nach Nr. 3 dieses Paragraphen kann also jede Kovariante oder Invariante φ von f ausgedrückt werden, entweder als ganze rationale Funktion der Formen f, Δ, Q, dividiert durch eine entsprechende Potenz von f, oder als ganze rationale Funktion der Formen f, Q, R, dividiert durch eine Potenz von Δ, in der Art:

$$48) \qquad \varphi = \frac{1}{f^\varkappa} \cdot \chi(f, \Delta, Q) = \frac{1}{\Delta^\lambda}\omega(f, Q, R),$$

wo χ und ω rationale, ganze Funktionen der eingeklammerten Formen bedeuten.

Mit Hilfe der Cayleyschen Relation lässt sich nun zeigen, dass φ stets auch eine ganze Funktion der Grundformen f, Δ, Q, R ist.

Zunächst lassen sich die Funktionen χ und ω in der Form

$$\chi(f, \Delta, Q) = \chi_0(f, \Delta, R) + Q \cdot \chi_1(f, \Delta, R),$$
$$\omega(f, Q, R) = \omega_0(f, \Delta, R) + Q \cdot \omega_1(f, \Delta, R)$$

darstellen, wo χ_0, χ_1, ω_0, ω_1 ganze Funktionen von f, Δ, R bedeuten und Q nur noch linear vorkommt. Man hat also

$$49) \qquad \frac{1}{f^x}(\chi_0 + Q\chi_1) = \frac{1}{\Delta^\lambda}(\omega_0 + Q\omega_1),$$

woraus folgt, da Q als willkürlicher Parameter betrachtet werden kann, dass

$$50) \qquad \frac{1}{f^x}\chi_0 = \frac{1}{\Delta^\lambda}\omega_0, \quad \frac{1}{f^x}\chi_1 = \frac{1}{\Delta^\lambda}\omega_1.$$

In der That hätte man andernfalls in 49) eine in Q lineare Gleichung zwischen Q und den übrigen Grundformen, die wegen des ungeraden Charakters von Q nicht existieren kann.

Aus 50) schliesst man alsdann, dass, da f und Δ von einander unabhängig sind, χ_0 und χ_1 durch f^x, ω_0 und ω_1 durch Δ^λ teilbar sind, womit bewiesen ist, dass in der That jede Kovariante oder Invariante φ der kubischen Form als ganze Funktion durch die Grundformen f, Δ, Q, R ausdrückbar ist.

9. Endliches Formensystem für die biquadratische Form. Es sei

$$f = a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4$$

die Form vierter Ordnung. Die Hessesche Form derselben sei H, die Kovariante sechster Ordnung sei T, und J_2 und J_3 seien die fundamentalen Invarianten von f. Dann sind die f associierten Formen

$$u_0 = f, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = f.H, \quad u_3 = f.T, \quad u_4 = f(J_2f^2 - 3H^2).$$

Die H associierten Formen ergeben nach 23) und mit Hilfe der Relation für T^2 die Darstellung:

$$51) \quad f\left(x\xi - \tfrac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial y}\eta,\ x\xi + \tfrac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial x}\eta\right) = f\xi^4 - 2T.\xi^3\eta - \tfrac{3}{2}f(J_3f - J_2H).\xi^2\eta^2 + \\ + \tfrac{1}{2}T(J_3f - J_2H)\xi\eta^3 + \tfrac{1}{16}f(J_3f - J_2H)^2\eta^4.$$

Jede Kovariante oder Invariante φ der biquadratischen Form ist also hiernach und nach Nr. 3 dieses Paragraphen in der doppelten Form

$$\varphi = \frac{1}{f^x} \cdot \chi(f, H, T, J_2) = \frac{1}{H^\lambda}\omega(f, H, T, J_2, J_3)$$

ausdrückbar, wo χ und ω ganze rationale Funktionen der eingeklammerten Formen bedeuten.

Mit Hilfe der Cayleyschen Relation zwischen den Grundformen von f, nämlich

$$-T^2 = J_3 f^3 - J_2 f^2 H + 4H^3,$$

kann man nun bewirken, dass die Form T in den Funktionen χ und ω nur noch linear vorkommt. Man kann dann setzen

$$\chi(f, H, T, J_2) = \chi_0(f, H, J_2, J_3) + T.\chi_1(f, H, J_2, J_3),$$
$$\omega(f, H, T, J_2, J_3) = \omega_0(f, H, J_2, J_3) + T.\omega_1(f, H, J_2, J_3),$$

woraus man die Beziehung

$$\frac{1}{f^x}(\chi_0 + T\chi_1) = \frac{1}{H^\lambda}(\omega_0 + T\omega_1)$$

ableitet. Durch dieselbe Betrachtung wie bei den kubischen Formen (indem auch T unter den Formen f, H, T, J_2, J_3 die einzige mit ungeradem Charakter ist) findet man daraus die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{f^x}\cdot\chi_0 = \frac{1}{H^\lambda}\cdot\omega_0;\quad \frac{1}{f^x}\chi_1 = \frac{1}{H^\lambda}\cdot\omega_1.$$

Da nun f und H von einander unabhängig sind, so folgt jetzt unmittelbar, dass χ_0 und χ_1 durch f^x, ω_0 und ω_1 durch H^λ teilbar sind, so dass also jede Kovariante und Invariante φ einer biquadratischen Form f eine ganze Funktion der Grundformen f, H, T, J_2, J_3, in die man T linear eingehen lassen kann, ist.

§ 22. Typische Darstellung, insbesondere typische Darstellung der Form fünfter Ordnung.

1. Der in § 21 gegebenen Darstellung durch die associierten Formen lassen sich noch analoge zur Seite stellen.* Seien $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ zwei Kovarianten der Ordnung μ und ν von $f(x, y)$, so kann man in $f(x', y')$ die Substitution vornehmen

1)
$$\begin{cases} \sqrt{\Delta}.\xi = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}x' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y'\right), \\ \sqrt{\Delta}.\eta = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}.x' + \frac{\partial\psi}{\partial y}y'\right), \end{cases}$$

wo

1a)
$$\Delta = \frac{1}{\mu\nu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}.\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),$$

oder

* Eine beide umfassende Darstellung findet man in Clebsch, Binäre Formen § 81 u. f.

2)
$$\begin{cases} \sqrt{\Delta}.x' = \frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial y}\xi - \frac{1}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta, \\ \sqrt{\Delta}.y' = -\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x}\xi + \frac{1}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\eta. \end{cases}$$

Die absoluten Werte der Substitutionskoefficienten sind dabei willkürlich so bestimmt worden, dass die Determinante der Substitution 1) oder 2) gleich 1 wird.

In der Entwicklung

3) $$(\sqrt{\Delta})^m \cdot f(x', y') = u_0\xi^m + \binom{m}{1} u_1\xi^{m-1}\eta + \ldots + u_m\eta^m$$

werden dann wieder alle Koefficienten $u_0, u_1, \ldots, u_m$ Kovarianten. Denn es wird

$$u_0 = f\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),$$

d. h. u_0 ist nach § 15, 6 eine Kovariante von f. Die übrigen Koefficienten entstehen, indem man in den Polaren

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x, y)$$

zugleich x, y durch $\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x}$ und x_1, y_1 durch $-\frac{1}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{1}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ersetzt, was wiederum, indem man genau wie in § 15, 6 schliesst, nur Kovarianten von $f(x, y)$ liefert.

Bildet man für irgend eine Form χ des Systems von f den Ausdruck $\chi(x', y')$ mittelst Gleichung 3) und setzt dann x, y für x', y', wobei $\sqrt{\Delta}.\xi$, $\sqrt{\Delta}.\eta$ zufolge der Gleichungen 1) bezüglich in φ, ψ übergehen, so zeigt sich, genau wie in § 21, dass jede Form von f, mit einer Potenz von Δ multipliciert, eine ganze rationale Funktion von

$$u_0, u_1, \ldots, u_m, \varphi, \psi$$

wird, während zwischen diesen Formen und Δ noch vier Relationen bestehen.

2. Wir wollen den speciellen Fall, dass φ und ψ lineare Kovarianten von f sind, noch näher betrachten. Dies kann zunächst nach § 14, 2 nur dann eintreten, wenn f eine Form ungerader Ordnung ist.

Alsdann werden alle Koefficienten in 3)

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m,$$

sowie Δ, Invarianten von f. Die Darstellung 3) wird in diesem Fall eine typische genannt.

Seien die beiden linearen Kovarianten von $f(x, y)$

4) $$Px + Qy, \quad P'x + Q'y,$$

deren Determinante

4a) $$\Delta = PQ' - P'Q,$$

so können wir in diesem Falle in 1) direkt x, y für x', y' setzen und die Substitutionen 1) und 2) schreiben

5) $$\begin{cases} \sqrt{\Delta} \,.\, \xi = Px + Qy, \\ \sqrt{\Delta} \,.\, \eta = P'x + Q'y, \end{cases}$$

oder

5a) $$\begin{cases} \sqrt{\Delta} \,.\, x = Q'\xi - Q\eta, \\ \sqrt{\Delta} \,.\, y = -P'\xi + P\eta. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

6) $$(\sqrt{\Delta})^m \,.\, f(x, y) = A_0\xi^m + \binom{m}{1} A_1\xi^{m-1}\eta + \ldots + A_m\eta^m,$$

wo

$$A_0 = f(Q', -P');$$

allgemein

6a) $$\begin{cases} m(m-1)\ldots(m-k+1)\,A_k = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)^k f, \\ \text{wo} \\ \quad x = Q', \quad y = -P', \\ \quad x_1 = -Q, \quad y_1 = P. \end{cases}$$

Die vier Relationen ergeben sich, indem man die beiden Kovarianten 4) aus 6) bildet.

Wir benutzen diese Darstellung nun, um einen wichtigen Satz von Clebsch* zu beweisen, welcher für eine Klasse von binären Formen die Frage beantwortet, unter welchen Umständen zwei binäre Formen f, f' linear in einander transformiert werden können. Dieser Satz lautet:

3. Wenn zwei Formen $f(x, y)$, $f'(x', y')$, m^{ter} Ordnung, gleiche absolute Invarianten besitzen, wenn ferner $f(x, y)$ zwei lineare Kovarianten $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ von nicht verschwindender Determinante besitzt, und dieselben Kovarianten, für $f'(x', y')$ gebildet, also $\varphi'(x', y')$, $\psi'(x', y')$, ebenfalls eine nicht verschwindende Determinante haben, so hat man vermöge der linearen Substitution

* Binäre Formen, § 92, pag. 365.

$$7) \qquad \begin{cases} \varphi'(x', y') = \lambda \cdot \varphi(x, y), \\ \psi'(x', y') = \mu \cdot \psi(x, y), \end{cases}$$

wo λ, μ Konstante vorstellen, die Gleichung

$$f'(x', y') = f(x, y).$$

Unter absoluter Invariante ist eine solche verstanden, welche bei irgend einer linearen Transformation von f unverändert bleibt.* Die Gleichheit entsprechender absoluter Invarianten ist also eine notwendige Bedingung für die Transformierbarkeit von f' in f.

Um nun die etwaigen weiteren Bedingungen für die Überführbarkeit von f' in f zu erhalten, sei zunächst r die hierzu zu benutzende Substitutionsdeterminante, i', i irgend zwei entsprechende Invarianten vom Gewicht p, j', j solche vom Gewicht q, so hat man

$$8) \qquad \begin{cases} i' = r^p \cdot i, \\ j' = r^q \cdot j, \end{cases}$$

oder

$$8\,a) \qquad \frac{i'^q}{j'^p} = \frac{i^q}{j^p}.$$

Hier ist $\frac{i^q}{j^p}$ eine absolute Invariante. Besteht die Gleichung 8a) nach der Annahme, so liefert irgend eine der Gleichungen 8) die Grösse r.

Es sei ferner

$$9) \qquad \varphi = Px + Qy, \quad \psi = P'x + Q'y, \quad \Delta = PQ' - P'Q,$$

wo Δ der Voraussetzung nach nicht verschwinde.

Man kann dann diese beiden Kovarianten zur typischen Darstellung nach Nr. 2 benutzen und hat nach 5), 6):

$$10) \qquad \begin{cases} \sqrt{\Delta} \cdot \xi = \varphi, \quad \sqrt{\Delta} \cdot \eta = \psi, \\ (\sqrt{\Delta})^m \cdot f = A_0 \xi^m + \binom{m}{1} A_1 \xi^{m-1} \eta + \ldots + A_m \eta^m, \end{cases}$$

und ebenso

$$11) \qquad \begin{cases} \sqrt{\Delta'} \cdot \xi' = \varphi', \quad \sqrt{\Delta'} \cdot \eta' = \psi', \\ (\sqrt{\Delta'})^m \cdot f' = A_0' \xi'^m + \binom{m}{1} A_1' \xi'^{m-1} \eta' + \ldots + A'_m \eta'^m, \end{cases}$$

wo auch Δ' von Null verschieden sein muss.

Seien nun ν, ν' die Grade von φ, ψ und

---

* Absolute Invarianten sind demnach entsprechend gebildete Quotienten von Potenzen von Invarianten, deren Zähler und Nenner gleichen Grad in den Koefficienten besitzen. Vergl. § 20, 2, Anmerkung 2.

$$\frac{m\nu-1}{2}=\pi,\quad \frac{m\nu'-1}{2}=\pi'$$

die Indices von φ, ψ, so würde für die fragliche lineare Transformation

12) $$\varphi'(x',y')=r^{\pi}.\varphi(x,y),\quad \psi'(x',y')=r^{\pi'}.\psi(x,y).$$

Umgekehrt hat man in 12) eine lineare Transformation mit dem Modul r, von welcher nur noch zu zeigen ist, dass sie f' in f überführt.

Aber man hat vermöge 12), indem man die Grade von A_0, A_1, ... berechnet:

$$\Delta'=r^{\pi+\pi'+1}.\Delta=r^{\frac{1}{2}m(\nu+\nu')}.\Delta,$$

$$A'_0=r^{m(\pi'+1)}.A_0=r^{\frac{m}{2}(m\nu'+1)}.A_0,$$

$$A'_1=r^{(m-1)(\pi'+1)+(\pi+1)}.A_1=r^{\frac{m}{2}[(m-1)\nu'+\nu+1]}.A_1,$$

$$A'_2=r^{(m-2)(\pi'+1)+2(\pi+1)}.A_2=r^{\frac{m}{2}[(m-2)\nu'+2\nu+1]}.A_2$$

allgemein

$$A'_k=r^{(m-k)(\pi'+1)+k(\pi+1)}.A_k=r^{\frac{m}{2}[(m-k)\nu'+k\nu+1]}.A_k;$$

ferner

$$\frac{\xi'}{\sqrt{\Delta'}}=\frac{\varphi'}{\Delta'}=r^{-(\pi'+1)}.\frac{\varphi}{\Delta}=r^{-(\pi'+1)}.\frac{\xi}{\sqrt{\Delta}},$$

$$\frac{\eta'}{\sqrt{\Delta'}}=\frac{\psi'}{\Delta'}=r^{-(\pi+1)}.\frac{\psi}{\Delta}=r^{-(\pi+1)}.\frac{\eta}{\sqrt{\Delta}},$$

so dass nach 10), indem man diese Werte in 11) einsetzt, folgt

$$f'(x',y')=f(x,y),$$

wie behauptet war.

Anmerkung. Für Formen gerader Ordnung kann man, indem man zur typischen Darstellung nach Nr. 1 dieses Paragraphen quadratische Kovarianten φ, ψ benutzt, einen dem Satz dieser Nummer analogen Satz aufstellen. Für diese Darstellung und den bezeichneten Satz von Clebsch sei indes auf dessen Binäre Formen, § 102 flg., verwiesen.

4. Typische Darstellung der Form fünfter Ordnung*.

Wir behandeln die Aufgabe, die Form fünfter Ordnung

$$f=a_0x^5+5a_1x^4y+10a_2x^3y^2+10a_3x^2y^3+5a_4xy^4+a_5y^5$$

so zu transformieren, dass die Koefficienten der Transformierten sämtlich Invarianten sind. Dazu benutzen wir die beiden linearen Kovarianten bezüglich fünften und siebenten Grades (vergl. § 18, 4)

* Cayley, Achtes Memoir on Quantics, Phil. Trans. 1867, pag. 541.

13) $$\varphi = Px + Qy, \quad \psi = P'x + Q'y,$$

deren Determinante ist

$$\Delta = PQ' - P'Q.$$

Bezeichnen nun J_4, J_8, J_{12}, J_{18} die vier fundamentalen Invarianten von f, so ist

14) $$\Delta = 2J_{12}.$$

Machen wir nun die Substitution

15) $$\begin{cases} \xi = \dfrac{1}{2\sqrt{J_{12}}}(Px + Qy), \\ \eta = \dfrac{1}{2\sqrt{J_{12}}}(P'x + Q'y), \end{cases}$$

woraus

15a) $$\begin{cases} \sqrt{J_{12}} \cdot x = Q'\xi - Q\eta, \\ \sqrt{J_{12}} \cdot y = -P'\xi + P\eta, \end{cases}$$

eine Substitution, deren Modul 2 ist. Hieraus findet man für $f(x,y)$ die typische Darstellung

16) $$(\sqrt{J_{12}})^5 . f(x,y) = A_0\xi^5 + 5A_1\xi^4\eta + 10A_2\xi^3\eta^2 + 10A_3\xi^2\eta^3 + 5A_4\xi\eta^4 + A_5\eta^5,$$

wo A_0, A_1, ..., A_5 Invarianten von f sind, und zwar

17) $$\begin{cases} A_0 = f(Q', -P'), \\ 5A_1 = \left(x_1\dfrac{\partial}{\partial x} + y_1\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f, \\ 20A_2 = \left(x_1\dfrac{\partial}{\partial x} + y_1\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 5.4\ldots(5-k+1)A_k = \left(x_1\dfrac{\partial}{\partial x} + y_1\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^k f \end{cases}$$

für $x = Q'$, $y = -P'$, $x_1 = -Q$, $y_1 = P$.

Die Invarianten A_0, A_1, ..., A_5 sind bezüglich vom 36ten, 34ten, 32ten, 30ten, 28ten, 26ten Grad, wonach A_1, A_3, A_5 die Invariante J_{18} als Faktor enthalten müssen (vergl. § 12, 15), so dass nach Absonderung desselben noch Formen bezüglich vom 16ten, 12ten, 8ten Grad bleiben.

Dass A_0, A_1, ..., A_5 Invarianten sind, lässt sich nach Cayley auch so beweisen:

Nach § 10, 8 genügt jede Invariante den beiden Differentialgleichungen

$$0 = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + 5a_4 \frac{\partial}{\partial a_5},$$

$$0 = a_5 \frac{\partial}{\partial a_4} + 2a_4 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots + 5a_1 \frac{\partial}{\partial a_0},$$

oder $\delta = 0$, $\delta' = 0$.

Für die Kovarianten $Px + Qy$, $P'x + Q'y$ hat man aber die Relationen (vergl. § 14, 6, Anmerkung)

$$\delta P = 0, \quad \delta Q = P, \quad \delta P' = 0, \quad \delta Q' = P'.$$

Hiernach ist, indem man hierbei ξ, η als konstant zu betrachten hat,

$$\delta(Q'\xi - Q\eta) = P'\xi - P\eta,$$
$$\delta(-P'\xi + P\eta) = 0.$$

Wendet man die Operationen δ, δ' auf die rechte Seite von 16), die $= f(Q'\xi - Q\eta, \; -P'\xi + P\eta)$ ist, an, so findet man für $Q'\xi - Q\eta = p$, $-P'\xi + P\eta = q$:

$$\delta f(p, q) = (5a_0p^4q + 2 \cdot 10a_1p^3q^2 + 3 \cdot 10a_2p^2q^3 + 4 \cdot 5a_3pq^4 + 5a_4q^5) - (5a_0p^4q + 5 \cdot 4a_1p^3q^2 - 10 \cdot 3a_2p^2q^3 - 10 \cdot 2a_3pq^4 - 5a_4q^5) = 0$$

und ebenso

$$\delta' f(p, q) = 0.$$

Damit ist aber die Invarianteneigenschaft der Koefficienten der rechten Seite von 16) bewiesen.

Nach den Berechnungen von Hermite und Cayley* sind die Werte von A_0, A_1, ..., A_5 die folgenden:

$36A_0$	$36A_1$	$36A_2$	$36A_3$	$36A_4$	$36A_5$
$+J_4^7J_8$	$-J_4^4J_{18}$	$+J_4^6J_8$	$-J_4^3J_{18}$	$+J_4^5J_8$	$-J_4^2J_{18}$
$+J_4^6J_{12}$	$-3J_4^2J_8J_{18}$	$+J_4^5J_{12}$	$-3J_4J_8J_{18}$	$+J_4^4J_{12}$	$-3J_8J_{18}$
$+6J_4^5J_8^2$	$+24J_4J_{12}J_{18}$	$+6J_4^4J_8^2$	$+12J_{12}J_{18}$	$+6J_4^3J_8^2$	
$-39J_4^4J_8J_{12}$		$-27J_4^3J_8J_{12}$		$-15J_4^2J_8J_{12}$	
$+9J_4^3J_8^3$		$+9J_4^2J_8^3$		$+9J_4J_8^3$	
$-54J_4^3J_{12}^2$		$-42J_4^2J_{12}^2$		$-30J_4J_{12}^2$	
$-126J_4^2J_8^2J_{12}$		$-90J_4J_8^2J_{12}$		$-54J_8^2J_{12}$	
$+288J_4J_8J_{12}^2$		$+144J_8J_{12}^2$			
$+1152J_{12}^3$					

Für $J_{18} = 0$ wird

18) $$(\sqrt{J_{12}})^5 \cdot f(x, y) = \xi(A_0\xi^4 + 10A_2\xi^2\eta^2 + 5A_4\eta^4),$$

woraus zunächst die algebraische Auflösbarkeit der Gleichung $f(x, y) = 0$ für $J_{18} = 0$ folgt, ein Resultat, das schon in § 13, 2 erhalten war. Ferner folgt aber aus 18), dass alsdann die lineare Kovariante

* Phil. Trans. 1867, pag. 554 (Addition).

fünften Grades, $Px+Qy$, ein Faktor von f wird, und endlich folgt für den übrigbleibenden Faktor vierter Ordnung von f (da derselbe nur die Quadrate von ξ, η enthält), dass dessen Kovariante T ebenfalls $Px+Qy$ und ebenso $P'x+Q'y$ zum Faktor hat, dass also die Form f derart specialisiert ist, dass eine Wurzel von $f=0$ zugleich Wurzel der Gleichung sechsten Grades $T=0$ ist, wo T die Kovariante zu der zu den übrigen vier Wurzeln von $f=0$ gehörigen Form vierter Ordnung ist.

5. Eine andere typische Darstellung der Form fünfter Ordnung gründet sich auf die Substitution vom Modul $\frac{1}{2}$:

19) $$\begin{cases} 2\sqrt[4]{J_4}\,.\,\xi = x'+y' \\ 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{J_4}}\cdot\eta = -x'+y' \end{cases}$$

oder

19a) $$\begin{cases} x' = \sqrt[4]{J_4}\,.\,\xi - \dfrac{1}{\sqrt[4]{J_4}}\cdot\eta \\ y' = \sqrt[4]{J_4}\,.\,\xi + \dfrac{1}{\sqrt[4]{J_4}}\cdot\eta. \end{cases}$$

Diese Substitution liefert

20) $$(2\sqrt{J_{12}})^5\,.\,f(x,y) = f\left\{\left[\left(\frac{Q'}{\sqrt[4]{J_4}}+Q\sqrt[4]{J_4}\right)x'+\left(\frac{Q'}{\sqrt[4]{J_4}}-Q\sqrt[4]{J_4}\right)y'\right],\right.$$
$$\left.\left[\left(\frac{-P'}{\sqrt[4]{J_4}}-P\sqrt[4]{J_4}\right)x'+\left(\frac{-P'}{\sqrt[4]{J_4}}+P\sqrt[4]{J_4}\right)y'\right]\right\}$$

oder

20a) $$f(x,y) = B_0x'^5+5B_1x'^4y'+10B_2x'^3y'^2+10B_3x'^2y'^3+5B_4x'y'^4+B_5y'^5,$$

wo die B_i Ausdrücke ersten Grades werden.

Bezeichnet man nun die quadratische Invariante der vierten Polare von f, d. h. die quadratische Kovariante zweiten Grades durch (vergl. § 15, 4 und § 17, 2)

21) $$i = (a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)x^2+(a_0a_5-3a_1a_4+2a_2a_3)xy+$$
$$+(a_1a_5-4a_2a_4+3a_3^2)y^2 = C_0x^2+2C_1xy+C_2y^2,$$

so ist nach § 18, 4 und § 17, 2

22) $$J_4 = [i,i] = 4(C_1^2-C_0C_2);$$
$$P'x+Q'y = -2\begin{vmatrix} P & Q \\ C_0x+C_1y & C_1x+C_2y \end{vmatrix};$$
$$\begin{vmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{vmatrix} = -2(C_0Q^2-2C_1QP+C_2P^2) = 2J_{12};$$
$$i = \frac{1}{J_{12}}\{C_0(Q'\xi-Q\eta)^2+2C_1(Q'\xi-Q\eta)(-P'\xi+P\eta)+$$
$$+C_2(-P'\xi+P\eta)^2\} = \frac{1}{J_{12}}\{J_4J_{12}\xi^2-J_{12}\eta^2\} = J_4\xi^2-\eta^2,$$

also

22a) $$i = \tfrac{1}{4}\sqrt{J_4}\{(x'+y')^2-(x'-y')^2\} = \sqrt{J_4}.x'y';$$

Ersetzt man in der Form i, geschrieben in den Variabeln x, y, die Variabeln x, y bezüglich durch $\frac{\partial}{\partial y}$, $-\frac{\partial}{\partial x}$ und wendet die hierin angedeuteten Operationen zweimal hintereinander auf die Form f selbst an und führt diesen Prozess ebenso an den in den Variabeln x', y' ausgedrückten Formen i und $f = f'(x', y')$ aus, so ist nach der symbolischen Bezeichnungsweise des § 18, 4, da der Modul der Substitution zwischen den x, y und x', y' gleich 1 ist:

$$[i(x,y), f(x,y)] = [\sqrt{J_4}x'y', f'(x',y')] = -\sqrt{J_4}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial y'}f'(x',y'),$$

$$\Big[i(x,y), [i(x,y), f(x,y)]\Big] = J_4\cdot\frac{\partial^4 f'(x',y')}{\partial x'^2\,\partial y'^2} = 120 J_4(B_2x' + B_3y').$$

Die lineare Form fünften Grades $J_4(B_2x'+B_3y')$ ist aber von der Form $Px+Qy$ nicht verschieden. Denn setzt man wie in § 15, 5, II und in den Tabellen:

$$j = -\tfrac{1}{60}[i, f],$$

so ist

$$Px+Qy = -\tfrac{1}{2}[i,j] = J_4(B_2x'+B_3y').$$

Nun hat man nach 15) und 19)

$$\frac{Px+Qy}{2\sqrt{J_{12}}} = \xi = \frac{x'+y'}{2\sqrt[4]{J_4}}$$

oder

$$Px+Qy = \frac{\sqrt{J_{12}}}{\sqrt[4]{J_4}}(x'+y'),$$

woraus

$$B_2x'+B_3y' = \frac{\sqrt{J_{12}}}{(\sqrt[4]{J_4})^5}(x'+y')$$

und endlich

23) $$B_2 = B_3 = \frac{\sqrt{J_{12}}}{(\sqrt[4]{J_4})^5} = \sqrt{C},$$

so dass

23a) $$f(x,y) = B_0x'^5 + 5B_1x'^4y' + 10\sqrt{C}.x'^2y'^2(x'+y') + 5B_4x'y'^4 + B_5y'^5$$

und

$$i(x,y) = \sqrt{J_4}.x'y'.$$

Damit nun der in 21) gegebene Ausdruck von i, für die rechte Seite von 23a) gebildet, den Wert 22a) annimmt, müssen zwischen den Koefficienten B_0, B_1, B_4, B_5, $\sqrt{C}$ die Relationen bestehen

$$24) \quad \begin{cases} B_0 B_4 - 4 B_1 \sqrt{C} + 3C = 0, \\ B_1 B_5 - 4 B_4 \sqrt{C} + 3C = 0, \\ B_0 B_5 - 3 B_1 B_4 + 2C = \sqrt{J_4}. \end{cases}$$

Die Koefficienten

$$B_0, \quad B_1, \quad C, \quad B_4, \quad B_5$$

der Hermiteschen Darstellung sind sämtlich Invarianten von f und können daher durch die Formen

$$J_4, \quad J_8, \quad J_{12}$$

ausgedrückt werden. Setzt man

$$B_0 B_5 = A, \quad B_1 B_4 = B,$$

so hat man nach der dritten Gleichung in 24) die Relation

$$25) \quad A - 3B + 2C = \sqrt{J_4},$$

wo

$$C = J_{12} : (\sqrt{J_4})^5.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$(9C^2 + 16BC - AB)^2 - 24^2 BC^3 = D,$$

so hat man zur Bestimmung von B_0, B_1 durch Auflösung der ersten beiden Gleichungen in 24):

$$25\,a) \quad \begin{cases} 72(\sqrt{C})^5 . B_0 = B(A - 16C)^2 - 9C^2(A + 16C) + (A - 16C)\sqrt{D}, \\ 24(\sqrt{C})^3 . B_1 = 9C^2 + 16BC - AB - \sqrt{D} \end{cases}$$

und durch Vertauschung der Zeichen von $\sqrt{D}$:

$$25\,b) \quad \begin{cases} 24(\sqrt{C})^3 . B_4 = 9C^2 + 16BC - AB + \sqrt{D}, \\ 72(\sqrt{C})^5 . B_5 = B(A - 16C)^2 - 9C^2(A + 16C) - (A - 16C)\sqrt{D}, \end{cases}$$

wo für die Grössen A, B, C die Relation 25) gilt.

Die noch fehlende Relation zwischen den Grössen A, B, C und den Invarianten J_4, J_8, J_{12} der Form f erhält man auf folgende Weise. Man bildet wieder wie oben an der typischen Darstellung 23a):

$$26) \quad [i, f] = -\sqrt{J_4} \frac{\partial^2 f'(x', y')}{\partial x' \, \partial y'} =$$

$$= -20\sqrt{J_4}(B_1 x'^3 + 3\sqrt{C} x'^2 y' + 3\sqrt{C} x' y'^2 + B_4 y'^3) = -60j.$$

Bildet man nun die Funktionaldeterminante

$$27) \quad -(i, j) = J_4 (B_1 x'^3 + \sqrt{C} . x'^2 y' - \sqrt{C} x' y'^2 - B_4 y'^3) = \varphi_{3,5}$$

und ferner die Funktionaldeterminante

$$28)\quad (i,\ Px+Qy)=(\sqrt{J_4}.x'y',\ J_4\sqrt{C}(x'+y'))=P'x+Q'y=$$
$$=-(\sqrt{J_4})^3.\sqrt{C}(x'-y')=\varphi_{1,7},$$

so hat man die Formen 11) und 15) des auf pag. 199 aufgestellten Formensystems in typischer Darstellung, wobei sich 28) übrigens direkt aus 15) und 19) ergäbe.

Die kubischen Formen

$$j \text{ und } (i,j),$$

die bezüglich vom dritten und fünften Grad sind, liefern alsdann durch den Prozess

$$-\tfrac{1}{4}[j,\ (i,j)]$$

die Invariante achten Grades:

$$29)\qquad J_8=(\sqrt{J_4})^3\cdot(-B+C),$$

so dass man nun die folgenden Relationen hat:

$$30)\quad \begin{cases} A-3B+2C=\sqrt{J_4}, \\ C=\dfrac{J_{12}}{(\sqrt{J_4})^5}, \\ -B+C=\dfrac{J_8}{(\sqrt{J_4})^3}, \end{cases}$$

woraus man ableitet:

$$30a)\quad \begin{cases} A=\dfrac{J_4^3-3J_4J_8+J_{12}}{(\sqrt{J_4})^5}, \\ B=\dfrac{-J_4J_8+J_{12}}{(\sqrt{J_4})^5}, \\ C=\dfrac{J_{12}}{(\sqrt{J_4})^5}, \end{cases}$$

was dann unmittelbar die Werte der typischen Koefficienten

$$B_0,\quad B_1,\quad B_4,\quad B_5$$

ausgedrückt als Funktionen von

$$J_4,\quad J_8,\quad J_{12}$$

liefert.

Da aber diese Koefficienten B und $\sqrt{C}$ homogene Funktionen erster Dimension der Koefficienten von f sind, so genügt es, den ganzen Ausdruck auf der rechten Seite von 23a) durch $\sqrt[4]{J_4}$ zu dividieren, damit nur noch zwei Parameter

$$31)\qquad H=\frac{J_8}{J_4^2},\quad H'=\frac{J_{12}}{J_4^3}$$

auftreten. Man erhält dann

32) $$\frac{f(x,y)}{\sqrt[4]{J_4}} = B'_0 x'^5 + 5B'_1 x'^4 y' + 10\sqrt{H'} x'^2 y'^2 (x'+y') + \\ + 5B'_4 x' y'^4 + B'_5 y'^5,$$

wo

32a) $$\begin{cases} B'_0 = \dfrac{B_0}{\sqrt[4]{J_4}}, \quad B'_1 = \dfrac{B_1}{\sqrt[4]{J_4}}, \quad B'_4 = \dfrac{B_4}{\sqrt[4]{J_4}}, \quad B'_5 = \dfrac{B_5}{\sqrt[4]{J_4}}, \\ H' = \dfrac{C}{\sqrt{J_4}} = \dfrac{J_{12}}{J_4^3}, \end{cases}$$

$$A' = \frac{A}{\sqrt{J_4}} = 1 + H' - 3H,$$

$$B' = \frac{B}{\sqrt{J_4}} = H' - H$$

und die aus 25a) hervorgehenden Gleichungen.

Zusammenfassend kann man die Hermitesche typische Darstellung so aussprechen:

Vermöge der Substitution vom Modul 1

$$2\sqrt[4]{J_4}\,.\sqrt{J_{12}}\,.x = (Q' + Q\sqrt{J_4})\,.x' + (Q' - Q\sqrt{J_4})\,.y',$$
$$2\sqrt[4]{J_4}\cdot\sqrt{J_{12}}\,.y = -(P' + P\sqrt{J_4})\,x' + (-P' + P\sqrt{J_4})\,y',$$

wo

$$Px + Qy, \quad P'x + Q'y$$

die linearen Kovarianten fünften und siebenten Grades der Form fünfter Ordnung $f(x,y)$ vorstellen, geht

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt[4]{J_4}}$$

in die typische Form 32) über, deren Koefficienten durch 32a) bestimmt sind und nur noch zwei Parameter, die absoluten Invarianten H und H' 31), enthalten. Die Variabeln x', y' sind die linearen Faktoren der quadratischen Kovariante zweiten Grades i von f.

Man hat also hier eine analoge Darstellung von $f(x,y)$, wie die erst durch Auflösung einer kubischen Gleichung erzielte kanonische Gleichungsform von f in § 8, 3 und § 13, 1 und 2. Auch die letztere Form enthält nur die beiden Parameter B, C, welche nach § 13, 2 nur von den zwei absoluten Invarianten

$$H = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1^2}, \quad H' = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1^3}$$

abhängen.

Siebenter Abschnitt.

Specielle Theorien.

§ 23. Der Reciprocitätssatz.

1. Nach Hermite* entspricht jeder Kovariante (Invariante) ϱ^{ten} Grades, ν^{ter} Ordnung, einer Form m^{ter} Ordnung eine Kovariante (Invariante) m^{ten} Grades, ν^{ter} Ordnung, einer Form ϱ^{ter} Ordnung.

So sind die Invarianten der quadratischen Form allgemein von der Form D^{μ}, also giebt es eine von jedem geraden Grade. Aus dem Hermiteschen Satz folgt dann unmittelbar, dass jede Form gerader Ordnung eine quadratische Invariante besitzt.

Ferner zerfällt jede Kovariante einer quadratischen Form f in das Produkt einer Potenz der Invariante D mit einer Potenz der Form f selbst. Sei etwa

$$\varphi = D^{\mu} . f$$

eine Form $(2\mu+1)^{\text{ten}}$ Grades. Also hat jede Form ungerader Ordnung eine Kovariante zweiten Grades und zweiter Ordnung u. s. w.

Beweis des Hermiteschen Reciprocitätssatzes.

Sei φ eine Kovariante ϱ^{ten} Grades, ν^{ter} Ordnung, der Form m^{ter} Ordnung

$$1) \qquad f(x,y) = a_0 x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \ldots + a_m y^m = \\ = a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \ldots (x - \alpha_m y),$$

wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Wurzeln von $f = 0$ bedeuten, so dass

$$f = a_0 . N(x - \alpha y),$$

wo N die Norm der m-deutigen Funktion $x - \alpha y$ bezeichnet.** Dann sind die Koefficienten der Form

---

* Hermite, Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées, Cambridge and Dublin Math. Journ. 1854.

** d. h. das Produkt der m Werte von $x - \alpha y$.

2) $$F = a_0^{\varrho} . N\{z_0 + \alpha z_1 + \alpha^2 z_2 + \ldots + \alpha^{\varrho} z_{\varrho}\}$$

ganze Funktionen ϱ^{ten} Grades der Koefficienten von f, so dass jede ganze Funktion ϱ^{ten} Grades der Koefficienten von f, wie z. B. die Koefficienten einer Kovariante ϱ^{ten} Grades von f oder eine Invariante ϱ^{ten} Grades von f, sich linear durch die Koefficienten von F ausdrücken lässt. Denn die Koefficienten von F stellen alle möglichen einfachen symmetrischen Aggregate bis zum ϱ^{ten} Grad der Wurzeln α vor, durch welche also jede ganze Funktion ϱ^{ten} Grades der $a_0, a_1, \ldots, a_m$ linear ausgedrückt werden kann.

Da es ferner ebensoviele irreducible einfache Koefficientenaggregate ϱ^{ten} Grades, als irreducible einfache Aggregate, welche die Wurzeln symmetrisch bis zum ϱ^{ten} Grade incl. enthalten, giebt, so kann folglich jede ganze Funktion der $a_0, a_1, \ldots, a_m$ ϱ^{ten} Grades nur auf eine einzige Art linear durch die Koefficienten von F dargestellt werden.

Zunächst führen wir nun die Formen f, φ, F in symbolischer Darstellung ein, nämlich

3) $$f = (bx + cy)^m,$$

wo

$$a_0 = (b^m), \quad a_1 = (b^{m-1} c), \quad a_2 = (b^{m-2} c^2), \quad \ldots$$

Dann ist

$$\varphi = \varphi\{(b^m), (b^{m-1} c), \ldots, (c^m), x, y\}$$

und

4) $$F = (A_0 z_0 + A_1 z_1 + A_2 z_2 + \ldots + A_{\varrho} z_{\varrho})^m,$$

wo die Koefficienten die symbolische Form haben

$$(A_0^m), \quad (A_0^{m-1} A_1), \quad \ldots$$

Die Koefficienten von φ sind lineare Funktionen dieser Symbole.

Nun transformiere man f durch die lineare Substitution

5) $$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta,$$

wonach α übergeht in

$$\frac{\alpha q' - q}{p - \alpha p'}.$$

Führt man diesen Ausdruck an Stelle von α in 2) ein und bedenkt, dass der Nenner

$$(p - p'\alpha_1)^{\varrho} . (p - p'\alpha_2)^{\varrho} \ldots$$

durch den Faktor

$$a_0^{\varrho} . N(p - p'\alpha)^{\varrho},$$

in den a_0^{ϱ} bei der Transformation übergeht, zerstört wird, so geht der Ausdruck

$$z_0 + \alpha z_1 + \alpha^2 z_2 + \ldots + \alpha^{\varrho} z_{\varrho}$$

bei der Transformation über in:

$$z_0(p-\alpha p')^\varrho + z_1(p-\alpha p')^{\varrho-1}(\alpha q'-q) + z_2(p-\alpha p')^{\varrho-2}(\alpha q'-q)^2 + \ldots$$

Ordnet man nach Potenzen von α, so kommt

$$\begin{aligned} & z_0 p^\varrho - z_1 p^{\varrho-1} q + z_2 p^{\varrho-2} q^2 - \ldots - \\ & \quad - \alpha \left\{ z_0 \binom{\varrho}{1} p^{\varrho-1} p' - z_1 (p^{\varrho-1} q' + (\varrho-1) p^{\varrho-2} p' q) + \right. \\ & \qquad \left. + z_2 (2 p^{\varrho-2} q q' + (\varrho-2) p^{\varrho-3} p' q^2) - \ldots \right\} + \\ & \quad + \alpha^2 \left\{ z_0 \binom{\varrho}{2} p^{\varrho-2} p'^2 - \ldots \right\} - \ldots \end{aligned}$$

Der symbolische Ausdruck 4)

$$6) \qquad A_0 z_0 + A_1 z_1 + A_2 z_2 + \ldots + A_\varrho z_\varrho$$

wird dann erhalten, indem man die neuen Koefficienten der Potenzen von α mit A_0, A_1, ..., A_ϱ multipliziert, also zu

$$\begin{aligned} & z_0 \left\{ A_0 p^\varrho - \binom{\varrho}{1} A_1 p^{\varrho-1} p' + \binom{\varrho}{2} A_2 p^{\varrho-2} p'^2 - \ldots \right\} - \\ & - z_1 \{ A_0 p^{\varrho-1} q - A_1 (p^{\varrho-1} q' + (\varrho-1) p^{\varrho-2} p' q) + \ldots \} + \\ & + z_2 \{ A_0 p^{\varrho-2} q^2 - \ldots \} - \ldots, \end{aligned}$$

und setzt man

$$7) \qquad \begin{cases} A'_0 = A_0 p^\varrho - \binom{\varrho}{1} A_1 p^{\varrho-1} p' + \binom{\varrho}{2} A_2 p^{\varrho-2} p'^2 - \ldots \\ A'_1 = - A_0 p^{\varrho-1} q + A_1 (p^{\varrho-1} q' + (\varrho-1) p^{\varrho-2} p' q) - \ldots \\ A'_2 = A_0 p^{\varrho-2} q^2 - \ldots \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

so geht der symbolische Ausdruck 6) durch die Substitution 5) über in

$$8) \qquad A'_0 z_0 + A'_1 z_1 + A'_2 z_2 + \ldots + A'_\varrho z_\varrho .$$

Man bemerkt sofort, dass die Koefficienten

$$A'_0, \quad A'_1, \quad A'_2, \quad \ldots$$

gerade so mit den ursprünglichen Koefficienten

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots$$

verbunden sind, als hätte man die Form

$$9) \qquad A_0 x^\varrho - \binom{\varrho}{1} A_1 x^{\varrho-1} y + \ldots$$

vermittelst der Substitution 5) in

$$9a) \qquad A'_0 \xi^\varrho - \binom{\varrho}{1} A'_1 \xi^{\varrho-1} \eta + \ldots$$

transformiert. Vergleiche § 10, 2, 5) oder die Beispiele pag. 104 und 106.

Nun sind die Koefficienten der Kovariante φ von f lineare Funktionen der symbolischen Koefficienten

$$(A_0^m),\quad (A_0^{m-1}A_1),\quad (A_0^{m-2}A_1^2),\quad \ldots,$$

die Koefficienten der Kovariante φ der durch 5) transformierten Form f dieselben linearen Funktionen der Symbole

$$(A'^m_0),\quad (A'^{m-1}_0A'_1),\quad (A'^{m-2}_0A'^2_1),\quad \ldots,$$

und man hat

10) $$\varphi\{(A'^m_0), (A'^{m-1}_0A'_1), (A'^{m-2}_0A'^2_1), \ldots, \xi, \eta\} = r^\mu.\varphi\{(A_0^m), (A_0^{m-1}A_1), (A_0^{m-2}A_1^2), \ldots, x, y\}.$$

Aber aus der obigen Bemerkung über den Zusammenhang zwischen den A und den A' erhellt, dass man die Gleichung 10) noch auf eine zweite Weise auffassen kann. Man kann die Form 9) mit wirklichen, nicht symbolischen Koefficienten A zu Grunde gelegt denken, dieselbe vermöge 5) in die Form 9a) überführen, wo die A' vermöge 7) aus den A hervorgehen; und vermöge derselben linearen Substitution 5) geht alsdann nach 10), die sich nun mit nicht symbolischen Koefficienten schreibt:

$$\varphi\{A'^m_0, A'^{m-1}_0A'_1, \ldots, \xi, \eta\} = r^\mu.\varphi\{A_0^m, A_0^{m-1}A_1, \ldots, x, y\},$$

die Form φ, welche jetzt zu 9) gehört, in dieselbe Form φ für die transformierte Form 9a) über. Also ist φ alsdann eine Kovariante ν^{ter} Ordnung der Form ϱ^{ter} Ordnung 9) und zwar m^{ten} Grades, da φ eine lineare Funktion der A_0^m, $A_0^{m-1}A_1$, ... wird. Vertauscht man noch die Vorzeichen von A_1, A_3, A_5, ..., so erhält man in φ eine Kovariante von

11) $$A_0x^\varrho + \binom{\varrho}{1}A_1x^{\varrho-1}y + \ldots + A_\varrho y^\varrho.$$

Anmerkung. Einen anderen einfacheren Beweis des Reciprocitätssatzes werden wir in § 26 geben.

2. Bildung der quadratischen Invariante einer Form gerader Ordnung.

Alle Invarianten der quadratischen Form

12) $$f = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = a_0(x-\alpha_1y)(x-\alpha_2y)$$

lassen sich als ganze Potenzen der Invariante

$$D = a_0a_2 - a_1^2$$

darstellen, sind also von der Form

13) $$J = (-D)^\mu = a_0^{2\mu}(\alpha_1-\alpha_2)^{2\mu}.$$

Also hat jede Form gerader Ordnung eine quadratische Invariante.

Bilden wir zur Bestimmung derselben die Form F:

14) $$F = a_0^{2\mu}(z_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_1^2 z_2 + \ldots + \alpha_1^{2\mu} z_{2\mu}) \cdot (z_0 + \alpha_2 z_1 + \alpha_2^2 z_2 + \ldots + \alpha_2^{2\mu} z_{2\mu})$$

oder symbolisch

14a) $$F = (A_0 z_0 + A_1 z_1 + \ldots + A_{2\mu} z_{2\mu})^2,$$

wo

15) $$\begin{cases} (A_i^2) = a_0^{2\mu} \cdot \alpha_1^i \alpha_2^i, \\ 2(A_i A_j) = a_0^{2\mu}(\alpha_1^i \alpha_2^j + \alpha_1^j \alpha_2^i). \end{cases}$$

Nun ist

$$J = a_0^{2\mu}(\alpha_1 - \alpha_2)^{2\mu} = a_0^{2\mu}\left\{(\alpha_1^{2\mu} + \alpha_2^{2\mu}) - \binom{2\mu}{1}(\alpha_1^{2\mu-1}\alpha_2 + \alpha_2^{2\mu-1}\alpha_1) + \binom{2\mu}{2}(\alpha_1^{2\mu-2}\alpha_2^2 + \alpha_2^{2\mu-2}\alpha_1^2) - \ldots\right\}$$

oder in symbolischer Form nach 15)

16) $$J = 2(A_0 A_{2\mu}) - 2\binom{2\mu}{1}(A_1 A_{2\mu-1}) + 2\binom{2\mu}{2}(A_2 A_{2\mu-2}) - \ldots + (-1)^\mu \binom{2\mu}{\mu}(A_\mu^2).$$

Betrachtet man die rechte Seite von J als nicht symbolisch,

$$J = 2A_0 A_{2\mu} - 2\binom{2\mu}{1} A_1 A_{2\mu-1} + \ldots + (-1)^\mu \binom{2\mu}{\mu} A_\mu^2,$$

so stellt J die quadratische Invariante der Form $2\mu^{\text{ter}}$ Ordnung (nach Vertauschung der Vorzeichen von A_1, A_3, A_5, ...)

$$A_0 x^{2\mu} + \binom{2\mu}{1} A_1 x^{2\mu-1} y + \ldots + A_{2\mu} y^{2\mu}$$

dar, die § 15, 5, Anmerkung, auf anderem Wege gefunden wurde.

3. Bildung der quadratischen Kovariante zweiten Grades für Formen ungerader Ordnung.

Bekanntlich besitzt die quadratische Form keine fundamentale Kovariante ausser der Form f selber. Jede Kovariante zerfällt in das Produkt einer ganzen Potenz der Invariante D mit einer ganzen Potenz der Form f, so dass

17) $$\varphi = D^\mu \cdot f^\nu.$$

Eine solche Form ist $(2\mu + \nu)^{\text{ten}}$ Grades und $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung. Setzt man

$$2\mu + \nu = m,$$

so besitzt nach dem Hermiteschen Satz jede Form m^{ter} Ordnung so viele Kovarianten zweiten Grades, gerader Ordnung, als die Gleichung

$$2\mu + \nu = m$$

positive, ganze Lösungen hat.

Betrachten wir den speciellen Fall, wo $\nu = 1$. Es hat jede Form ungerader Ordnung ($m = 2\mu + 1$) eine quadratische Kovariante zweiten Grades.

Die quadratische Kovariante der quadratischen Form f sei

$$18) \qquad \varphi = (-D)^{\mu}.f = C_0x^2 + 2C_1xy + C_2y^2,$$

wo

$$18a) \qquad \begin{cases} C_0 = a_0^{2\mu+1}.(\alpha_1 - \alpha_2)^{2\mu}, \\ 2C_1 = -a_0^{2\mu+1}.(\alpha_1 - \alpha_2)^{2\mu}.(\alpha_1 + \alpha_2), \\ C_2 = a_0^{2\mu+1}.(\alpha_1 - \alpha_2)^{2\mu}.\alpha_1\alpha_2. \end{cases}$$

Die Koefficienten C_0, C_1, C_2 können nach Nr. 1 dieses Paragraphen linear durch die Koefficienten der Form

$$F = a_0^{2\mu+1}(z_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_1^2 z_2 + \ldots + \alpha_1^{2\mu+1} z_{2\mu+1}) \cdot \\ \cdot (z_0 + \alpha_2 z_1 + \alpha_2^2 z_2 + \ldots + \alpha_2^{2\mu+1} z_{2\mu+1}),$$

die symbolisch lautet

$$F = (A_0 z_0 + A_1 z_1 + \ldots + A_{2\mu+1} z_{2\mu+1})^2,$$

ausgedrückt werden, wo

$$(A_i^2) = a_0^{2\mu+1}.\alpha_1^i \alpha_2^i, \qquad 2(A_iA_j) = a_0^{2\mu+1}(\alpha_1^i \alpha_2^j + \alpha_1^j \alpha_2^i).$$

Man findet

$$C_0 = 2(A_0A_{2\mu}) - 2\binom{2\mu}{1}(A_1A_{2\mu-1}) + 2\binom{2\mu}{2}(A_2A_{2\mu-2}) - \ldots + \\ + (-1)^{\mu}\binom{2\mu}{\mu}(A_\mu^2),$$

$$-2C_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)C_0 = a_0^{2\mu+1}\Big\{(\alpha_1^{2\mu+1} + \alpha_2^{2\mu+1}) - \\ - \Big[\binom{2\mu}{1} - 1\Big](\alpha_1^{2\mu}\alpha_2 + \alpha_2^{2\mu}\alpha_1) + \\ + \Big[\binom{2\mu}{2} - \binom{2\mu}{1}\Big](\alpha_1^{2\mu-1}\alpha_2^2 + \alpha_2^{2\mu-1}\alpha_1^2) - \ldots\Big\} = 2(A_0A_{2\mu+1}) - \\ - 2\Big[\binom{2\mu}{1} - 1\Big](A_1A_{2\mu}) + 2\Big[\binom{2\mu}{2} - \binom{2\mu}{1}\Big](A_2A_{2\mu-1}) - \ldots + \\ + (-1)^{\mu}2\Big[\binom{2\mu}{\mu} - \binom{2\mu}{\mu-1}\Big](A_\mu A_{\mu+1}),$$

$$C_2 = 2(A_1A_{2\mu+1}) - 2\binom{2\mu}{1}(A_2A_{2\mu}) + 2\binom{2\mu}{2}(A_3A_{2\mu-1}) - \ldots + \\ + (-1)^{\mu}2.\binom{2\mu}{\mu}(A_\mu A_{\mu+1}).$$

Setzt man aber auf der rechten Seite $(-1)^{i+j}A_iA_j$ statt der symbolischen Ausdrücke (A_iA_j), so werden C_0, $2C_1$, C_2 die Koefficienten der quadratischen Kovariante zweiten Grades der mit den A_i geschriebenen Form $(2\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Beispiele. I. Für die Form fünfter Ordnung, wo $\mu = 2$ ist, findet man so die quadratische Kovariante zweiten Grades:

$$i = (a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) x^2 + (a_0 a_5 - 3 a_1 a_4 + 2 a_2 a_3) xy + \\ + (a_1 a_5 - 4 a_2 a_4 + 3 a_3^2) y^2.$$

II. Für die Form dritter Ordnung, wo $\mu = 1$ ist, findet man die quadratische Kovariante zweiten Grades

$$\Delta = (a_0 a_2 - a_1^2) x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) xy + (a_1 a_3 - a_2^2) y^2.$$

Anmerkung. Multipliziert man die Kovariante Δ der kubischen Form mit der μ^{ten} Potenz der Invariante vierten Grades der kubischen Form, so entsteht eine Kovariante zweiter Ordnung und $(4\mu+2)^{\text{ten}}$ Grades. Also besitzt jede Form $(4\mu+2)^{\text{ter}}$ Ordnung eine quadratische Kovariante dritten Grades.

4. Anwendung des Reciprocitätssatzes auf die Form fünfter Ordnung.

Nach § 12, 15 und § 13, 2 hängen alle Invarianten der Form fünfter Ordnung linear ab von gewissen Aggregaten der fundamentalen Invarianten J_4, J_8, J_{12}, J_{18} und können stets auf eine der beiden Formen

$$\Sigma B . J_4^p J_8^q J_{12}^r, \quad J_{18} \Sigma B' . J_4^{p'} J_8^{q'} J_{12}^{r'}$$

gebracht werden.

Denn sämtliche Invarianten der Form fünfter Ordnung sind geraden Grades (§ 10, 6), also entweder vom Grad 4μ oder vom Grad $4\mu+2$. Im ersteren Fall kann in dem Ausdruck der Invariante die Hermitesche Form achtzehnten Grades nicht linear vorkommen, da 18 nicht von der Form 4μ ist, während J_{18}^2 durch Formel 15), § 13, 2 weggeschafft wird, und eine solche Invariante ist daher darstellbar in der Form

$$J_{4\mu} = \Sigma B . J_4^p J_8^q J_{12}^r,$$

wo die B numerische Koefficienten sind.

Nach dem Reciprocitätssatz besitzt dann eine Form $4\mu^{\text{ter}}$ Ordnung ebensoviele linear von einander unabhängige Invarianten fünften Grades, als die Anzahl der ganzzahligen positiven Lösungen der Gleichung

$$4p + 8q + 12r = 4\mu$$

beträgt.

Ist die Invariante $(4\mu+2)^{\text{ten}}$ Grades, so kann sie auf die Form

$$J_{4\mu+2} = J_{18} \Sigma B' . J_4^{p'} J_8^{q'} J_{12}^{r'}$$

gebracht werden. Jede Form $(4\mu+2)^{\text{ter}}$ Ordnung besitzt also so viele Invarianten fünften Grades, als die Gleichung

$$4p' + 8q' + 12r' + 18 = 4\mu + 2$$

ganzzahlige, positive Lösungen hat.

So hat von den Formen von der Ordnung $4\mu+2$ erst die der Ordnung 18 eine Invariante fünften Grades.

Anmerkung. Durch den Hermiteschen Reciprocitätssatz wird der auf § 12, 8 beruhende Satz in § 12, 11, bez. der analoge aus § 18, 1 zu entnehmende Satz auf neue Weise beleuchtet, indem nicht allein die Anzahlen der Kovarianten ν^{ter} Ordnung, ϱ^{ten} Grades einer Form m^{ter} Ordnung und die derjenigen ν^{ter} Ordnung, m^{ten} Grades einer Form ϱ^{ter} Ordnung dieselbe werden, sondern auch die beiderseitigen Kovarianten selbst sich auseinander herleiten lassen.

§ 24. Die Hermitesche Form der Transformation von Tschirnhausen.

1. Die Transformation von Tschirnhausen* besteht bekanntlich darin, dass man durch eine höhere Substitution μ^{ter} Ordnung in einer gegebenen Gleichung m^{ter} Ordnung μ mittlere Glieder zum Verschwinden bringt. Sei

$$1) \qquad f = x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} + \binom{m}{2} a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0$$

eine Gleichung m^{ter} Ordnung. Macht man in derselben die Substitution

$$2) \qquad y = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + b_2 x^{\mu-2} + \ldots + b_\mu,$$

wo $\mu < m$, $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ unbestimmte Koefficienten bedeuten, so wird durch Elimination von x aus 1) und 2) eine Resultante (Resolvente) sich ergeben, die in Bezug auf y vom Grade m ist, also etwa

$$3) \qquad y^m + c_1 y^{m-1} + c_2 y^{m-2} + \ldots + c_m = 0$$

lautet. Die Koefficienten dieser Resultante sind ganze Funktionen der a_i und b_i. Bringt man in 3) die Koefficienten $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ zum Verschwinden, so hat man ein System von μ Bedingungsgleichungen für die μ Unbestimmten $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ aufzulösen, wodurch dieselben mehrdeutig bestimmt sind.

Bei kubischen und biquadratischen Gleichungen liefert die Tschirnhausensche Transformation durch eine quadratische Substitution eine Form der Gleichung, die ohne weiteres algebraisch lösbar ist. Um dieselbe herzustellen, hat man Gleichungen aufzulösen, deren Grad den dritten nicht übersteigt.

---

* Graf Tschirnhausen, Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione. Acta Erudit. Leipzig 1683, pag. 204. Vergleiche über die Methode: Baltzer, Determ. § 11, 4.

Setzt man bei kubischen Gleichungen

$$y = x^2 + b_1 x + b_2,$$

so ist die Resultante von der Form

$$y^3 + c_1 y^2 + c_2 y + c_3 = 0.$$

Aus $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ erhält man die Werte von b_1, b_2 durch Lösung einer linearen und quadratischen Gleichung.

Bei biquadratischen Gleichungen liefert die Substitution

$$y = x^2 + b_1 x + b_2$$

die Resultante

$$y^4 + c_1 y^3 + c_2 y^2 + c_3 y + c_4 = 0.$$

Aus

$$c_1 = 0, \quad c_3 = 0$$

erhält man dann die Werte von b_1, b_2 durch Lösung einer linearen und kubischen Gleichung.

Bei Gleichungen, deren Grad den vierten übersteigt, führt die angegebene Methode nicht mehr zum Ziel. Indessen hat Jerrard* gezeigt, dass in jeder Gleichung m^{ten} Grades die Glieder mit x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3} vermöge einer Tschirnhausenschen Substitution dritter Ordnung und durch Auflösung von Gleichungen, deren Grad den dritten nicht übersteigt, zum Verschwinden gebracht werden können. Wendet man den Jerrardschen Satz auf die allgemeine Gleichung fünften Grades an, so nimmt dieselbe die specielle Form

4) $$x^5 + Ax + B = 0$$

an, die durch weitere Transformation schliesslich auf die Form

4a) $$x^5 - x - a = 0$$

gebracht werden kann. Diese letztere Gleichung hat Hermite** mit Hilfe der Theorie der elliptischen Funktionen in transcendenter Weise auflösen gelehrt. Auf diese letzteren Untersuchungen und auf die in neuester Zeit von F. Klein und Gordan angestellten Untersuchungen***, welche die Reduktion der Gleichung fünften Grades auf die Form 4) und 4a) in ganz neuer Weise invarianten-theoretisch erledigen, kann hier nur verwiesen werden.

---

* Jerrard, On the algebraic resolution of equations of the fifth degree, Phil. Magaz. t. 19, 23, 24. Cayley, Phil. Magaz. t. 21, 23, 24.

** Hermite, Comptes Rendus 1858, 1865, 1866. Crelle Journal 59. Cambridge and Dubl. Math. Journal IX.

*** Math. Ann., Bd. IX, XII.

2. Hermite hat die nach Tschirnhausens Methode zu bildende Resolvente einer Gleichung $f(x)=0$ so umgeformt, dass die Koefficienten derselben simultane Invarianten sind.*

Sei

$$5) \qquad f(x) = a_0 x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

die gegebene Gleichung. Setzt man nun

$$6) \quad \begin{array}{l|l|l|l} z = a_0 t_{m-1} + a_0 x & t_{m-2} + a_0 x^2 & t_{m-3} + \ldots + a_0 x^{m-1} & t_0 \\ \quad + \binom{m}{1} a_1 & \quad + \binom{m}{1} a_1 x & \quad + \ldots + \binom{m}{1} a_1 x^{m-2} & \\ & \quad + \binom{m}{2} a_2 & \quad + \ldots + \binom{m}{2} a_2 x^{m-3} & \\ & & \quad + \ldots \ldots & \\ & & \quad + \binom{m}{1} a_{m-1} & \end{array}$$

wo t_{m-1}, t_{m-2}, ..., t_0 m Unbestimmte bedeuten. Nimmt man die t_0, t_1, ..., t_{m-1} willkürlich an, so hat man in 6), da a_0 nicht $=0$ ist, offenbar die allgemeinste Funktion $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von x. Der Ausdruck für z kann symbolisch durch

$$z = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

dargestellt werden, wenn man nach Ausführung der Division t^i durch t_i ersetzt.

Eliminiert man x aus 5) und 6), so erhält man eine Resultante, die für z vom Grade m ist. Durch Verfügung über t_0, t_1, ..., t_{m-1} können darin beliebig viele mittlere Glieder zum Verschwinden gebracht werden. Setzt man der Reihe nach die m Wurzeln von $f(x)=0$ in die Formel 6) an Stelle von x ein, so erhält man m Werte z_1, z_2, .., z_m von z, die Wurzeln der Resultante m^{ten} Grades, so dass die die Resultante lautet:

$$7) \quad A_0 z^m + \binom{m}{1} A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_m).$$

Der Koefficient von z^{m-1} ist dann mit Berücksichtigung der Newtonschen Identitäten (§ 1, 2, 5)

$$\binom{m}{1} A_1 = -(z_1 + z_2 + \ldots + z_m) = -m \left\{ a_0 t_{m-1} + \binom{m-1}{1} a_1 t_{m-2} + \ldots + a_{m-1} t_0 \right\}.$$

Damit das Glied mit z^{m-1} verschwinde, muss also

* Vergleiche auch § 17, 4 (Fussnote), und § 16, 2 (für $k=1$), wo eine gebrochene höhere Substitution angewandt ist.

$$8) \qquad a_0 t_{m-1} + \binom{m-1}{1} a_1 t_{m-2} + \ldots + a_{m-1} t_0 = 0$$

sein. Dann geht die Gleichung für z über in:

$$9) \quad \begin{vmatrix} z = a_0 x\, t_{m-2} + a_0 x^2 & t_{m-3} + a_0 x^3 & t_{m-4} + \ldots + a_0 x^{m-1} & t_0 \\ \quad + a_1 \qquad + \binom{m}{1} a_1 x & \quad + \binom{m}{1} a_1 x^2 & \quad + \ldots + \binom{m}{1} a_1 x^{m-2} & \\ \quad + \binom{m-1}{1} a_2 & \quad + \binom{m}{2} a_2 x & \quad + \ldots + \binom{m}{2} a_2 x^{m-3} & \\ & \quad + \binom{m-1}{2} a_3 & \quad + \ldots + \ldots & \\ & & \quad + \binom{m-1}{1} a_{m-1} & \end{vmatrix}$$

3. Es soll nun bewiesen werden, dass die Koefficienten der Resultante 7) unter Zugrundelegung der Gleichung 9) sämtlich simultane Invarianten der beiden binären Formen

$$10) \quad \begin{cases} f(x,y) = a_0 x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \ldots + a_m y^m, \\ \varphi(x,y) = t_0 x^{m-2} - \binom{m-2}{1} t_1 x^{m-3} y + \ldots + (-1)^{m-2} t_{m-2} y^{m-2} \end{cases}$$

sind, dass also die Form 7) selbst eine simultane Invariante ist, wenn man darin z als konstant betrachtet. Man hat daher die Form

$$(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_m)$$

den bekannten Differentialgleichungen zu unterwerfen. Setzen wir zur Abkürzung

$$\delta = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + m a_{m-1} \frac{\partial}{\partial a_m},$$

$$\delta' = m a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (m-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + a_m \frac{\partial}{\partial a_{m-1}},$$

ferner

$$\tau = t_0 \frac{\partial}{\partial t_1} + 2 t_1 \frac{\partial}{\partial t_2} + \ldots + (m-2) t_{m-3} \frac{\partial}{\partial t_{m-2}},$$

$$\tau' = (m-2) t_1 \frac{\partial}{\partial t_0} + (m-3) t_2 \frac{\partial}{\partial t_1} + \ldots + t_{m-2} \frac{\partial}{\partial t_{m-3}},$$

so braucht nur bewiesen zu werden, dass $z - z_i$ durch diese Operationen verschwindet, wenn man zugleich x_i als Funktion der a auffasst, d. h., dass

$$(\delta - \tau) z_i = 0, \quad (\delta' - \tau') z_i = 0.$$

Fasst man nun x_i als Funktion der a, so hat man

$$\frac{1}{m} \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_i} \cdot \delta x_i + \frac{1}{m} \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_i} = 0,$$

d. h.

$$\delta x_i = -1,$$

woraus nach 9), wenn man δ nur auf x_i erstreckt:

$$\delta^{(x_i)} z_i = \begin{vmatrix} -a_0 t_{m-2} - 2a_0 x_i - \binom{m}{1} a_1 & t_{m-3} - 3a_0 x_i^2 - 2\binom{m}{1} a_1 x_i - \binom{m}{2} a_2 & t_{m-4} - \ldots - (m-1) a_0 x_i^{m-2} - \ldots - \binom{m}{1}(m-2) a_1 x_i^{m-3} - \binom{m}{2}(m-3) a_2 x_i^{m-4} - \ldots - \binom{m}{2} a_{m-2} & t_0 \end{vmatrix}$$

und, wenn man δ nur auf die Koefficienten bezieht:

$$\delta^{(a)} z_i = \begin{vmatrix} a_0 t_{m-2} + m a_0 x_i + 2(m-1) a_1 & t_{m-3} + m a_0 x_i^2 + m(m-1) a_1 x_i + 3\binom{m-1}{2} a_2 & t_{m-4} + \ldots + m a_0 x_i^{m-2} + \ldots + m\binom{m-1}{1} a_1 x_i^{m-3} + \ldots + m\binom{m-1}{2} a_2 x_i^{m-4} + \ldots + (m-1)^2 a_{m-2} & t_0 \end{vmatrix}$$

so dass

$$\delta z_i = \delta^{(x_i)} z_i + \delta^{(a)} z_i = \begin{vmatrix} (m-2) a_0 x_i + (m-2) a_1 & t_{m-3} + (m-3) a_0 x_i^2 + \binom{m}{1}(m-3) a_1 x_i + \binom{m-1}{1}(m-3) a_2 & t_{m-4} + \ldots + a_0 x_i^{m-2} + \ldots + \binom{m}{1} a_1 x_i^{m-3} + \binom{m}{2} a_2 x_i^{m-4} + \ldots + \binom{m-1}{2} a_{m-2} & t_0 \end{vmatrix}$$

Die Operation τ liefert dasselbe Resultat; also hat man

$$(\delta - \tau) z_i = 0.$$

Führen wir die Operation δ' aus. Zunächst hat man

$$\left\{\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right\}_{\substack{y=1 \\ x=x_i}} \cdot \delta' x_i + x_i \left\{\frac{1}{m} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right\}_{\substack{y=1 \\ x=x_i}} = 0,$$

woraus, da $\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\} x_i + \left\{\frac{\partial f}{\partial y}\right\} = m f(x_i) = 0$:

$$\delta' x_i = x_i^2.$$

Wenden wir δ' auf z_i in Bezug auf x_i allein an, so kommt

$$\delta'^{(x_i)}z_i = a_0x_i^2t_{m-2} + 2a_0x_i^3 + \binom{m}{1}a_1x_i^2 \;\Big|\; t_{m-3} + 3a_0x_i^4 + 2\binom{m}{1}a_1x_i^3 + \binom{m}{2}a_2x_i^2 \;\Big|\; t_{m-4} + \ldots + (m-1)a_0x_i^m + \ldots + \binom{m}{1}(m-2)a_1x_i^{m-1} + \ldots + \binom{m}{2}(m-3)a_2x_i^{m-2} + \ldots + \binom{m}{2}a_{m-2}x_i^2 \;\Big|\; t_0$$

und in Bezug auf die a allein:

$$\delta'^{(a)}z_i = ma_1x_i + (m-1)a_2 \;\Big|\; t_{m-2} + ma_1x_i^2 + m(m-1)a_2x_i + (m-1)(m-2)a_3 \;\Big|\; t_{m-3} + \ldots + ma_1x_i^{m-1} + \ldots + \binom{m}{1}(m-1)a_2x_i^{m-2} + \binom{m}{2}(m-2)a_3x_i^{m-3} + \ldots + (m-1)a_m \;\Big|\; t_0$$

und daraus, indem der Koefficient von t_0 beim Addieren zu $(m-1)f(x_i)=0$ wird,

$$\delta' z_i = \delta'^{(x_i)}z_i + \delta'^{(a)}z_i = \tau' z_i,$$

d. h.

$$(\delta' - \tau')z_i = 0.$$

Also sind die z_i und folglich die A_i simultane Invarianten der Formen f und φ in 10).

Umgekehrt sind in diesem Falle die A_i Funktionen der Wurzeldifferenzen und können den Term t_{m-1} nicht mehr enthalten, da derselbe in den Wurzeldifferenzen verschwindet.

4. Beispiel. Sei

$$f(x,y) = a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$
$$z = (a_0x + a_1)u + (a_0x^2 + 3a_1x + 2a_2)v.$$

Um die Resultante dieser beiden Formen aufzustellen, bilde man mit Rücksicht auf $f=0$ (§ 5, 12)

$$xz = (a_0x^2 + a_1x)u + (-a_2x - a_3)v,$$
$$x^2z = (-2a_1x^2 - 3a_2x - a_3)u + (-a_2x^2 - a_3x)v;$$

dann folgt aus dem nach x geordneten System z, xz, x^2z:

$$a_0v \,.\, x^2 + (a_0u + 3a_1v)x + (a_1u + 2a_2v - z) = 0,$$
$$a_0u \,.\, x^2 + (a_1u - a_2v - z)x - a_3v = 0,$$
$$(2a_1u + a_2v + z)x^2 + (3a_2u + a_3v)x + a_3u = 0,$$

das Verschwinden der Determinante

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 v & a_0 u + 3a_1 v & a_1 u + 2a_2 v - z \\ a_0 u & a_1 u - a_2 v - z & -a_3 v \\ 2a_1 u + a_2 v + z & 3a_2 u + a_3 v & a_3 u \end{vmatrix},$$

die ausgerechnet lautet:

$$z^3 + 3z\{(a_0 a_2 - a_1^2)u^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)uv + (a_1 a_3 - a_2^2)v^2\} +$$
$$+ \{(a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)u^3 + (3a_0 a_1 a_3 - 6a_0 a_2^2 + 3a_1^2 a_2)u^2 v +$$
$$+ (-3a_0 a_2 a_3 + 6a_1^2 a_3 - 3a_1 a_2^2)uv^2 + (-a_0 a_3^2 + 3a_1 a_2 a_3 - 2a_2^3)v^3\} = 0$$

oder

$$z^3 + 3\Delta z + Q = 0.$$

Man bemerkt, dass die Formen Δ und Q simultane Invarianten der beiden Formen

$$f(x, y), \quad vx - uy,$$

also auch Kovarianten der Form $f(u, v)$ allein sind (§ 19, 5).

§ 25. Charakteristische Gleichungen für die Resultante und die Diskriminante.

1. Im früheren wurden Kovarianten und Invarianten durch ein System partieller Differentialgleichungen definiert und insbesondere gezeigt, dass diese Gleichungen nicht von einander unabhängig sind, eine vielmehr Folge der übrigen (in § 14, 8 und 9 die Gewichtsgleichung, in § 14, 10, Anmerkung, die Gleichung $\delta' C_0 = 0$). Die Lösungen dieser Gleichungen waren im allgemeinen Falle mehrere linear von einander unabhängige, und es soll nun in den einfachsten Fällen der Resultante zweier Formen und der Diskriminante einer Form die Frage beantwortet werden, ob noch weitere partielle Differentialgleichungen vorhanden sind, welche diese besonderen Lösungen charakterisieren. Für die Resultante kennt man bereits die Gleichungen, welche die Kombinanteneigenschaft ausdrücken [§ 19, 4, 14) und 16), sowie § 6, 3, 14) und 15)].

Herr Brioschi hat ein System weiterer Gleichungen für die Resultante und die Diskriminante aufgestellt.* Hier soll aber nach Herrn Noether** weiter gezeigt werden, dass von diesen weiteren Gleichungen nur noch je eine Gleichung unabhängig ist, während sich die übrigen daraus vermöge der allgemeinen Invarianten- und einer der Kombinantengleichungen ergeben, und dass diese eine weitere Gleichung in der That die Resultante bez. Diskriminante eindeutig charakterisiert.

---

* Crelle Journal Bd. 53 und Annali di Matem. Bd. 2, 1859.

** Noether, Briefliche Mitteilung vom 25. März 1881.

Satz. Bezeichnet R die Resultante der beiden Formen m^{ter} Ordnung

1) $$\begin{cases} \varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m, \\ \psi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m, \end{cases}$$

$c_{i,k}$ wie in § 5, 13, pag. 68 den Ausdruck

2) $$c_{i,k} = c_{k,i} = \sum_0^i {}_h\, d_{i+k+1-h,\,h} = \sum_0^i {}_h\, (a_{i+k+1-h} b_h - a_h b_{i+k+1-h}),$$

so ist

3) $$\sum_0^{m-1} {}_k\, c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = (m-i) b_i R; \quad \sum_0^{m-1} {}_k\, c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial b_{k+1}} = -(m-i) a_i R,$$

4) $$\sum_0^{m-1} {}_k\, c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial a_k} = -(i+1) b_{i+1} R; \quad \sum_0^{m-1} {}_k\, c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial b_k} = (i+1) a_{i+1} R;$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Beweis von 3). Für $R = 0$ hat man, wenn

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \psi(\alpha) = 0$$

sind, nach § 6, 3

$$\frac{\partial R}{\partial a_k} : \frac{\partial R}{\partial a_m} = \alpha^{m-k},$$

also nach § 5, 13

$$\sum_0^{m-1} {}_k\, c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = 0 \text{ und } \sum_0^{m-1} {}_k\, c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial a_k} = 0.$$

Die linken Seiten beider Gleichungen müssen daher, wenn R nicht verschwindet, R zum Faktor haben, und man hat:

$$\sum_0^{m-1} {}_k\, c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = \lambda_i . R.$$

Um λ_i bis auf einen numerischen Koefficienten zu bestimmen, genügt es zu bemerken, dass λ_i eine ganze Funktion vom Grade 0 in Bezug auf die Koefficienten von φ, vom Grade 1 in Bezug auf die von ψ ist, und ferner das Gewicht

$$(i+k+1) - (k+1) = i$$

hat, also $= \lambda b_i$ wird:*

5) $$\sum_0^{m-1} {}_k\, c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = \lambda . b_i R.$$

Um endlich die Zahl λ zu bestimmen, werde der folgende specielle Fall betrachtet, in dem R nicht $= 0$ ist:

* Vergleiche bis hierher des Verfassers Note in Crelle Journal 54.

$$\varphi(x) = 1,$$
$$\psi(x) = x^m + b_i x^{m-i};$$

für denselben wird

$$c_{i,\,m-i-1} = +1, \quad c_{i,\,m-1} = +b_i, \quad c_{i,\,k} = 0,$$

wenn k von $m-i-1$ und $m-1$ verschieden, daher

$$6) \qquad \sum_0^{m-1}{}_k\, c_{i,\,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = \frac{\partial R}{\partial a_{m-i}} + b_i \frac{\partial R}{\partial a_m}.$$

Aber aus (§ 5, 4)

$$R = (-1)^{m\,m} b_0{}^m \varphi(\beta_1)\varphi(\beta_2)\ldots\varphi(\beta_m),$$

wo die β_i die Wurzeln von $\psi = 0$ sind, folgt allgemein:

$$7) \qquad \frac{\partial R}{\partial a_k} = R \sum_1^m{}_h \frac{\beta_h{}^{m-k}}{\varphi(\beta_h)}.$$

Für den speciellen Fall ist

$$\varphi(\beta_h) = 1, \quad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{m-i} = 0, \quad \beta_h{}^i + b_i = 0$$

für $h > m-i$, und 6) wird

$$\sum_0^{m-1}{}_k\, c_{i,\,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = R\Big(\sum_h \beta_h{}^i + m b_i\Big) = (m-i)\, b_i R.$$

Man hat folglich

$$\lambda = m - i$$

und somit in 5) die erste Gleichung 3). Die zweite geht aus derselben durch Vertauschung von a mit b hervor.

Ebenso folgt:

$$\sum_0^{m-1}{}_k\, c_{i-1,\,k} \frac{\partial R}{\partial a_k} = \mu \,.\, b_i R,$$

wo μ aus demselben speciellen Fall analog zu $-i$ bestimmt wird, was 4) liefert.

Aus 3) und 4) folgt noch:

$$8) \qquad \sum_0^m{}_k\, [(m-i)\, c_{i-1,\,k} + i c_{i,\,k-1}] \frac{\partial R}{\partial a_k} = 0,$$

giltig, ob R verschwindet oder nicht.

2. Um zu zeigen, dass die erste Hälfte der Gleichungen 3) und 4) die Resultante vollständig bestimmen, lösen wir die m Gleichungen 3):

$$\sum_0^{m-1}{}_k\, c_{i,\,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = (m-i)\, b_i R$$

nach den m Grössen $\frac{\partial R}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial R}{\partial a_m}$ auf.

Seien wieder, wie in § 5, 13, die Determinante der c_{ik} mit C_0, deren Unterdeterminanten mit

$$\delta_0,\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_{2m-2},\ (\delta_{i,k}=\delta_{i+k})$$

bezeichnet. Dann ergiebt sich als Auflösung

$$9)\quad C_0\frac{\partial R}{\partial a_{k+1}}=R[mb_0\delta_k+(m-1)b_1\delta_{k+1}+\ldots+b_{m-1}\delta_{k+m-1}]$$

und aus 4)

$$10)\quad C_0\frac{\partial R}{\partial a_k}=-R[b_1\delta_k+2b_2\delta_{k+1}+\ldots+b_m\delta_{k+m-1}]$$
$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1).$$

Da aber C_0 selbst, als Resultante, den Gleichungen 3) und 4) genügt, so folgen dieselben Gleichungen 9) und 10) auch für C_0 an Stelle von R, und man hat

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial a}=\frac{1}{C_0}\frac{\partial C_0}{\partial a},$$

woraus

$$11)\quad R=c.C_0,$$

wo c eine nur von den b abhängige Grösse ist. Soll nun auch der Grad in R und in C_0 derselbe sein, so folgt sogleich, dass c, als ganze Funktion, nur ein Zahlenfaktor sein kann.

3. Es soll jetzt das Gleichungssystem 3), 4) auf den Zusammenhang der Gleichungen unter sich und mit den allgemeinen Invariantengleichungen untersucht werden.

Zu dem Zwecke schicken wir die allgemeine Bemerkung voraus: dass die Kenntnis irgend eines der partiellen Differentialquotienten einer Invariante J genügt, um dieselbe eindeutig bestimmen zu können. In der That bilden die ersten Differentialquotienten nach den Koefficienten der Grundform (oder einer der Grundformen) die aufeinanderfolgenden Koefficienten der, Evektante genannten, Kovariante (§ 15, 7), und diese Koefficienten werden also vermöge der Operationen in § 14, 6, bezüglich bei simultanen Grundformen § 19, 1, auseinander hergeleitet. Kennt man aber die Differentialquotienten nach den Koefficienten einer Grundform, so giebt der Eulersche Satz über die homogenen Funktionen die Invariante selbst.

Für die beiden Grundformen 1), die ohne Binomialfaktoren geschrieben sind, gestaltet sich diese Herleitung so:

Seien die Operationen γ, γ' definiert durch

12) $$\gamma = m a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + (m-1)\, a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots + a_{m-1} \frac{\partial}{\partial a_m} + \\ + m b_0 \frac{\partial}{\partial b_1} + (m-1)\, b_1 \frac{\partial}{\partial b_2} + \ldots + b_{m-1} \frac{\partial}{\partial b_m},$$

12a) $$\gamma' = m a_m \frac{\partial}{\partial a_{m-1}} + (m-1)\, a_{m-1} \frac{\partial}{\partial a_{m-2}} + \ldots + a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + \\ + m b_m \frac{\partial}{\partial b_{m-1}} + (m-1)\, b_{m-1} \frac{\partial}{\partial b_{m-2}} + \ldots + b_1 \frac{\partial}{\partial b_0}.$$

Wenn nun J eine Invariante von φ, ψ ist, so wird

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} y^m - \binom{m}{1} \frac{\partial J}{\partial a_1} y^{m-1} x + \binom{m}{2} \frac{\partial J}{\partial a_2} y^{m-2} x^2 - \ldots + (-1)^m \frac{\partial J}{\partial a_m} x^m$$

eine Kovariante m^{ter} Ordnung und § 19, 1 analog ergiebt sich:

13) $$\begin{cases} \gamma\left(\dfrac{\partial J}{\partial a_k}\right) = -(m-k) \dfrac{\partial J}{\partial a_{k+1}}, \\ \gamma'\left(\dfrac{\partial J}{\partial a_k}\right) = -k \dfrac{\partial J}{\partial a_{k-1}}, \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

und hieraus

13a) $$\gamma(J) = 0, \quad \gamma'(J) = 0.$$

4. Es soll nun die Operation 12a) auf eine der Gleichungen 3) angewandt werden. Zunächst hat man aus 2):

14) $$c_{i,k-1} - c_{i-1,k} = b_i a_k - a_i b_k$$
$$(i, k = 0, 1, \ldots, m, \text{ wenn } c_{i,-1} = c_{i,m} = 0).$$

Ferner folgt:

15) $$\begin{cases} \gamma c_{i,k} = (2m - i - k)\, c_{i-1,k} + (m-k)(b_i a_k - a_i b_k) \\ \gamma' c_{i,k} = (i + k + 2)\, c_{i+1,k} - (k+1)(b_{i+1} a_{k+1} - a_{i+1} b_{k+1}). \end{cases}$$

Aus 3):

$$\sum_0^{m-1 \,(k)} c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = (m-i)\, b_i R$$

ergiebt die rechte Seite wegen $\gamma' R = 0$ (13a):

16) $$\gamma'(m-i)\, b_i R = (m-i)(i+1) b_{i+1} R$$

und die linke Seite nach 13) und 15):

$$\gamma' \sum_0^{m-1 \,(k)} c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = \sum_0^{m-1 \,(k)} (i+k+2)\, c_{i+1,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} - \\ - \sum_0^{m-1 \,(k)} (k+1)(b_{i+1} a_{k+1} - a_{i+1} b_{k+1}) \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} - \sum_0^{m-1 \,(k)} (k+1)\, c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial a_k}.$$

Führt man in die letzte Summe nach 14) $c_{i+1,k-1}$ an Stelle von $c_{i,k}$ ein und fügt die Summe zur ersten und zweiten hinzu, so ergiebt sich

$$\gamma' \sum_0^{m-1}{}_k c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = i \sum_0^{m-1}{}_k c_{i+1,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} + \sum_0^{m}{}_k (b_{i+1} a_k - a_{i+1} b_k) \frac{\partial R}{\partial a_k}.$$

Aber aus den beiden Eigenschaften von R, eine homogene Funktion der a und eine Kombinante zu sein, folgt:

$$17) \qquad \sum_0^{m}{}_k \frac{\partial R}{\partial a_k} a_k = mR, \quad \sum_0^{m}{}_k \frac{\partial R}{\partial a_k} b_k = 0,$$

also

$$\gamma' \sum_0^{m-1}{}_k c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = i \sum_0^{m-1}{}_k c_{i+1,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} + m b_{i+1} R,$$

und nach 16)

$$i \sum_0^{m-1}{}_k c_{i+1,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} + m b_{i+1} R = (m-i)(i+1) b_{i+1} R,$$

d. h.

$$18) \qquad i \sum_0^{m-1}{}_k c_{i+1,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = i(m-i-1) b_{i+1} R.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass, sobald i nicht $= 0$ ist, die Relation 3) für $\Sigma c_{i+1,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}}$ aus der für $\Sigma c_{i,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}}$ allein vermöge der Invarianten- und Kombinanteneigenschaft von R hervorgeht.

Es bleiben daher von den Relationen 3) nur die für $i=0$ und $i=1$ direkt zu untersuchen übrig. Nun ist:

$$c_{0,k} = a_{k+1} b_0 - b_{k+1} a_0,$$

$$\sum_0^{m-1}{}_k c_{0,k} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = b_0 \sum_0^{m-1}{}_k a_{k+1} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} - a_0 \sum_0^{m-1}{}_k b_{k+1} \frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} =$$

$$= b_0 \sum_0^{m}{}_k a_k \frac{\partial R}{\partial a_k} - a_0 \sum_0^{m}{}_k b_k \frac{\partial R}{\partial a_k} = m b_0 R,$$

(nach 17), so dass auch diese Relation keine charakteristische Eigenschaft liefert.

Endlich

$$c_{1,k} = (b_0 a_{k+2} - a_0 b_{k+2}) + (b_1 a_{k+1} - a_1 b_{k+1}),$$

$$\sum_0^{m-1}{}_k c_{1,k}\frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} = b_0\sum_1^{m-1}{}_k a_{k+1}\frac{\partial R}{\partial a_k} - a_0\sum_1^{m-1}{}_k b_{k+1}\frac{\partial R}{\partial a_k} +$$

$$+ b_1\sum_1^{m}{}_k a_k\frac{\partial R}{\partial a_k} - a_1\sum_1^{m}{}_k b_k\frac{\partial R}{\partial a_k} =$$

$$= b_0\sum_0^{m-1}{}_k a_{k+1}\frac{\partial R}{\partial a_k} - a_0\sum_0^{m-1}{}_k b_{k+1}\frac{\partial R}{\partial a_k} + b_1\sum_0^{m}{}_k a_k\frac{\partial R}{\partial a_k} - a_1\sum_0^{m}{}_k b_k\frac{\partial R}{\partial a_k} =$$

$$= b_0\sum_0^{m-1}{}_k a_{k+1}\frac{\partial R}{\partial a_k} - a_0\sum_0^{m-1}{}_k b_{k+1}\frac{\partial R}{\partial a_k} + mb_1R = \sum_0^{m-1}{}_k d_{k+1,0}\frac{\partial R}{\partial a_k} + mb_1R.$$

Damit die Relation 3) für $i=1$ entsteht, hat man also notwendig (für $d_{i,k}=a_ib_k-a_kb_i$):

$$19)\qquad \sum_0^{m-1}{}_k d_{k+1,0}\frac{\partial R}{\partial a_k} = -b_1R,$$

und dieses, bez. die Gleichung für $i=1$, ist in der ersten Hälfte des Systems 3) die einzige unabhängige charakteristische Gleichung für die Resultante, aus der alle anderen folgen.

Die Gleichung 19) selbst beweist sich leicht direkt aus der Formel 7). Es wird

$$\sum_0^{m-1}{}_k d_{k+1,0}\frac{\partial R}{\partial a_k} = R\sum_1^{m}{}_h\frac{1}{\varphi(\beta_h)}\left[b_0\sum_0^{m-1}{}_k a_{k+1}\beta_h^{m-k} - a_0\sum_0^{m-1}{}_k b_{k+1}\beta_h^{m-k}\right] =$$

$$= R.\sum_1^{m}{}_h\frac{\beta_h}{\varphi(\beta_h)}\left[b_0\sum_0^{m}{}_k a_k\beta_h^{m-k} - a_0\sum_0^{m}{}_k b_k\beta_h^{m-k}\right] =$$

$$= b_0R\sum_1^{m}{}_h\beta_h = -b_1R.$$

Auch das Gleichungssystem 4) ist eine Folge des Systems 3). Denn man hat nach 14):

$$\sum_0^{m-1}{}_k c_{i,k}\frac{\partial R}{\partial a_k} = \sum_1^{m-1}{}_k c_{i+1,k-1}\frac{\partial R}{\partial a_k} - \sum_0^{m-1}{}_k (b_{i+1}a_k - a_{i+1}b_k)\frac{\partial R}{\partial a_k} =$$

$$= \sum_0^{m-1}{}_k c_{i+1,k}\frac{\partial R}{\partial a_{k+1}} - \sum_0^{m}{}_k (b_{i+1}a_k - a_{i+1}b_k)\frac{\partial R}{\partial a_k},$$

da

$$c_{i+1,m-1} = b_{i+1}a_m - a_{i+1}b_m$$

ist, also nach 3) und 17):

$$\sum_0^{m-1}{}_k c_{i,k}\frac{\partial R}{\partial a_k} = (m-i-1)b_{i+1}R - mb_{i+1}R = -(i+1)b_{i+1}R,$$

was das System 4) ist. Die Ableitung gilt auch noch für $i = m-1$, und dieser Fall liesse sich auch leicht direkt für jede Kombinante R erledigen.

Im ganzen hat man also, neben den Invarianten- und Kombinantengleichungen, eine einzige, unabhängige Gleichung für die Resultante in der ersten Hälfte des Systems 3), 4). Hierdurch ist die Resultante bestimmt und damit auch die zweite Hälfte des Systems 3), 4). Die Gleichung 19) ist also in Wirklichkeit die charakteristische Gleichung der Resultante.

5. Es sollen jetzt die analogen Betrachtungen für die Diskriminante einer Form angestellt werden. Man hat hier den Satz:

Bezeichnet Δ die Diskriminante der Form m^{ter} Ordnung

$$20) \qquad f = a_0 x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} + \binom{m}{2} a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m,$$

$c_{i,k}$ den Ausdruck

$$21) \quad c_{i,k} = c_{k,i} = \sum_0^i {}_h \binom{m-1}{h} \binom{m-1}{i+k+1-h} (a_{h+1} a_{i+k+1-h} - a_h a_{i+k+2-h}),$$

so ist

$$22) \quad \begin{cases} \sum_0^{m-2} {}_k c_{i,k} \cdot \dfrac{1}{\binom{m}{k+2}} \dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{k+2}} = -\binom{m-1}{i+1} \cdot (i+1) \cdot a_i \Delta, \\ \sum_0^{m-2} {}_k c_{i,k} \dfrac{1}{\binom{m}{k+1}} \cdot \dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{k+1}} = \binom{m-1}{i+1} \cdot (i+1) \cdot a_{i+1} \cdot \Delta, \\ \sum_0^{m-2} {}_k c_{i,k} \dfrac{1}{\binom{m}{k}} \cdot \dfrac{\partial \Delta}{\partial a_k} = -\binom{m-1}{i+1} \cdot (i+1) \cdot a_{i+2} \cdot \Delta, \end{cases}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, m-2).$$

Beweis. Der Ausdruck $c_{i,k}$ in 21) ist derselbe, wie der aus den beiden Formen 1) gebildete Ausdruck $c_{i,k}$ in 2), wenn man nur in dem letzteren überall

$$\begin{aligned} m &\text{ durch } m-1, \\ a_i &\quad \text{„} \quad \binom{m-1}{i} a_i, \\ b_i &\quad \text{„} \quad \binom{m-1}{i} a_{i+1} \end{aligned}$$

ersetzt, also unter 1) die Polaren von f versteht. Man hat daher für $\Delta = 0$, wenn α die Doppelwurzel von $f = 0$ bedeutet:

$$\sum_0^{m-2}{}_k\, c_{i,k}\, a^{m-k-2} = 0;$$

aber nach § 7, 7 ist

$$a^m : a^{m-1} : \ldots : 1 = \frac{\partial \Delta}{\partial a_0} : \frac{1}{\binom{m}{1}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_1} : \ldots : \frac{\partial \Delta}{\partial a_m},$$

also

$$\sum_0^{m-2}{}_k\, c_{i,k} \frac{1}{\binom{m}{k+2}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+2}} = 0, \quad \sum_0^{m-2}{}_k\, c_{i,k} \frac{1}{\binom{m}{k+1}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+1}} = 0, \quad \sum_0^{m-2}{}_k\, c_{i,k} \frac{1}{\binom{m}{k}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_k} = 0.$$

Diese drei Ausdrücke müssen daher, wenn Δ nicht verschwindet, Δ zum Faktor haben, und so folgt zunächst

$$\sum_0^{m-2}{}_k\, c_{i,k} \frac{1}{\binom{m}{k+2}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+2}} = \lambda_i . \Delta.$$

Da aber λ_i eine ganze Funktion der a von dem Grade 1 und dem Gewichte $(i+k+2)-(k+2)=i$ wird, so hat man:

$$\sum_0^{m-2}{}_k\, c_{i,k} \frac{1}{\binom{m}{k+2}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+2}} = \lambda a_i \Delta,$$

wo λ eine noch zu bestimmende Zahl ist. Man erhält diese Zahl wieder durch einen speciellen Fall von f, wir übergehen aber diese Bestimmung, da die folgende Untersuchung den in 22) angeführten Wert

$$\lambda = -\binom{m-1}{i+1} \cdot (i+1)$$

ebenfalls liefert.

6. Wir untersuchen die $m-1$ ersten Gleichungen in 22) auf ihren Zusammenhang, zunächst aber die für $i=0$, $i=1$, $i=2$ direkt.

Man hat

$$c_{0,k} = \binom{m-1}{k+1} (a_1 a_{k+1} - a_0 a_{k+2}),$$

also

$$\sum_0^{m-2}{}_k\, c_{0,k} \frac{1}{\binom{m}{k+2}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+2}} = \frac{1}{m} \sum_0^{m-2}{}_k (k+2)(a_1 a_{k+1} - a_0 a_{k+2}) \frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+2}} =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_0^{m-1}{}_k (k+1)(a_1 a_k - a_0 a_{k+1}) \frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+1}} =$$

$$= -(m-1) a_0 \Delta,$$

was die erste Gleichung in 22) ist. Benutzt wurde bei dieser Ableitung nur eine der Gewichtsgleichungen:

$$23)\quad \begin{cases} a_1\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_1}+2a_2\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_2}+\ldots+ma_m\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_m}=m(m-1)\Delta, \\ ma_0\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_0}+(m-1)a_1\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_1}+\ldots+a_1\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_1}=m(m-1)\Delta, \end{cases}$$

und eine der beiden Invariantenbedingungen für Δ:

$$24)\quad \begin{cases} \delta\Delta=a_0\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_1}+2a_1\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_2}+\ldots+ma_{m-1}\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_m}=0, \\ \delta'\Delta=a_m\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{m-1}}+2a_{m-1}\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{m-2}}+\ldots+ma_1\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_0}=0. \end{cases}$$

Es ist weiter

$$c_{1,k}=\binom{m-1}{k+2}(a_1a_{k+2}-a_0a_{k+3})+(m-1)\binom{m-1}{k+1}(a_2a_{k+1}-a_1a_{k+2}),$$

also nach 23), 24):

$$\sum_0^{m-2k}c_{1,k}\frac{1}{\binom{m}{k+2}}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+2}}=\frac{1}{m}\sum_0^{m-1k}(m-k-1)(a_1a_{k+1}-a_0a_{k+2})\frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+1}}+$$
$$+\frac{m-1}{m}\sum_0^{m-1k}(k+1)(a_2a_k-a_1a_{k+1})\frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+1}}=$$
$$=(m-1)a_1\Delta-(m-1)^2a_1\Delta=-(m-1)(m-2)a_1\Delta,$$

wie auch 22) aussagt. Auch hierbei sind nur die Eigenschaften 23), 24) von Δ benutzt.

Ferner:

$$c_{2,k}=\binom{m-1}{k+3}(a_1a_{k+3}-a_0a_{k+4})+(m-1)\binom{m-1}{k+2}(a_2a_{k+2}-a_1a_{k+3})+$$
$$+\binom{m-1}{2}\binom{m-1}{k+1}(a_3a_{k+1}-a_2a_{k+2}),$$

also nach einfacher Umformung und nach 23), 24):

$$25)\quad \sum_0^{m-2k}c_{2,k}\frac{1}{\binom{m}{k+2}}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+2}}=-\frac{(m-1)^2(m-4)}{2}a_2\Delta+$$
$$+\frac{1}{m}\sum_0^{m-2k}\frac{(m-k)(m-k-1)}{k+1}(a_1a_{k+1}-a_0a_{k+2})\frac{\partial \Delta}{\partial a_k}.$$

Soll also die erste Gleichung 22) für $i=2$ bestehen, so müsste sein:

$$26)\quad \sum_0^{m-2k}\frac{(m-k)(m-k-1)}{k+1}(a_1a_{k+1}-a_0a_{k+2})\frac{\partial \Delta}{\partial a_k}=-m(m-1)a_2\Delta.$$

Nun ist aber nach § 7:

$$\Delta = a_0^{m-1} f(\beta_1) f(\beta_2) \dots f(\beta_{m-1}),$$

wo die β die Wurzeln von

$$\frac{1}{m} f'(x) = \varphi(x) = a_0 x^{m-1} + \binom{m-1}{1} a_1 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} = 0$$

sind. Also für $k > 0$:

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial a_k} = \sum_1^{m-1}{}_h \left[\frac{\binom{m}{k} \beta_h^{m-k}}{f(\beta_h)} + \frac{m \varphi(\beta_h) \frac{\partial \beta_h}{\partial a_k}}{f(\beta_h)} \right]$$
$$= \sum_1^{m-1}{}_h \frac{\binom{m}{k} \beta_h^{m-k}}{f(\beta_h)},$$

für $k = 0$:

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial a_0} = \sum_1^{m-1}{}_h \frac{\beta_h^m}{f(\beta_h)} + \frac{m-1}{a_0}.$$

Hiernach wird die linke Seite von 26) zu

$$\Delta \left[\frac{m(m-1)^2}{a_0} (a_1^2 - a_0 a_2) - m a_0 \sum_1^{m-1}{}_h \beta_h^2 \right] = -m(m-1) a_2 \Delta,$$

wie behauptet war.

Die Gleichung 26), oder die erste Gleichung 22) für $i = 2$, bildet also in der That eine der die Diskriminante charakterisierenden Gleichungen. Wir zeigen jetzt, dass dieselbe auch zur Bestimmung der übrigen Gleichungen des Systems hinreicht.

7. Die Operationen δ, δ' (24) liefern für jede Invariante J von f

27) $$\delta J = 0, \quad \delta' J = 0,$$

ferner

27a) $$\begin{cases} \delta \left(\frac{\partial J}{\partial a_k} \right) = -(k+1) \frac{\partial J}{\partial a_{k+1}}, \\ \delta' \left(\frac{\partial J}{\partial a_k} \right) = -(m-k+1) \frac{\partial J}{\partial a_{k-1}}. \end{cases}$$

Für die $c_{i,k}$ hat man, wie am einfachsten 14) und 15) vermittelst der Vertauschungen in Nr. 5 ergeben, durch welche auch die Operationen γ, γ' in die δ, δ' übergehen:

28) $$c_{i,k-1} - c_{i-1,k} = \binom{m-1}{i} \binom{m-1}{k} (a_{i+1} a_k - a_i a_{k+1}),$$

29) $$\begin{cases} \delta c_{i,k} = (2m-i-k-2) c_{i-1,k} + (m-k-1) \binom{m-1}{i} \binom{m-1}{k} (a_{i+1} a_k - a_i a_{k+1}), \\ \delta' c_{i,k} = (i+k+2) c_{i+1,k} - (k+1) \binom{m-1}{i+1} \binom{m-1}{k+1} (a_{i+2} a_{k+1} - a_{i+1} a_{k+2}). \end{cases}$$

Wendet man auf beide Seiten der Gleichung 22)

$$\sum_0^{m-2}{}_k\, c_{i,k}\frac{1}{\binom{m}{k+2}}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+2}} = -\binom{m-1}{i+1}(i+1).a_i\Delta$$

die Operation δ' aus 24) an, so liefert die rechte Seite wegen $\delta'\Delta = 0$:

30) $$-\binom{m-1}{i+1}(i+1)(m-i).a_{i+1}\Delta,$$

die linke Seite aber wird zu:

$$\sum_0^{m-2}{}_k\frac{i+k+2}{\binom{m}{k+2}}c_{i+1,k}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{k+2}} - \sum_0^{m-2}{}_k\frac{k+1}{\binom{m}{k+2}}\binom{m-1}{i+1}\binom{m-1}{k+1}(a_{i+2}a_{k+1}-a_{i+1}a_{k+2})\frac{\partial\Delta}{\partial a_{k+2}} -$$

$$-\sum_0^{m-2}{}_k\frac{m-k-1}{\binom{m}{k+2}}c_{i,k}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{k+1}},$$

oder, indem man in der dritten Summe $k+1$ statt k setzt, nach 28) $c_{i,k+1}$ durch $c_{i+1,k}$ ersetzt und diese Summe mit den beiden ersten verbindet, zu

$$(i-1)\sum_0^{m-2}{}_k\, c_{i+1,k}\frac{1}{\binom{m}{k+2}}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{k+2}} + \frac{2}{m}\cdot\binom{m-1}{i+1}\sum_0^{m-1}{}_k(k+1)(a_{i+2}a_k - a_{i+1}a_{k+1})\frac{\partial\Delta}{\partial a_{k+1}},$$

also nach 23), 24) und 30) zu

$$(i-1)\sum_0^{m-2}{}_k\, c_{i+1,k}\frac{1}{\binom{m}{k+2}}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{k+2}} - 2\binom{m-1}{i+1}(m-1).a_{i+1}\Delta = -$$

$$-\binom{m-1}{i+1}(i+1)(m-i).a_{i+1}\Delta.$$

Hieraus folgt:

31) $$(i-1).\sum_0^{m-2}{}_k c_{i+1,k}\frac{1}{\binom{m}{k+2}}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{k+2}} = -(i-1)\binom{m-1}{i+2}(i+2).a_{i+1}\Delta.$$

Diese Gleichung 31) sagt aus, dass im ersten System von 22) die Gleichung für $i+1$ aus der für i aus der Invarianteneigenschaft von Δ allein folgt, sobald i nicht $=1$ ist. Die Gleichung für

$$\sum_0^{m-2}{}_k\, c_{2,k}\frac{1}{\binom{m}{k+2}}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{k+2}}$$

haben wir aber in Nr. 6 für Δ direkt bewiesen, und dieses ist daher die einzige für Δ charakteristische Gleichung im ersten System von 22).

Für das zweite System von 22) hat man nach 23), 24) und 28)

$$\sum_0^{m-2} c_{i,k} \frac{1}{\binom{m}{k+1}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+1}} = \sum_1^{m-2} c_{i+1,k-1} \frac{1}{\binom{m}{k+1}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+1}} -$$

$$-\frac{1}{m}\binom{m-1}{i+1} \sum_0^{m-2} (k+1)(a_{i+2}a_k - a_{i+1}a_{k+1}) \frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+1}},$$

$$= \sum_0^{m-2} c_{i+1,k} \frac{1}{\binom{m}{k+2}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+2}} + \binom{m-1}{i+1}(m-1).a_{i+1}\Delta,$$

$$= \binom{m-1}{i+1}(i+1).a_{i+1}\Delta,$$

und diese Ableitung gilt auch noch für $i = m-2$, welcher Fall sich auch direkt aus der Invarianteneigenschaft von Δ erledigen lässt.

Endlich hat man für das dritte System von 22):

$$\sum_0^{m-2} c_{i,k} \frac{1}{\binom{m}{k}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_k} = \sum_1^{m-2} c_{i+1,k-1} \frac{1}{\binom{m}{k}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_k} -$$

$$-\frac{1}{m}\binom{m-1}{i+1} \sum_0^{m-2} (m-k)(a_{i+2}a_k - a_{i+1}a_{k+1}) \frac{\partial \Delta}{\partial a_k},$$

$$= \sum_0^{m-2} c_{i+1,k} \frac{1}{\binom{m}{k+1}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{k+1}} - \binom{m-1}{i+1}(m-1).a_{i+2}\Delta,$$

$$= -\binom{m-1}{i+1}(i+1).a_{i+2}\Delta;$$

ebenfalls noch giltig für $i = m-2$, welcher Fall sich auch direkt erledigen lässt. Beide Systeme folgen also aus dem ersten System in 22).

8. Bezeichnet man durch C die Determinante der $c_{i,k}$, durch $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2m-4}$ die Unterdeterminanten von C, so ergiebt die Auflösung der Systeme in 22):

32)
$$\begin{cases} C \cdot \dfrac{1}{\binom{m}{k+2}} \dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{k+2}} = -\Delta \sum_0^{m-2} \binom{m-1}{i+1}(i+1)\, a_i \delta_{k+i}, \\ C \cdot \dfrac{1}{\binom{m}{k+1}} \dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{k+1}} = \Delta \sum_0^{m-2} \binom{m-1}{i+1}(i+1)\, a_{i+1} \delta_{k+i}, \\ C \cdot \dfrac{1}{\binom{m}{k}} \dfrac{\partial \Delta}{\partial a_k} = -\Delta \sum_0^{m-2} \binom{m-1}{i+1}(i+1)\, a_{i+2} \delta_{k+i}, \end{cases}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, m-2).$$

Da das System 22) auch für die Diskriminante C an Stelle von Δ gilt, so gilt auch 32), wenn man Δ durch C ersetzt, und hiernach hat man

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial a} = \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial a},$$

d. h.

$$\Delta = c.C,$$

wo c ein Zahlenfaktor ist.

Hieraus folgt, dass die Diskriminante Δ durch das System 22) eindeutig bestimmt ist. Man hat also, nach Nr. 7, für Δ ausser den Invariantengleichungen nur eine unabhängige charakteristische Differentialgleichung, als welche man Gleichung 26) betrachten kann.

9. Anwendung. Für die biquadratische Form

$$f = a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4$$

hat die Diskriminante Δ die Form

$$\Delta = J_2^3 + \varrho J_3^2,$$

wo J_2, J_3 die Invarianten sind:

$$J_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2,$$
$$J_3 = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3.$$

Um die Zahl ϱ zu bestimmen, kann man Gleichung 26) anwenden. Die linke Seite dieser Gleichung liefert

$$\{12(a_1^2 - a_0a_2)a_4 - 12(a_1a_2 - a_0a_3)a_3 + 4(a_1a_3 - a_0a_4)a_2\}3J_2^2 +$$
$$+\{12(a_1^2 - a_0a_2)(a_2a_4 - a_3^2) + 6(a_1a_2 - a_0a_3)(a_2a_3 - a_1a_4) +$$
$$+\tfrac{2}{3}(a_1a_3 - a_0a_4)(a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2)\}2\varrho J_3 = -12J_2^2(a_2J_2 + 3J_3) -$$
$$-4\varrho J_3(3a_2J_3 + \tfrac{1}{3}J_2^2) = -12a_2\Delta - \tfrac{4}{3}(\varrho + 27)J_2^2J_3.$$

Soll also dieser Ausdruck nach 26) zu $-12a_2\Delta$ werden, so folgt

$$\varrho = -27,$$

d. h.

$$\Delta = J_2^3 - 27J_3^2.$$

§ 26. Symbolische Darstellungsform der Kovarianten.

1. Es wurden in diesem Buche gelegentlich und wiederholt symbolische Bezeichnungsweisen für die Formen oder ihre Kovarianten benutzt, so § 19, 2 die von Cayley* als „Hyperdeterminante" bezeichnete Funktion $(\varphi, \psi)^k$, oder beim Beweis des Hermiteschen Reciprocitätssatzes (§ 23) eine Bezeichnungsweise

* Crelle Journal, Bd. 30.

$$f = (ax + by)^m,$$

welche in Wirklichkeit von der Cayleyschen nicht wesentlich verschieden ist. Diese zweite Bezeichnungsweise ist nach Aronholds* Vorgang von Clebsch** systematisch durchgeführt und zu einem Kalkül ausgebildet worden, in dem seither die Arbeiten von Clebsch, Gordan u. A. auf dem Gebiete der Invariantentheorie gehalten und deren wichtigste Resultate gewonnen sind. Nur um in diese Arbeiten einzuführen, soll diese symbolische Darstellung und ihr Kalkül hier kurz behandelt werden.

Die Variabeln der Form f mögen mit x_1, x_2 bezeichnet werden; die Form

$$1)\qquad f = a_0 x_1^m + \binom{m}{1} a_1 x_1^{m-1} x_2 + \binom{m}{2} a_2 x_1^{m-2} x_2^2 + \ldots + a_m x_2^m$$

selbst symbolisch durch

$$2)\qquad f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^m = (b_1 x_1 + b_2 x_2)^m = (c_1 x_1 + c_2 x_2)^m = \ldots$$

und noch kürzer durch

$$3)\qquad f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \ldots$$

Dabei ist also zu setzen

$$4)\qquad \begin{cases} a_1^m = b_1^m = c_1^m = \ldots = a_0, \\ a_1^{m-1} a_2 = b_1^{m-1} b_2 = c_1^{m-1} c_2 = \ldots = a_1, \\ a_1^{m-2} a_2^2 = b_1^{m-2} b_2^2 = c_1^{m-2} c_2^2 = \ldots = a_2, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ a_2^m = b_2^m = c_2^m = \ldots = a_m. \end{cases}$$

Ferner werde gesetzt

$$5)\qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_x, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = (ab).$$

Die Symbole a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; ... haben an sich keine Bedeutung, nur die Produkte $a_1^i \cdot a_2^k$, bez. $b_2^i \cdot b_2^k$, ..., für $i + k = m$. Verschiedene Symbole a, b, c, ... für dasselbe sind deshalb eingeführt, um auch die Produkte der Koefficienten a_0, a_1, a_2 ... von f in gegenseitig eindeutige Beziehung zu den Symbolen setzen zu können, was erst den Kalkül übersichtlich macht. So ist zu setzen:

$$a_1^2 = a_1^{m-1} a_2 b_1^{m-1} b_2,$$

während $(a_1^{m-1} a_2)^2 = a_1^{2m-2} a_2^2$ keinen Sinn hat, da es ebensowohl $a_0 a_2$ als a_1^2 bedeuten könnte. So wird

$$f^2 = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^m \cdot (b_1 x_1 + b_2 x_2)^m = a_x^m b_x^m,$$

z. B. für $m = 2$:

---

* Crelle Journal, Bd. 39 und Bd. 55.

** Crelle Journal, Bd. 59.

$$a_x^2 . b_x^2 = a_1^2 b_1^2 x_1^4 + 2(a_1 a_2 b_1^2 + b_1 b_2 a_1^2) x_1^3 x_2 + (a_1^2 b_2^2 + 4 a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2) x_1^2 x_2^2 + \\ + 2(a_1 a_2 b_2^2 + b_1 b_2 a_2^2) x_1 x_2^3 + a_2^2 b_2^2 x_2^4$$
$$= a_0^2 x_1^4 + 4 a_0 a_1 x_1^3 x_2 + 2(a_0 a_2 + 2 a_1^2) x_1^2 x_2^2 + 4 a_1 a_2 x_1 x_2^3 + a_2^2 x_2^4$$
$$= (a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2)^2.$$

2. Jede homogene Funktion der Koefficienten a_0, a_1, a_2, ... von f muss also irgend ein Symbolenpaar a_1, a_2 von f genau zur m^{ten} Dimension homogen enthalten, und ferner gerade so viele Symbolenpaare, als der Grad der Funktion in den a_0, a_1, a_2 ... beträgt. Indem man dies berücksichtigt und bei jeder algebraischen Operation auf eine Funktion der Koefficienten von f, durch welche deren Grad erhöht wird, auch neue und neue Symbolenpaare für f einführt, ist die Rechnung mit den symbolischen Darstellungsformen nach den gewöhnlichen Regeln zulässig.

Beispiele.

I. $$f = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = a_x^2 = b_x^2 = \ldots$$

Die Diskriminante wird

$$D = a_0 a_2 - a_1^2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$
$$= \begin{vmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{vmatrix} = -b_1 a_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

d. h.

$$2D = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (ab)^2.$$

II. $$f = a_0 x_1^m + \binom{m}{1} a_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots + a_m x_2^m = a_x^m.$$

Die ersten Polaren von f sind

$$\frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial x_1} = a_x^{m-1} a_1, \quad \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial x_2} = a_x^{m-1} a_2,$$

und hieraus die erste Polare von y in Bezug auf $f(x)$:

$$\frac{1}{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 \right) = a_x^{m-1} (a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_x^{m-1} a_y.$$

Ferner wird die Polare von z in Bezug auf diese erste Polare:

$$\frac{1}{m-1} \left[\frac{\partial (a_x^{m-1} a_y)}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial (a_x^{m-1} a_y)}{\partial x_2} z_2 \right] = a_x^{m-2} a_y (a_1 z_1 + a_2 z_2) = a_x^{m-1} a_y a_z,$$

die k^{te} Polare von y in Bezug auf $f(x)$:

$$\frac{1}{m(m-1)\ldots(m-k+1)} \left[\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k} y_1^k + \binom{k}{1} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2} y_1^{k-1} y_2 + \ldots + \frac{\partial^k f}{\partial x_2^k} y_2^k \right] =$$
$$= \frac{1}{m(m-1)\ldots(m-k+1)} \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^k f = a_x^{m-k} (a_1 y_1 + a_2 y_2)^k = a_x^{m-k} a_y^k.$$

3. Für die Rechnung mit Symbolen ergeben sich noch folgende Regeln:

I. Da die Symbolenpaare $a_1, a_2;\ b_1, b_2;\ \ldots$ von

$$f = a_x^2 = b_x^2 = \ldots$$

gleichwertig sind, so ist es erlaubt in einer Funktion der Koefficienten von f irgendwelche Paare mit einander zu vertauschen, ohne dass sich der Ausdruck ändern kann. Ändert derselbe hierbei sein Zeichen, so verschwindet er identisch.

Z. B. für $f = a_x^2$ hat man

$$D = a_1 b_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

also auch

$$D = b_1 a_2 (b_1 a_2 - b_2 a_1) = -\, b_1 a_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

und wie oben

$$2D = (ab)^2 = (ba)^2.$$

Für $f = a_x^3$ wird

$$(ab)^3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^3 = -\,(b_1 a_2 - b_2 a_1)^3 = -\,(ba)^3,$$

also, da auch

$$(ab)^3 = (ba)^3,$$

$$(ab)^3 = 0.$$

Ebenso für $f = a_x^{2m+1}$

$$(ab)^{2m+1} = 0.$$

II. Man hat die Identität

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_x & b_x & c_x \end{vmatrix} = (ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x.$$

III. Aus derselben folgt durch Quadrierung die Identität

$$2(ab)(ac)b_x c_x = (ab)^2 c_x^2 + (ac)^2 b_x^2 - (bc)^2 a_x^2.$$

IV. Hat man ausser

$$f = a_x^m = b_x^m = \ldots$$

noch eine weitere Grundform φ, n^{ter} Ordnung, so führt man auch für diese Symbole ein:

$$\varphi = \alpha_x^n = \beta_x^n = \ldots$$

und rechnet im übrigen wie vorher. Im besonderen kann man auch eine Kovariante φ von f durch ein neues Symbol bezeichnen

$$\varphi = \alpha_x^\nu = \beta_x^\nu = \ldots,$$

wobei alsdann die

$$\alpha_1^\nu,\quad \alpha_1^{\nu-1}\alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_2^\nu$$

und ebenso die Potenzen der β, ..., die Koefficienten von φ, also homogene Funktionen ϱ^{ten} Grades der Koefficienten von f bedeuten.

Beispiel. Sei

$$f = a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3 = a_x^3 = b_x^3 = \dots$$

Die Diskriminante wird

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2a_2 \\ b_1b_2^2 & b_2^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1^3 & c_1^2c_2 \\ d_1d_2^2 & d_2^3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2a_2 \\ b_1^2b_2 & b_1b_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1^2c_2 & c_1c_2^2 \\ d_1d_2^2 & d_2^3 \end{vmatrix}.$$

Hier wird der erste Teil zu

$$a_1^2b_2^2c_1^2d_2^2(ab)(cd)$$

und nach Vertauschung von a mit b und von c mit d und Addition zu

$$\tfrac{1}{4}(a_1^2b_2^2 - a_2^2b_1^2)(c_1^2d_2^2 - c_2^2d_1^2)(ab)(cd) = \tfrac{1}{4}(ab)^2(cd)^2(a_1b_2 + a_2b_1)(c_1d_2 + c_2d_1),$$
$$= (ab)^2(cd)^2a_1b_2 \cdot c_1d_2,$$

der zweite Teil ebenso zu

$$-4a_1^2b_1b_2c_1c_2d_2^2(ab)(cd) = -(ab)^2(cd)^2a_1b_1c_2d_2,$$

also

$$R = (ab)^2(cd)^2(a_1b_2c_1d_2 - a_1b_1c_2d_2) = (ab)^2(cd)^2a_1d_2(cb) = \tfrac{1}{2}(ab)^2(cd)^2(ad)(cb).$$

Dasselbe ergiebt sich auch, wenn man zuerst die Hessesche Form Δ von f bildet. Man findet

$$2\Delta = \tfrac{1}{18} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1^2a_x & a_1a_2a_x \\ b_1b_2b_x & b_2^2b_x \end{vmatrix} = 2a_1b_2a_xb_x(ab) = (ab)^2a_xb_x.$$

Schreibt man nun nach IV:

$$2\Delta = (ab)^2a_xb_x = \alpha_x^2 = \beta_x^2,$$

so wird

$$\alpha_1^2 = \beta_1^2 = (ab)^2a_1b_1,\ 2\alpha_1\alpha_2 = 2\beta_1\beta_2 = (ab)^2(a_1b_2 + a_2b_1),\ \alpha_2^2 = \beta_2^2 = (ab)^2a_2b_2$$

und

$$R = -\tfrac{1}{2}(\alpha\beta)^2.$$

Diesen Wert berechnet man nun entweder wie oben, indem man die Werte der α_1^2, ... direkt einsetzt, oder besser so. Ersetzt man in dem obigen Ausdruck von 2Δ die willkürlichen Grössen x_1, x_2 bezüglich durch $-\alpha_2$, α_1, so folgt:

$$(\alpha\beta)^2 = (ab)^2(a\alpha)(b\alpha).$$

Aber die Polare von 2Δ wird

$$\alpha_x\alpha_y = \tfrac{1}{2}(ab)^2(a_xb_y + b_xa_y) = (ab)^2a_xb_y = (cd)^2c_xd_y,$$

also indem man hier x_1, x_2 durch $-a_2$, a_1; y_1, y_2 durch $-b_2$, b_1 ersetzt und mit $(ab)^2$ multipliziert:

$$(\alpha\beta)^2 = (ab)^2(a\alpha)(b\alpha) = (ab)^2(cd)^2(ac)(bd)$$

und

$$R = -\tfrac{1}{2}(ab)^2(cd)^2(ac)(bd),$$

was mit dem Obigen übereinstimmt.

Um das System von f zu vervollständigen, ist noch zu bilden:

$$Q = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \Delta}{\partial x_1}\right) = a_x^2 \alpha_x (a\alpha),$$

und nach dem obigen Ausdruck für $\alpha_x \alpha_y$:

$$Q = (ac)(bc)^2 a_x^2 b_x.$$

Für die Form vierter Ordnung

$$f = a_x^4$$

führen wir die auf ähnliche Weise zu berechnenden Formen des Systems nur an:

$$(ab)^4, \quad (ab)^2(ac)^2(bc)^2, \quad (ab)^2 a_x^2 b_x^2, \quad (ab)^2(bc) a_x^2 b_x c_x^3.$$

4. Nach dieser Auseinandersetzung des Rechnungsmechanismus seien nun die von Clebsch entwickelten Principien der Kovariantenbestimmung kurz mitgeteilt.

Macht man auf

6) $$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^m = a_x^m = b_x^m = \ldots$$

die Substitution

7) $$\begin{cases} x_1 = p_1 \xi_1 + q_1 \xi_2, \\ x_2 = p_2 \xi_1 + q_2 \xi_2, \\ r \;\; = p_1 q_2 - p_2 q_1, \end{cases}$$

aus der folgt

7a) $$\begin{cases} r\xi_1 = q_2 x_1 - q_1 x_2, \\ r\xi_2 = -p_2 x_1 + p_1 x_2, \end{cases}$$

so geht f über in

8) $$f = (A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2)^m = A_\xi^m,$$

wo

9) $$\begin{cases} A_1 = p_1 a_1 + p_2 a_2, \\ A_2 = q_1 a_1 + q_2 a_2, \end{cases}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} r a_1 &= q_2 A_1 - p_2 A_2, \\ r a_2 &= -q_1 A_1 + p_1 A_2, \end{aligned}$$

oder

9a) $$\begin{cases} r(-a_2) = p_1(-A_2) + q_1 A_1, \\ r a_1 \;\;\;\; = p_2(-A_2) + q_2 A_1. \end{cases}$$

Vergleicht man diese letzteren Ausdrücke mit 7), so sieht man, dass sich vermöge 7), von dem gemeinsamen Faktor des Moduls r der Substitution abgesehen, das Symbolenpaar $-a_2$, a_1 genau so in

das Paar $-A_2$, A_1 transformiert, wie das Variabelnpaar x_1, x_2 in das Paar der neuen Variabeln ξ_1, ξ_2.

Hieraus folgt, dass ein homogener Ausdruck, der nur Faktoren von den Formen a_x, b_x ... und (ab), (ac), ... enthält, jedenfalls die Kovarianteneigenschaft besitzt. Denn die ersteren Faktoren gehen durch 7) bezüglich in A_ξ, B_ξ, ..., die letzteren, bis auf den Faktor r, bezüglich in (AB), (AC), ... über, so dass wegen der Homogenëität der aus der transformierten Form f in 8) gebildete Ausdruck bis auf eine Potenz von r in den ursprünglichen übergeht. Zugleich sieht man, dass man in einem solchen Ausdruck, ohne die Invarianteneigenschaft zu ändern, in irgendwelchen der Faktoren a_x, b_x, ... das Paar $-x_2$, x_1 durch ein neues Symbolenpaar c_1, c_2 von f ersetzen und mit Faktoren (cd), ... multiplizieren kann, wenn nur diese Paare immer in der m^{ten} Dimension auftreten.

5. Um den umgekehrten Satz zu entwickeln, dass jede Kovariante von f in symbolischer Bezeichnung immer als Summe von Produkten dargestellt werden kann, deren Faktoren nur die Formen a_x, (ab) haben, ist zunächst der analoge Satz für die Invarianten eines Systems von linearen Grundformen zu beweisen, dass diese nämlich ganze Funktionen der Determinanten je zweier dieser Formen sind.

Die linearen Formen seien

$$10) \qquad \begin{cases} a_1^{(1)}x_1 + a_2^{(1)}x_2 = x'_1, \\ a_1^{(2)}x_1 + a_2^{(2)}x_2 = x'_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^{(i)}x_1 + a_2^{(i)}x_2 = x'_i, \end{cases}$$

und deren Determinanten

$$11) \qquad D_{i,k} = (a^{(i)}a^{(k)}).$$

Benutzt man die ersten beiden Formen von 10) zur linearen Transformation, so werden die Formen 10) zu

$$12) \qquad \begin{cases} D_{1,2}x'_1, \\ D_{1,2}x'_2, \\ D_{1,2}x'_3 = D_{3,2}x'_1 - D_{3,1}x'_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D_{1,2}x'_i = D_{i,2}x'_1 - D_{i,1}x'_2, \end{cases}$$

so dass, da die Substitutionsdeterminante $D_{1,2}$ ist und die 12) auch nur die $D_{i,k}$ enthalten, der Satz für das System 10) bewiesen ist. Es folgt noch, dass eine lineare Form keine Invariante hat.

Beachtet man noch, dass man jede Kovariante als simultane Invariante auffassen kann, indem man nur x_1, x_2 durch $-\alpha_2$, α_1 ersetzt denkt, wo α_1, α_2 die Koefficienten einer weiteren linearen Grundform

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

sind, so folgt hieraus weiter (oder auch aus 12), dass alle Kovarianten des Systems 10) ganze Funktionen der $D_{i,k}$ in 11) und der Formen 10) selbst sind.

6. Der Hauptsatz von Nr. 5 beweist sich jetzt mit Hilfe der in § 19, 3 gegebenen Operation $\theta(\omega)$, welche aus einer simultanen Invariante eine andere ableitet.

Sei J eine Invariante ϱ^{ten} Grades einer Form m^{ter} Ordnung

$$13) \qquad f = a_0 x_1^m + \binom{m}{1} a_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots + a_m x_2^m,$$

und seien

$$14) \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \quad \ldots, \quad \varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2$$

ϱ verschiedene lineare Formen. Bildet man aus J successive

$$15) \quad \begin{cases} J_1 = \dfrac{\partial J}{\partial a_0}\alpha_1^m + \dfrac{\partial J}{\partial a_1}\alpha_1^{m-1}\alpha_2 + \ldots + \dfrac{\partial J}{\partial a_m}\alpha_2^m, \\ J_2 = \dfrac{\partial J_1}{\partial a_0}\beta_1^m + \dfrac{\partial J_1}{\partial a_1}\beta_1^{m-1}\beta_2 + \ldots + \dfrac{\partial J_1}{\partial a_m}\beta_2^m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ J_\varrho = \dfrac{\partial J_{\varrho-1}}{\partial a_0}\varrho_1^m + \dfrac{\partial J_{\varrho-1}}{\partial a_1}\varrho_1^{m-1}\varrho_2 + \ldots + \dfrac{\partial J_{\varrho-1}}{\partial a_m}\varrho_2^m, \end{cases}$$

so erhält man nach § 19, 3 in J_1 eine simultane Invariante von f und $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^m$, also auch von f und $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$; ebenso in J_2 eine solche von f und den beiden ersten Formen in 14) u. s. w., endlich in J_ϱ eine solche der ϱ linearen Formen 14) allein, da in J_ϱ die Koefficienten von f nicht mehr vorkommen, und zwar m^{ten} Grades in Bezug auf jede der Formen 14).

Nach Nr. 5 kann also J_ϱ als ganze Funktion der Determinanten

$$(\alpha\beta), \quad (\alpha\gamma), \quad (\beta\gamma), \quad \ldots$$

der Formen 14) dargestellt werden.

Ersetzt man aber in J_ϱ die Grössen

$$\varrho_1^m, \quad \varrho_1^{m-1}\varrho_2, \quad \ldots, \quad \varrho_2^m$$

durch die bez. Koefficienten von f

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_m,$$

so entsteht $J_{\varrho-1}$ aus J_ϱ. Dies kann so geschehen, dass man die Koefficienten ϱ_1, ϱ_2 durch das Symbolenpaar a_1, a_2 von

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^m$$

ersetzt. Bei der letzten Darstellung von J_ϱ tritt dann in jede Determinante, welche ϱ enthält, einfach a an Stelle von ϱ.

Ersetzt man weiter in der so erhaltenen Invariante $J_{\varrho-1}$ die Koefficienten der zweitletzten Form von 14) durch das Symbolenpaar b_1, b_2 von $f = (b_1 x_1 + b_2 x_2)^m$, so entsteht $2J_{\varrho-2}$ aus $J_{\varrho-1}$ u. s. w. Ersetzt man endlich in dem so erhaltenen $1.2\ldots(\varrho-1)J_1$ die Koefficienten α_1, α_2 der ersten Form 14) durch das Symbolenpaar r_1, r_2 von f, so entsteht $1.2.3\ldots\varrho.J$.

Man erhält also aus dem Ausdruck J_ϱ, als Funktion der Determinanten

$$(\alpha\beta),\ (\alpha\gamma),\ (\beta\gamma),\ \ldots$$

geschrieben, dadurch einen Ausdruck für $1.2.3\ldots.\varrho.J$, dass man für die α, β, ..., ϱ bezüglich Symbole r, q, ..., a von f einsetzt. Und hierdurch wird J eine ganze Funktion von Ausdrücken der Form (ab) wie der Satz Nr. 5 behauptete.

Ist J eine simultane Invariante mehrerer Grundformen, so führt man analog auch für die weiteren Grundformen zunächst Systeme linearer Formen ein und ersetzt dann deren Koefficienten durch die Symbole der Grundformen.

Da ferner durch Einführung einer weiteren linearen Grundform jede Kovariante als simultane Invariante betrachtet werden kann, so folgt der Satz:

Jede simultane Kovariante der Formen

$$f = a_x^m = b_x^m,\quad \varphi = \alpha_x^n = \beta_x^n,\quad \ldots$$

kann symbolisch als Aggregat von Produkten dargestellt werden, deren Faktoren von den Formen (ab), $(\alpha\beta)$, $(a\alpha)$, ... und a_x, α_x, ... sind.

Die Faktoren der Art a_x, α_x, ... sollen Faktoren erster Art, die der Art (ab), $(a\alpha)$, ... Klammerfaktoren heissen. Die Ordnung einer Kovariante ist dann gleich der Anzahl der Faktoren erster Art in einem solchen Produkt, der Grad in Bezug auf f gleich der Anzahl der in demselben vorkommenden Symbolenpaare von f, der Index gleich der Anzahl der Klammerfaktoren desselben.

7. Der wichtigste Prozess der Kovariantenbildung ist die Überschiebung zweier Formen oder einer Form über sich selbst.

Seien

16) $$\varphi = a_x^m = b_x^m,\quad \psi = \alpha_x^n = \beta_x^n,$$

so heisst

17) $$(a\alpha)^k a_x^{m-k} \alpha_x^{n-k}$$

die k^{te} Überschiebung von φ über ψ; und ebenso

18) $$(ab)^k a_x^{m-k} b_x^{m-k}$$

die k^{te} Überschiebung von φ über sich selbst. Im letzten Fall muss k gerade sein, da sonst

$$(ab)^k a_x^{m-k} b_x^{m-k} = -(ba)^k a_x^{m-k} b_x^{m-k} = 0$$

wird. Dieser Prozess ist identisch mit dem § 19, 2 durch

$$(\varphi, \psi)^k$$

bezeichneten.

Insbesondere ist die erste Überschiebung von φ über ψ

$$(a\alpha) a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1}$$

identisch mit der Funktionaldeterminante von φ, ψ; die zweite Überschiebung von φ über sich selbst

$$(ab)^2 a_x^{m-2} b_x^{m-2}$$

gleich der Hesseschen Form von φ, die letzte Überschiebung einer Form φ von gerader Ordnung m über sich selbst

$$(ab)^m$$

gleich der quadratischen Invariante von φ.

Alle Invarianten und Kovarianten einer Form f lassen sich successive durch Überschiebungen von f über sich selbst und über schon gebildete Kovarianten erzeugen. Hierüber verweisen wir auf Clebschs binäre Formen.

8. Mittelst der symbolischen Darstellung lässt sich der Hermitesche Reciprocitätssatz (§ 23) und die Herstellung der entsprechenden Form aus der ursprünglichen einfach zeigen. Nach § 23 hat man eine Kovariante φ von f zunächst in den Wurzeln von f auszudrücken und dann gewisse Wurzelaggregate durch die Koefficienten einer neuen Form f' zu ersetzen, um die entsprechende Kovariante φ' von f' zu erhalten. Dabei ist aber zu bemerken, dass man, wenn man umgekehrt φ' durch die Wurzeln von f' ausdrückt und dann die Wurzelaggregate durch die Koefficienten von f ersetzt, nicht notwendig auf φ kommt, sondern nur auf eine Kovariante von derselben Ordnung und demselben Grad, wie φ.

Dieses Entsprechen gestaltet sich hier so:

Sei

19) $$f = a_x^m = b_x^m = \ldots = a_0(x_1 - \alpha_1 x_2)(x_1 - \alpha_2 x_2)\ldots(x_1 - \alpha_m x_2),$$

und die Kovariante ϱ^{ten} Grades φ von f

20) $\varphi = a_0^{\varrho} \Sigma (\alpha_1 - \alpha_2)^h (\alpha_1 - \alpha_3)^i (\alpha_2 - \alpha_3)^k \dots (x_1 - \alpha_1 x_2)^{l_1} \dots (x_1 - \alpha_m x_2)^{l_m}$,

dann tritt nach § 16 jede der m Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ in jedem Gliede von φ gleich oft, und zwar ϱ mal auf.

Man setze nun in irgend einem Gliede von φ an Stelle der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ bez. die Symbole $a', b', c', \dots$ einer neuen Form f' von der Ordnung ϱ

21) $$f' = a'_x{}^{\varrho} = b'_x{}^{\varrho} = \dots = a'_0 (x_1 - \beta_1 x_2) \dots (x_1 - \beta_{\varrho} x_2),$$

und zwar an Stelle von

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^h, \ (\alpha_1 - \alpha_3)^i, \ \dots, \ (x_1 - \alpha_1 x_2)^{l_1}, \ (x_1 - \alpha_2 x_2)^{l_2}, \ \dots$$

bez.

$$(a'b')^h, \ (a'c')^i, \ \dots, \ a'^{l_1}_x, \ b'^{l_2}_x, \ \dots,$$

so ergiebt sich

22) $$\varphi' = (a'b')^h (a'c')^i (b'c')^k \dots a'^{l_1}_x b'^{l_2}_x c'^{l_3}_x \dots,$$

wo jedes der m Symbole $a', b', c', \dots$ zur ϱ^{ten} Dimension vorkommt. Also hat man in φ' eine Kovariante von f', gleicher Ordnung wie φ und vom Grade m, erhalten, was der Satz des § 23 ist.

Umgekehrt kann man aus dem vorliegenden symbolischen Ausdruck 22) von φ' den Wurzelausdruck 20) von φ ableiten, und die verschiedenen gleichwertigen symbolischen Formen, welche φ' annehmen kann, führen alle auf dasselbe φ, da die Operationen Nr. 3, I bis III, wie an 22), analog auch an den Termen von 20) vorgenommen werden dürfen. Dagegen wird der Wurzelausdruck von φ' im allgemeinen ein anderes φ, als 20), liefern.

Beispiele. I. Sei

$$f = a_0 (x_1 - \alpha_1 x_2)(x_1 - \alpha_2 x_2),$$

$$D = -\frac{a_0^2}{4} (\alpha_1 - \alpha_2)^2,$$

$$\varphi = a_0^{2s} (\alpha_1 - \alpha_2)^{2s},$$

so folgt für die Form

$$f' = a'_x{}^{2s} = b'_x{}^{2s}$$

die quadratische Invariante

$$\varphi' = (a'b')^{2s}.$$

Schreibt man

$$f = a_x^{(1)2} = \dots = a_x^{(s)2} = b_x^{(1)2} = \dots = b_x^{(s)2}$$

und

$$D = a_0 a_2 - a_1^2 = \tfrac{1}{2} (a^{(i)} b^{(i)})^2,$$

so hat man auch

$$\varphi = (-4D)^s = (-2)^s . (a^{(1)} b^{(1)})^2 \dots (a^{(s)} b^{(s)})^2$$

und hieraus für

$$f' = a'_0 (x_1 - \beta_1 x_2)(x_1 - \beta_2 x_2) \dots (x_1 - \beta_{2s} x_2)$$

die quadratische Invariante

$$\varphi' = a'^2{}_0 \, \Sigma(\beta_1 - \beta_{s+1})^2 (\beta_2 - \beta_{s+2})^2 \dots (\beta_s - \beta_{2s})^2,$$

die bis auf einen numerischen Faktor hier mit der obigen φ' übereinstimmen muss.

II. Seien f und D wie in Beispiel I, und

$$\varphi = a_0^{2s+t} . (\alpha_1 - \alpha_2)^{2s} . (x_1 - \alpha_1 x_2)^t (x_1 - \alpha_2 x_2)^t = \\ = (-2)^s . (a^{(1)} b^{(1)})^2 \dots (a^{(s)} b^{(s)})^2 \, a_x^{(s+1)^2} \dots a_x^{(s+t)^2}.$$

Sei ferner

$$f' = a'_x{}^{2s+t} = b'_x{}^{2s+t} = a'_0 (x_1 - \beta_1 x_2)(x_1 - \beta_2 x_2) \dots (x_1 - \beta_{2s+t} x_2).$$

So entspricht der ersten Form von φ nach 20), 22)

$$\varphi' = (a'b')^{2s} a'_x{}^t b'_x{}^t,$$

d. h. die $2s^{\text{te}}$ Überschiebung von f' über sich selbst. Dies ist auch die einzige Form von der Ordnung $2t$, dem Grade 2, welche f' besitzt, wie die symbolische Bildungsweise sogleich lehrt. Daher muss auch die aus der zweiten Form von φ zu bildende entsprechende Form von f':

$$a'_0{}^2 \, \Sigma(\beta_1 - \beta_{s+1})^2 \dots (\beta_s - \beta_{2s})^2 (x_1 - \beta_{2s+1} x_2)^2 \dots (x_1 - \beta_{2s+t} x_2)^2$$

mit der obigen Form φ' bis auf einen Zahlenfaktor übereinstimmen.

9. Zum Schlusse möge noch dadurch ein Einblick in die mittelst der symbolischen Darstellungen zu gewinnenden Theorien ermöglicht werden, dass hier nach der Gordanschen Methode die Frage der Endlichkeit des vollen Formensystems (vergl. § 18, 4 und § 19, 6) für die einfachsten Fälle behandelt wird.

I. Die Grundform sei die quadratische Form

$$f = a_x^2 = b_x^2 = \dots$$

Man hat zunächst

$$2D = (ab)^2.$$

Irgend eine Kovariante im System von f hat entweder keinen Klammerfaktor [von der Art (ab)] und ist dann notwendig

$$a_x^2 b_x^2 c_x^2 \dots = f^\mu,$$

oder hat den Faktor (ab), ist also von der Form

$$\theta = (ab) a_y b_z,$$

wo die y, z gleich x sind oder noch weitere Symbole c, d, ..., nicht aber a, b von f enthalten können. Durch Vertauschung von a mit b ergiebt sich aber

$$\theta = (ab) a_y b_z = (ba) b_y a_z = \tfrac{1}{2}(ab)(a_y b_z - b_y a_z),$$

also, da nach Nr. 3, II. dieses Paragraphen

$$a_y b_z - b_y a_z = (ab)(yz),$$
$$\theta = \tfrac{1}{2}(ab)^2(yz) = D.(yz).$$

θ enthält also dann den Faktor D und ist auf niedrigere Formen reducierbar. Daher folgt sogleich: Jede Form des Systems ist eine ganze Funktion von f und D.

II. Man habe das simultane System einer quadratischen und einer linearen Form

$$f = a_x^2 = b_x^2 = \ldots, \quad \varphi = \alpha_x = \beta_x = \ldots$$

und sei

$$2D = (ab)^2, \quad j = (a\alpha)(a\beta) = (a\alpha)^2, \quad Q = (a\alpha)a_x.$$

Eine Form im System von f, φ hat entweder nur Faktoren erster Art und ist dann

$$f^\mu . \varphi^\nu,$$

oder den Klammerfaktor $(\alpha\beta)$ und verschwindet dann, oder den Klammerfaktor (ab) und wird dann, wie in I., reduciebel mit dem Faktor D, oder den Faktor $(a\alpha)$:

$$\theta = (a\alpha)a_y.$$

Dieses θ muss aber eine der drei Formen annehmen

$$(a\alpha)a_x, \quad (a\alpha)^2, \quad (a\alpha)(ab)b_z,$$

von denen die ersten beiden mit Q und j bezeichnet sind, während die letztere wegen des Faktors (ab) reduciebel wird. Also folgt: Jede Form im System von f und φ ist eine ganze Funktion von f, φ, D, j, Q.

Insbesondere hat man für a_x^2 und die Polaren nach y im System von a_x^2 das volle System

$$a_x^2, \quad (yx), \quad (ab)^2, \quad a_y^2, \quad a_x a_y.$$

III. Für das simultane System zweier quadratischer Formen

$$f = a_x^2 = b_x^2 = \ldots, \quad \varphi = \alpha_x^2 = \beta_x^2 = \ldots$$

sei

$$2D = (ab)^2, \quad 2\Delta = (\alpha\beta)^2, \quad j = (a\alpha)^2,$$
$$Q = (a\alpha)a_x\alpha_x.$$

Eine Form im System von f, φ hat entweder nur Faktoren erster Art und ist dann

$$f^\mu . \varphi^\nu,$$

oder den Klammerfaktor (ab) und wird dann, wie in I., reduciebel mit dem Faktor D, oder $(\alpha\beta)$ und ist dann ebenso reduciebel mit dem Faktor Δ, oder den Faktor $(a\alpha)$:

$$\theta = (a\alpha)a_y\alpha_z.$$

Dieses θ muss dann eine der Formen annehmen:

$$(a\alpha)a_x\alpha_x,\quad (a\alpha)^2,\quad (a\alpha)(ab)b_y\alpha_z,\quad (a\alpha)(\alpha\beta)a_y\beta_z,$$
$$(a\alpha)(a\beta)\alpha_z\beta_y,\quad (a\alpha)(b\alpha)a_yb_z,$$

von denen die beiden ersteren die Formen Q, j, die beiden weiteren als reduciebel nachgewiesen sind, so dass nur bleibt

$$\theta=(a\alpha)(a\beta)\alpha_z\beta_y,\quad \theta'=(a\alpha)(b\alpha)a_yb_z.$$

Nimmt man nun von

$$\vartheta=(a\alpha)(a\beta)\alpha_y\beta_y$$

die Polare nach z, so ergiebt sich

$$(a\alpha)(a\beta)(\alpha_z\beta_y+\alpha_y\beta_z)=2\theta;$$

ferner ist nach der Regel III, Nr. 3 dieses Paragraphen:

$$\vartheta=(a\alpha)(a\beta)\alpha_y\beta_y=\tfrac{1}{2}\{(a\alpha)^2\beta_y^2+(a\beta)^2\alpha_y^2-(\alpha\beta)^2a_y^2\},$$
$$=j.\alpha_y^2-\Delta.a_y^2,$$

also die Polare

$$\theta=j.\alpha_y\alpha_z-\Delta a_ya_z,$$

und ebenso

$$\theta'=j.a_ya_z-D\alpha_y\alpha_z,$$

so dass θ und θ' auf Summen reduciebler Formen zurückgeführt sind. Es folgt also: Jede Form im System von f und φ ist eine ganze Funktion von f, φ, D, Δ, j, Q.

Anhang.

Konstruktion von Tabellen symmetrischer Funktionen der Wurzeln einer Gleichung.

1. Die ersten Tabellen der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung findet man bei Vandermonde*, der bereits 1771 die Waringsche Formel seinen Berechnungen zu Grunde legte. Ausführlichere Tabellen verdankt man Meyer Hirsch, der die symmetrischen Funktionen der zehn ersten Grade mit Hilfe der Potenzsummen der Wurzeln berechnete und 1809 publizierte. Dieselben sind von Cayley in seinem Memoir on the Symmetric functions** im Verein mit von ihm neu entworfenen Tabellen, den Umkehrungen der ersteren, reproduziert worden (vergl. die Fussnote pag. 18). Endlich hat der Verfasser*** eine vorteilhafte Umstellung der ersteren Tabellen vorgenommen und eine solche vom elften Grad zugefügt.

Zur näheren Erläuterung dieser Cayleyschen und Brunoschen Tabellen mögen die folgenden Bemerkungen, grösstenteils nach Cayley, dienen:

Drückt man eine symmetrische Funktion der Wurzeln einer Gleichung als Funktion der Koefficienten aus, die λ^{ten} Grades, p^{ten} Gewichtes sein möge, so enthält dieser Ausdruck Koefficientenaggregate von der Form

1) $$a_{\lambda_1}{}^{\lambda^{(1)}} a_{\lambda_2}{}^{\lambda^{(2)}} a_{\lambda_3}{}^{\lambda^{(3)}} \dots a_{\lambda_i}{}^{\lambda^{(i)}},$$

deren Indices und Exponenten bekanntlich die Identitäten

2) $$\begin{cases} \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} + \dots + \lambda^{(i)} = \lambda, \\ \lambda_1 \lambda^{(1)} + \lambda_2 \lambda^{(2)} + \lambda_3 \lambda^{(3)} + \dots + \lambda_i \lambda^{(i)} = p \end{cases}$$

* Vandermonde, Hist. de l'Acad. de Paris 1771.
** Cayley, Phil. Trans. 1857 p. 489.
*** Bruno, Comptes rendus 1873.

erfüllen müssen, wobei vorausgesetzt werden soll, dass $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots$ sei, d. h. dass die Indices eine fallende Reihe bilden. Dann soll das Wurzelaggregat

3) $$\Sigma(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\lambda^{(1)}})^{\lambda_1}(\alpha_{\lambda^{(1)}+1}\alpha_{\lambda^{(1)}+2}\ldots\alpha_{\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}})^{\lambda_2}$$
$$(\alpha_{\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+1}\alpha_{\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+2}\ldots\alpha_{\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+\lambda^{(3)}})^{\lambda_3}\cdot$$

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

als das 1) zugehörige, und das Wurzelaggregat

4) $$\Sigma(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\lambda_i})^{\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+\ldots+\lambda^{(i)}}\cdot$$
$$\cdot(\alpha_{\lambda_i+1}\alpha_{\lambda_i+2}\ldots\alpha_{\lambda_{i-1}})^{\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+\ldots+\lambda^{(i-1)}}$$
$$\cdot(\alpha_{\lambda_{i-1}+1}\alpha_{\lambda_{i-1}+2}\ldots\alpha_{\lambda_{i-2}})^{\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+\ldots+\lambda^{(i-2)}}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot(\alpha_{\lambda_2+1}\alpha_{\lambda_2+2}\ldots\alpha_{\lambda_1})^{\lambda^{(1)}}$$

als das 1) konjugierte* bezeichnet werden.

Zum Beispiel:

Koefficienten-aggregat.	Zugehöriges Wurzelaggregat.	Konjugiertes Wurzelaggregat.
$a_3a_2a_1$	$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3$	$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3$
$a_2^2a_1^2 = a_2a_2a_1a_1$	$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4$	$\Sigma\alpha_1^4\alpha_2^2$
$a_3a_1^3 = a_3a_1a_1a_1$	$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$\Sigma\alpha_1^4\alpha_2\alpha_3$
$a_3a_2^2 = a_3a_2a_2$	$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3^2$	$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3$

Zunächst bemerkt man, dass das zugehörige Wurzelaggregat sehr einfach aus dem Koefficientenaggregat dadurch gebildet wird, dass man ein Aggregat von soviel auf einanderfolgenden Wurzeln α_1, α_2, ... anschreibt, als das Koefficientenaggregat Faktoren hat und alsdann die Indices des letzteren, der Reihe nach vom höchsten beginnend, als Exponenten den Faktoren des Wurzelaggregats zufügt. So wird z. B. aus dem Koefficientenaggregat $a_2a_2a_1a_1$ das zugehörige Wurzelaggregat $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^1\alpha_4^1$ u. s. w.

Für die Bildung des konjugierten Wurzelaggregats diene die folgende Regel: Man drückt im Koefficientenaggregat die einzelnen Koefficienten als Funktionen der Wurzeln aus, z. B.

$$a_3a_2a_1 = (-\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(+\Sigma\alpha_1\alpha_2)(-\Sigma\alpha_1),$$
$$a_2^2a_1^2 = (\Sigma\alpha_1\alpha_2)^2(-\Sigma\alpha_1)^2,$$
$$a_3a_1^3 = (-\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(-\Sigma\alpha_1)^3,$$
$$a_3a_2^2 = (-\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\Sigma\alpha_1\alpha_2)^2.$$

* Conjugate partition bei Cayley a. a. O. p. 491.

In diesen Produkten findet man auch die konjugierten Wurzelaggregate enthalten, indem man nämlich gerade die ersten Terme unter den Σ-Zeichen mit einander multipliziert; also:

$$\begin{array}{lll} \Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3 & \text{conjugiert} & a_3a_2a_1, \\ \Sigma\alpha_1^4\alpha_2^2 & \text{„} & a_2^2a_1^2, \\ \Sigma\alpha_1^4\alpha_2\alpha_3 & \text{„} & a_3a_1^3, \\ \Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3 & \text{„} & a_3a_2^2. \end{array}$$

Eine andere praktische Regel, um aus dem Koefficientenaggregat das konjugierte Wurzelaggregat zu bilden, ist folgende. Man schreibt die Indices der einzelnen Koefficienten so von links nach rechts untereinander, dass in jeder Zeile soviel 1 stehen, als der Index Einheiten hat. Dann addiert man die Kolonnen und erhält so die Exponenten der Wurzeln des konjugierten Aggregats.

Beispiele. 1. Um das konjugierte Aggregat zu $a_3a_2a_1$ zu finden, schreibt man das Schema an

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \\ 1 & & \\ \hline 3 & 2 & 1 \end{array}$$

woraus

$$\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3.$$

2. Das zu $a_2^2a_1^2$ konjugierte Aggregat folgt aus dem Schema

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & \\ 1 & \\ \hline 4 & 2 \end{array}$$

nämlich

$$\Sigma\alpha_1^4\alpha_2^2.$$

3. Das zu $a_3a_1^3$ konjugierte Aggregat folgt aus dem Schema

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & & \\ \hline 4 & 1 & 1 \end{array}$$

also

$$\Sigma\alpha_1^4\alpha_2\alpha_3.$$

4. Ebenso zu $a_3 a_2^2$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & \\ \hline 3 & 3 & 1 \end{array}$$

also

$$\Sigma \alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3.$$

Nach dieser Regel können auf analoge Weise die Indices der Koefficienten aus den Exponenten des konjugierten Wurzelaggregats gewonnen werden.

Die drei besprochenen Aggregate sind von gleichem Gewicht. Dies sieht man an 3) unmittelbar, während auch 4) giebt:

$$\lambda_i(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \ldots + \lambda^{(i)}) + (\lambda_{i-1} - \lambda_i)(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \ldots + \lambda^{(i-1)}) + \\ + (\lambda_{i-2} - \lambda_{i-1})(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \ldots + \lambda^{(i-2)}) + \ldots + (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda^{(1)} = p.$$

2. Eine symmetrische Funktion

$$\Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3} \ldots$$

enthält das konjugierte Koefficientenaggregat* mit dem Zahlenfaktor $+1$ oder -1, je nachdem das Gewicht gerade oder ungerade ist (vergl. § 1, 6).

Betrachten wir zunächst die symmetrische Funktion

$$\Sigma \alpha_1^4 \alpha_2 \alpha_3,$$

der das Aggregat

$$a_3 a_1^3$$

konjugiert ist. Setzt man nun

$$\Sigma \alpha_1^4 \alpha_2 \alpha_3 = A + B a_3 a_1^3,$$

so findet man

$$B = +1;$$

denn man hat

$$a_3 a_1^3 = (-\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)(-\Sigma \alpha_1)^3 = +1 . \Sigma \alpha_1^4 \alpha_2 \alpha_3 + \ldots,$$

woraus

$$\Sigma \alpha_1^4 \alpha_2 \alpha_3 = A + 1 . B . \Sigma \alpha_1^4 \alpha_2 \alpha_3 + \ldots$$

folgt. Diese Gleichung wird durch $B = +1$ nach § 2, 9 identisch; und auf keine andere Weise. Denn man hat genau ebenso viele einfache

* Es sei hier bemerkt, dass das einer symmetrischen Funktion der Wurzeln konjugierte Koefficientenaggregat genau identisch ist mit dem Koefficientenprodukt, das nach Gauss von der symmetrischen Funktion subtrahiert werden muss, damit in der Differenz die höchste Potenz der Wurzeln nicht mehr vorkommt. § 2, 9.

Koefficientenaggregate, als einfache symmetrische Wurzelaggregate gleichen Gewichts, und beide drücken sich linear durch einander aus; da nun die ersteren offenbar von einander linear unabhängig sind, gilt dies auch von den letzteren; d. h. die Ausdrücke der Koefficientenaggregate durch die Wurzelaggregate, und die umgekehrten, werden eindeutige. So tritt allgemein das, eindeutig definierte, konjugierte Aggregat auf der rechten Seite mit dem Faktor ± 1 auf.

Zur Bestimmung des Zeichens hat man die Koefficienten durch die symmetrischen Funktionen der Wurzeln auszudrücken. Danach hat das der symmetrischen Funktion

$$\Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3} \ldots$$

konjugierte Aggregat das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem

$$(-1)^{p_1} (+1)^{p_2} (-1)^{p_3} \ldots$$

gleich $+1$ oder -1 ist, d. h. je nachdem

$$(-1)^{p_1} (-1)^{2p_2} (-1)^{3p_3} \ldots = (-1)^{p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots} = (-1)^{\text{Gewicht}}$$

den Wert $+1$ oder -1 hat. Damit ist der Satz bewiesen, der übrigens schon in § 1, 6 angewandt ist.

3. Cayley hat die Bemerkung gemacht, dass man die symmetrischen Funktionen von gleichem Gewicht in synoptischen Tabellen so anordnen kann, dass der Zahlenkoefficient der i^{ten} Zeile und k^{ten} Kolonne gleich ist dem Zahlenkoefficienten der k^{ten} Zeile und i^{ten} Kolonne.* Man findet nämlich, dass der Zahlenkoefficient eines Terms A, welcher in der Entwicklung eines Wurzelaggregates Σ auftritt, gleich ist dem Zahlenkoefficienten des Σ zugehörigen Terms A', welcher in der Entwicklung des A zugehörigen Wurzelaggregates Σ' auftritt. Hiernach sind die Tafeln geordnet.

Die Reihen der Zahlenkoefficienten in den Tabellen haben noch eine weitere Eigenschaft. Multipliziert man sie der Reihe nach mit den Polynomialkoefficienten p^{ter} Ordnung, so ergiebt (ausgenommen die letzte Kolonne) die Summe dieser Produkte Null, wie aus der Identität

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots)^p = (-\alpha_1)^p$$

unmittelbar hervorgeht; z. B. (Gewicht $= 4$):

---

* Vergleiche über diese Eigenschaft: Betti, Ann. di Tortolini 1858.

	1 ✕	4 ✕	6 ✕	12 ✕	24 ✕	Summe
1✕	−4	+4	+2	−4	+1	0
4✕	+4	−1	−2	+1		0
6✕	+2	−2	+1			0
12✕	−4	+1				0
24✕	+1					1
Summe	0	0	0	0	1	

Diese Eigenschaft kann zur Kontrolle der Rechnung benutzt werden.

4. Konstruktion und Einrichtung einer Tabelle vom Gewicht p.

Man schreibt links in eine Kolonne alle symmetrischen Funktionen vom Gewicht p von $\Sigma\alpha_1^p$ bis $\Sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p$. Dann schreibt man oben an in eine Zeile in derselben Ordnung alle zugehörigen Koefficientenaggregate vom Gewicht p. Dieselben zerfallen in zwei Gruppen von der Art, dass die Aggregate der ersten Gruppe den Aggregaten der zweiten Gruppe konjugiert sind, wobei einige Aggregate sich selbst entsprechen. Diese letzteren sind in den Tabellen durch fetten Druck hervorgehoben. Von dieser Art sind z. B. die Aggregate

$$\boldsymbol{a_3^2a_2}, \quad \boldsymbol{a_4a_2a_1^2},$$

die durch den in Nr. 1 dieses Paragraphen angegebenen Prozess der Konjugiertenbildung in sich selbst übergehen, wie aus dem folgenden Schema ersichtlich ist:

3	1	1	1
3	1	1	1
2	1	1	
	3	3	2

4	1	1	1	1
2	1	1		
1	1			
1	1			
	4	2	1	1

wo durch Addition der Zeilen oder Kolonnen dieselben Summen entstehen.

Ferner sind die Aggregate

$$a_3a_1^5 \text{ und } a_6a_1^2,$$

die beide vom Gewicht 8 sind, einander konjugiert, wie aus dem Schema ersichtlich ist:

6	1	1	1	1	1	1
1	1					
1	1					
	3	1	1	1	1	1

wo durch Addition der Zeilen das Aggregat $a_6 a_1^2$ und durch Addition der Kolonnen das Aggregat $a_3 a_1^5$ entsteht. Die sich selbst konjugierten Aggregate sind in den Tabellen in die Mitte gestellt, während die einander konjugierten Aggregate symmetrisch auf beide Seiten verteilt werden, so dass für die Gesamtanordnung die Ordnung der einen Hälfte der Koefficientenaggregate genügt.

Als Beispiel diene die Tabelle vom Gewicht 10. Die sich selbst konjugierten Aggregate sind daselbst

nach dem Schema: $a_4 a_3 a_2 a_1$ und $a_5 a_2 a_1^3$,

4	1	1	1	1
3	1	1	1	
2	1	1		
1	1			
	4	3	2	1

5	1	1	1	1	1
2	1	1			
1	1				
1	1				
1	1				
	5	2	1	1	1

Zu beiden Seiten dieser Aggregate sind die einander konjugierten Aggregate der Koefficienten symmetrisch verteilt, wie z. B. $a_3^2 a_2 a_1^2$ und $a_5 a_3 a_2$, u. s. w.

Man bemerkt nun ferner:

I. Die Koefficienten der zweiten Diagonale sind sämtlich gleich $(-1)^p$.

II. Die Grade der Aggregate können den höchsten Exponenten der symmetrischen Funktionen nicht überschreiten.

III. Es genügt die Hälfte der Koefficienten zu berechnen, da sie in Bezug auf die erste Diagonale symmetrisch sind.

IV. Mit Hilfe der Waringschen Formel (§ 1, 2, Formel 9) kann man die Potenzsummen s und mit Hilfe der Formel 39), § 1, 4, Anmerkung 2 die symmetrischen Funktionen der Form $\Sigma \alpha_1^p \alpha_2^p \alpha_3^p \ldots$ berechnen.

V. Mit Hilfe einer Methode, die in Nr. 5 erläutert werden soll, können vier oder mehr Zeilen und Kolonnen gleichzeitig berechnet werden.

5. Formeln zur Berechnung der Tabellen.

Das Gewicht werde durch p, die Anzahl der überhaupt in der symmetrischen Funktion enthaltenen Wurzeln durch k, die Anzahl der

auf der ϱ^{ten} Potenz vorkommenden Wurzeln durch k_ϱ, die Anzahl der Wurzeln, die auf gleichem Grad vorkommen, je durch i bezeichnet. Ferner bedeute wie früher

$$\Pi(\mu) = 1.2.3 \ldots \mu, \quad \Pi(0) = 1.$$

Dann hat man zur Berechnung der Koefficienten die folgenden Formeln:

a_p	$(-1)^k . p . \Pi(k-1).$
$a_{p-1}a_1$	$-(-1)^k \{p\Pi(k-1) - k_1(p-1)\Pi(k-2)\}.$
$a_{p-2}a_2$	$-(-1)^k \{p\Pi(k-1) - k_1(k_1-1)(p-2)\Pi(k-3) - 2k_2(p-2)\Pi(k-2)\}.$
$a_{p-2}a_1^2$	$(-1)^k \{p\Pi(k-1) - k_1(p-1)\Pi(k-2) - k_2(p-2)\Pi(k-2)\}.$
$a_{p-3}a_3$	$-(-1)^k \{p\Pi(k-1) - 3k_3(p-3)\Pi(k-2) - 3k_1k_2(p-3)\Pi(k-3) - k_1(k_1-1)(k_1-2)(p-3)\Pi(k-4)\}.$
$a_{p-3}a_1a_2$	$(-1)^k \{2p\Pi(k-1) - [k_1(p-1) + 2k_2(p-2) + 3k_3(p-3)]\Pi(k-2) - [k_1k_2(p-3) + k_1(k_1-1)(p-2)]\Pi(k-3)\}.$
$a_{p-3}a_1^3$	$-(-1)^k \{p\Pi(k-1) - [k_1(p-1) + k_2(p-2) + k_3(p-3)]\Pi(k-2)\}.$
$a_{p-4}a_4$	$-(-1)^k \{p\Pi(k-1) - [4k_4\Pi(k-2) + [2k_2(k_2-1) + 4k_1k_3]\Pi(k-3) + 4k_1k_2(k_1-1)\Pi(k-4) + k_1(k_1-1)(k_1-2)(k_1-3)\Pi(k-5)](p-4)\}.$
. . . .	. . . . .
$a_{p-m}a_1^m$	$-(-1)^k \{p\Pi(k-1) - [k_1(p-1) + k_2(p-2) + \ldots + k_m(p-m)]\Pi(k-2)\}.$
$a_{p-m}a_m$	$-(-1)^k \Big\{p\Pi(k-1) - (p-m)\sum_{r=1}^{r=m}{}_r \frac{m\Pi(r-1).\Pi(k-r-1)}{\Pi(\lambda_1)\Pi(\lambda_2)\ldots\Pi(\lambda_r)} \cdot \sum{}_r \frac{\Pi(k_1)\Pi(k_2)\ldots\Pi(k_r)}{\Pi(k_1-\lambda_1)\Pi(k_2-\lambda_2)\ldots\Pi(k_r-\lambda_r)}\Big\},$

wo

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + r\lambda_r = m.$$

Die so erhaltenen Zahlen sind dann noch je durch $\Pi(i)$ zu dividieren.

Beispiele.

I. Für $\Sigma\alpha_1^4\alpha_2^2\alpha_3$ ist $p=7$, $k=3$. Der Koefficient von a_7 lautet:

$$(-1)^3 . 7 . 1 . 2 = -14.$$

II. Für $\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3$ ist $p=6$, $k=3$. Der Koefficient von a_5a_1 lautet:

$$-(-1)^3 \{6 . 2 - 5\} = +7.$$

III. Für $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4\alpha_5$ ist $p=8$, $k=5$. Der Koefficient von a_6a_2 lautet:

$$-(-1)^5 \frac{8\Pi(4) - 2.6.\Pi(2) - 6.6.\Pi(3)}{\Pi(2)\Pi(3)} = -4.$$

IV. Für $\Sigma\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4$ ist $p=8$, $k=4$. Der Koefficient von $a_6a_1^2$ lautet:

$$\frac{(-1)^4}{1.2} \cdot \{8\Pi(3) - 7.1.2 - 2.6.2\} = +5.$$

Beweis der Formeln. I. Eine symmetrische Funktion φ genügt nach § 2, 2, Formel 12 dem System partieller Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_{p-2}} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_{p-1}} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_p} + (p-2) \frac{\partial \varphi}{\partial s_{p-2}} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_{p-1}} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_p} + (p-1) \frac{\partial \varphi}{\partial s_{p-1}} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_p} + p \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s_p} = 0.$$

Nun ist nach Formel 36, pag. 10

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_p} = (-1)^{k-1} \Pi(k-1),$$

woraus mit Rücksicht auf obige Differentialgleichungen folgt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_p} = (-1)^k . p . \Pi(k-1),$$

was der Koefficient von a_p ist.

II. Nimmt man zunächst an, dass in φ s_{p-1} nicht vorkomme, d. h. dass $\frac{\partial \varphi}{\partial s_{p-1}} = 0$, so hat man

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{p-1}} = -(-1)^k \Pi(k-1) . p,$$

was der Koefficient von $a_{p-1} a_1$ ist.

Enthält die symmetrische Funktion φ aber s_{p-1}, so muss eine Reihe von Wurzeln, etwa k_1, linear eingehen, so dass der Term $s_{p-1} s_1$ k_1-mal vorkommt mit dem Koefficienten (vergl. pag. 8)

$$(-1)^{k-1} \Pi(k-2),$$

wonach

$$(p-1) \frac{\partial \varphi}{\partial s_{p-1}} = k_1 (p-1)(-1)^{k-1} \Pi(k-2) . s_1 =$$
$$= -(-1)^{k-1} k_1 (p-1) \Pi(k-2) . a_1$$

und

$$\frac{1}{a_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a_{p-1}} = -(-1)^k p . \Pi(k-1) + (-1)^{k-1} k_1 (p-1) \Pi(k-2) =$$
$$= -(-1)^k \{ p \Pi(k-1) - k_1 (p-1) \Pi(k-2) \},$$

was der Koefficient von $a_{p-1} a_1$ ist, u. s. w.

Anmerkung. Hier folgt noch eine Rekursionsformel:

$$-\Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3 = a_1 \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} + \Sigma \alpha_1^{p_1+1} \alpha_2^{p_2} + \Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2+1}.$$

Für $p_2 = 1$ hat man die Summe rechts noch durch 2 zu dividieren. Reduktionsformeln dieser Art, die für die Rechnung sehr förderlich sind, lassen sich leicht aufstellen.

I.

Symmetrische Funktionen der Wurzeln einer Gleichung.

1) Gewicht = 1.

$\sum$	a_1
α_1	-1

2) Gewicht = 2.

$\sum$	a_2	a_1^2
α_1^2	-2	$+1$
$\alpha_1\alpha_2$	$+1$	

3) Gewicht = 3.

$\sum$	a_3	a_1a_2	a_1^3
α_1^3	-3	$+3$	-1
$\alpha_1^2\alpha_2$	$+3$	-1	
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	-1		

4) Gewicht = 4.

$\sum$	a_4	a_3a_1	a_2^2	$a_2a_1^2$	a_1^4
α_1^4	-4	$+4$	$+2$	-4	$+1$
$\alpha_1^3\alpha_2$	$+4$	-1	-2	$+1$	
$\alpha_1^2\alpha_2^2$	$+2$	-2	$+1$		
$\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3$	-4	$+1$			
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$+1$				

5) Gewicht = 5.

$\sum$	a_5	a_4a_1	a_3a_2	$a_3a_1^2$	$a_2^2a_1$	$a_2a_1^3$	a_1^5
α_1^5	-5	$+5$	$+5$	-5	-5	$+5$	-1
$\alpha_1^4\alpha_2$	$+5$	-1	-5	$+1$	$+3$	-1	
$\alpha_1^3\alpha_2^2$	$+5$	-5	$+1$	$+2$	-1		
$\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3$	-5	$+1$	$+2$	-1			
$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3$	-5	$+3$	-1				
$\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$+5$	-1					
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$	-1						

6) Gewicht = 6.

$\sum$	a_6	$a_5 a_1$	$a_4 a_2$	a_3^2	$a_4 a_1^2$	$a_3 a_2 a_1$	$a_3 a_1^3$	a_2^3	$a_2^2 a_1^2$	$a_2 a_1^4$	a_1^6
α_1^6	-6	$+6$	$+6$	$+3$	-6	-12	$+6$	-2	$+9$	-6	$+1$
$\alpha_1^5 \alpha_2$	$+6$	-1	-6	-3	$+1$	$+7$	-1	$+2$	-4	$+1$	
$\alpha_1^4 \alpha_2^2$	$+6$	-6	$+2$	-3	$+2$	$+4$	-2	-2	$+1$		
$\alpha_1^3 \alpha_2^3$	$+3$	-3	-3	$+3$	$+3$	-3	0	$+1$			
$\alpha_1^4 \alpha_2 \alpha_3$	-6	$+1$	$+2$	$+3$	-1	-3	$+1$				
$\alpha_1^3 \alpha_2^2 \alpha_3$	-12	$+7$	$+4$	-3	-3	$+1$					
$\alpha_1^3 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$	$+6$	-1	-2	0	$+1$						
$\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2$	-2	$+2$	-2	$+1$							
$\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3 \alpha_4$	$+9$	-4	$+1$								
$\alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$	-6	$+1$									
$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6$	$+1$										

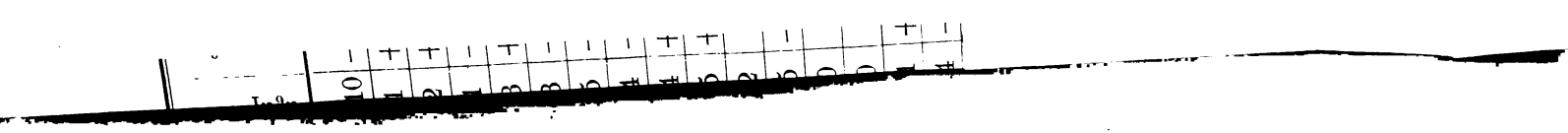
7) Gewicht = 7.

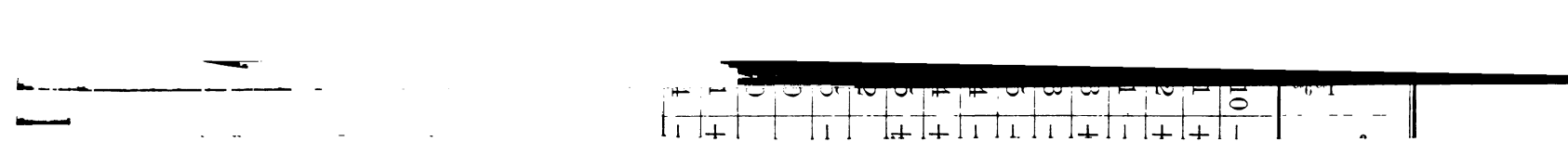
$\sum$	a_7	a_6a_1	a_5a_2	a_4a_3	$a_5a_1^2$	$a_4a_2a_1$	$a_3^2a_1$	$a_4a_1^3$	$a_3a_2^2$	$a_3a_2a_1^2$	$a_3a_1^4$	$a_2^3a_1$	$a_2^2a_1^3$	$a_2a_1^5$	a_1^7
α_1^7	**−7**	+7	+7	+7	−7	−14	−7	+7	−7	+21	−7	+7	−14	+7	−1
$\alpha_1^6\alpha_2$	+7	**−1**	−7	−7	+1	+8	+4	−1	+7	−9	+1	−5	+5	−1	
$\alpha_1^5\alpha_2^2$	+7	−7	**+3**	−7	+2	+4	+7	−2	−3	−6	+2	+3	−1		
$\alpha_1^4\alpha_2^3$	+7	−7	−7	**+5**	+7	+2	−5	−3	+1	+3	0	−1			
$\alpha_1^5\alpha_2\alpha_3$	−7	+1	+2	+7	**−1**	−3	−4	+1	−2	+4	−1				
$\alpha_1^4\alpha_2^2\alpha_3$	−14	+8	+4	+2	−3	**−8**	+1	+3	+2	−1					
$\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3$	−7	+4	+7	−5	−4	+1	**+2**	0	−1						
$\alpha_1^4\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	+7	−1	−2	−3	+1	+3	0	**−1**							
$\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3^2$	−7	+7	−3	+1	−2	+2	−1								
$\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4$	+21	−9	−6	+3	+4	−1									
$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4$	−7	+1	+2	0	−1										
$\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$	+7	−5	+3	−1											
$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$	−14	+5	−1												
$\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$	+7	−1													
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7$	−1														

8) Gewicht = 8.

$\sum$	a_8	a_7a_1	a_6a_2	a_5a_3	a_4^2	$a_6a_1^2$	$a_5a_2a_1$	$a_4a_3a_1$	$a_4a_2^2$	$a_5a_1^3$	$a_3^2a_2$	$a_4a_2a_1^2$	$a_4a_1^4$	$a_3^2a_1^2$	$a_3a_2^2a_1$	$a_3a_2a_1^3$	$a_3a_1^5$	a_2^4	$a_2^3a_1^2$	$a_2^2a_1^4$	$a_2a_1^6$	a_1^8
α_1^8	−**8**	+8	+8	+8	+4	−8	−16	−16	−8	+8	−8	+24	−8	+12	+24	−32	+8	+2	−16	+20	−8	+1
$\alpha_1^7\alpha_2$	+8	−**1**	−8	−8	−4	+1	+9	+9	+8	−1	+8	−10	+1	−5	−17	+11	−1	−2	+9	−6	+1	
$\alpha_1^6\alpha_2^2$	+8	−8	−**4**	−8	−4	+**2**	+4	+16	−4	−2	+2	−6	+2	−9	0	+8	−2	+2	−4	+1		
$\alpha_1^5\alpha_2^3$	+8	−8	−8	+**7**	−4	+8	+1	+1	+8	−3	−7	−9	+3	+3	+6	−3	0	−2	+1			
$\alpha_1^4\alpha_2^4$	+4	−4	−4	−4	+**6**	+4	+8	−8	−4	−4	+4	+4	0	+2	−4	0	0	+1				
$\alpha_1^6\alpha_2\alpha_3$	−8	+1	+2	+8	+4	−**1**	−3	−9	−2	+1	−5	+4	−1	+5	+5	−5	+1					
$\alpha_1^5\alpha_2^2\alpha_3$	−16	+9	+4	+1	+8	−3	+**10**	−10	−4	+3	+5	+11	−3	−1	−3	+1						
$\alpha_1^4\alpha_2^3\alpha_3$	−16	+9	+16	+1	−8	−9	−10	+**10**	0	+4	−1	−1	0	−2	+1							
$\alpha_1^4\alpha_2^2\alpha_3^2$	−8	+8	−4	+8	−4	−2	−4	0	+**4**	+2	−2	−2	0	+1								
$\alpha_1^5\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	+8	−1	−2	−3	−4	+1	+3	+4	+2	+**1**	0	−4	+1									
$\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^2$	−8	+8	+2	−7	+4	−5	+5	−1	−2	0	+**1**	0										
$\alpha_1^4\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4$	+24	−10	−6	−9	+4	+4	+11	−1	−2	−4	0	+**1**										
$\alpha_1^4\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$	−8	+1	+2	+3	0	−1	−3	0	0	+1												
$\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4$	+12	−5	−9	+3	+2	+5	−1	−2	+1													
$\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4$	+24	−17	0	+6	−4	+5	−3	+1														
$\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$	−32	+11	+8	−3	0	−5	+1															
$\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$	+8	−1	−2	0	0	+1																
$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2$	−2	−2	+2	−2	+1																	
$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4\alpha_5$	−16	+9	−4	+1																		
$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$	+20	−6	+1																			
$\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7$	−8	+1																				
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8$	+1																					

$\sum$	a_9	$a_3^2a_1^3$	$a_4a_1^5$	$a_3a_2^2a_1^2$	$a_3a_2a_1^4$	$a_3a_1^6$	$a_2^4a_1$	$a_2^3a_1^3$	$a_2^2a_1^5$	$a_2a_1^7$	a_1^9
α_1^9	**−9**	−18	+9	−54	+45	−9	−9	+30	−27	+9	−1
$\alpha_1^8\alpha_2$	+9	+6	−1	+30	−13	+1	+7	−14	+7	−1	
$\alpha_1^7\alpha_2^2$	+9	+11	−2	+5	−10	+2	−5	+5	−1		
$\alpha_1^6\alpha_2^3$	+9	−3	−3	−9	+3	0	+3	−1			
$\alpha_1^5\alpha_2^4$	+9	−2	0	+4	0	0	−1				
$\alpha_1^7\alpha_2\alpha_3$	−9	−6	+1	−9	+6	−1					
$\alpha_1^6\alpha_2^2\alpha_3$	−18	+1	+3	+4	−1						
$\alpha_1^5\alpha_2^3\alpha_3$	−18	+2	0	−1							
$\alpha_1^6\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	+9	0	−1								
$\alpha_1^5\alpha_2^2\alpha_3^2$	−9	−1									
$\alpha_1^4\alpha_2^4\alpha_3$	−9										
$\alpha_1^5\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4$	+27										
$\alpha_1^4\alpha_2^3\alpha_3^2$	−18										
$\alpha_1^4\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4$	+27										
$\alpha_1^5\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$	−9										
$\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^3$	−3										
$\alpha_1^4\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4$	+27										
$\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^2\alpha_4$	+27										
$\alpha_1^4\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$	−36										
$\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2$	+9										
$\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4\alpha_5$	−18										
$\alpha_1^4\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$	+9										
$\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4\alpha_5$	−54										
$\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$	+45										
$\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7$	−9										
$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5$	−9										
$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4\alpha_5\alpha_6$	+30										
$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7$	−27										
$\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8$	+9										
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8\alpha_9$	−1										





III.

Die irreduciebeln Invarianten

der

Formen zweiter, dritter, vierter und fünfter Ordnung sowohl als Funktionen der Koefficienten, als auch als Funktionen der Wurzeln ausgedrückt.

I. Die quadratische Form:

$$f = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2.$$

$$J_2 = D = a_0 a_2 - a_1^2 = -\frac{a_0^2}{4}(\alpha_2 - \alpha_1)^2.$$

$$= \text{Diskriminante von } f.$$

II. Die kubische Form:

$$f = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3.$$

$$J_2 = R = (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) =$$
$$= a_0^2 a_3^2 - 3a_1^2 a_2^2 + 4a_1^3 a_3 + 4a_0 a_2^3 - 6a_0 a_1 a_2 a_3 =$$
$$= \text{Diskriminante von } f.$$

Für

$$f = a_0 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 xy^2 + a_3 y^3$$

ist

$$-27R = 18a_0 a_1 a_2 a_3 - 4a_0 a_2^3 - 4a_1^3 a_3 + a_1^2 a_2^2 - 27a_0^2 a_3^2$$

und als Funktion der Wurzeln α_1, α_2, α_3:

$$-27R = a_0^4 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2 (\alpha_3 - \alpha_2)^2.$$

(§ 4, 4, a und § 7, 3).

III. Die biquadratische Form:

$$f = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 xy^3 + a_4 y^4.$$

1) $$J_2 = i = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2.$$

2) $$J_3 = j = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4.$$

3) $$R = \text{Diskriminante} = J_2^3 - 27 J_3^2.$$

Als Funktionen der Wurzeln α_1, α_2, α_3, α_4:

$$\frac{24}{a_0^2} \cdot J_2 = (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_1 - \alpha_4)^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)^2 (\alpha_2 - \alpha_4)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2 =$$
$$= \mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 + \Gamma^2,$$

wo

$$\mathsf{A} = (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4),$$
$$\mathsf{B} = (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_4),$$
$$\Gamma = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4);$$

$$\frac{432}{a_0^3}\cdot J_3=(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2\{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_4)-(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)\}+$$
$$+(\alpha_3-\alpha_1)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2\{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)-(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\}+$$
$$+(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2\{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)-(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_4)\}=$$
$$=\mathsf{A}^2(\mathsf{B}-\Gamma)+\mathsf{B}^2(\Gamma-\mathsf{A})+\Gamma^2(\mathsf{A}-\mathsf{B})=$$
$$=(\mathsf{A}-\mathsf{B})(\mathsf{A}-\Gamma)(\mathsf{B}-\Gamma).$$

$$\frac{4^4}{a_0^6}\cdot R=\mathsf{A}^2\mathsf{B}^2\Gamma^2.$$

IV. Die Form fünfter Ordnung:

$$f=a_0x^5+5a_1x^4y+10a_2x^3y^2+10a_3x^2y^3+5a_4xy^4+a_5y^5.$$

1) $J_4=A=a_0^2a_5^2-10a_0a_1a_4a_5+4a_0a_2a_3a_5+16a_0a_2a_4^2-$
$-12a_0a_3^2a_4+16a_1^2a_3a_5+9a_1^2a_4^2-12a_1a_2^2a_5-$
$-76a_1a_2a_3a_4+48a_1a_3^3+48a_2^3a_4-32a_2^2a_3^2=$
$=(a_0a_5-3a_1a_4+2a_2a_3)^2-4(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)(a_1a_5-4a_2a_4+3a_3^2)=$
$=-[i,i]$ nach § 22, 5.

2) J_8.

$+a_0^3a_2a_3a_5^3$	$-30a_0a_1^2a_2^2a_4a_5^2$	$+27a_1^4a_4^4$
$-a_0^3a_2a_4^2a_5^2$	$-34a_0a_1^2a_2a_3^2a_5^2$	$-48a_1^3a_2^2a_3a_5^2$
$-3a_0^3a_3^2a_4a_5^2$	$+133a_0a_1^2a_2a_3a_4^2a_5$	$+3a_1^3a_2^2a_4^2a_5$
$+5a_0^3a_3a_4^3a_5$	$-54a_0a_1^2a_2a_4^4$	$+106a_1^3a_2a_3^2a_4a_5$
$-2a_0^3a_4^5$	$-18a_0a_1^2a_3^3a_4a_5$	$-81a_1^3a_2a_3a_4^3$
$-a_0^2a_1^2a_3a_5^3$	$+3a_0a_1^2a_3^2a_4^3$	$-38a_1^3a_3^4a_5$
$+a_0^2a_1^2a_4^2a_5^2$	$+78a_0a_1a_2^3a_3a_5^2$	$+38a_1^3a_3^3a_4^2$
$-3a_0^2a_1a_2^2a_5^3$	$-18a_0a_1a_2^3a_4^2a_5$	$+18a_1^2a_2^4a_5^2$
$+11a_0^2a_1a_2a_3a_4a_5^2$	$-220a_0a_1a_2^2a_3^2a_4a_5$	$-30a_1^2a_2^3a_3a_4a_5$
$-5a_0^2a_1a_2a_4^3a_5$	$+106a_0a_1a_2^2a_3a_4^3$	$+38a_1^2a_2^3a_4^3$
$+12a_0^2a_1a_3^3a_5^2$	$+93a_0a_1a_2a_3^4a_5$	$+8a_1^2a_2^2a_3^3a_5$
$-30a_0^2a_1a_3^2a_4^2a_5$	$-30a_0a_1a_2a_3^3a_4^2$	$+25a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2$
$+15a_0^2a_1a_3a_4^4$	$-9a_0a_1a_3^5a_4$	$-57a_1^2a_2a_3^4a_4$
$+12a_0^2a_2^3a_4a_5^2$	$-27a_0a_2^5a_5^2$	$+18a_1^2a_3^6$
$-21a_0^2a_2^2a_3^2a_5^2$	$+93a_0a_2^4a_3a_4a_5$	$-9a_1a_2^5a_4a_5$
$-34a_0^2a_2^2a_3a_4^2a_5$	$-38a_0a_2^4a_3^3$	$+6a_1a_2^4a_3^2a_5$
$+22a_0^2a_2^2a_4^4$	$-42a_0a_2^3a_3^3a_5$	$-57a_1a_2^4a_3a_4^2$
$+78a_0^2a_2a_3^3a_4a_5$	$+8a_0a_2^3a_3^2a_4^2$	$+74a_1a_2^3a_3^3a_4$
$-48a_0^2a_2a_3^2a_4^3$	$+6a_0a_2^2a_3^4a_4$	$-24a_1a_2^2a_3^5$
$-27a_0^2a_3^5a_5$	$-2a_1^5a_5^3$	$+18a_2^6a_4^2$
$+18a_0^2a_3^4a_4^2$	$+15a_1^4a_2a_4a_5^2$	$-24a_2^5a_3^2a_4$
$+5a_0a_1^3a_2a_5^3$	$+22a_1^4a_3^2a_5^2$	$+8a_2^4a_3^4$
$-5a_0a_1^3a_3a_4a_5^2$	$-54a_1^4a_3a_4^2a_5$	

Andere Darstellung von J_8.

Sei

$$j = C_0x^3 + 3C_1x^2y + 3C_2xy^2 + C_3y^3$$

die Kovariante dritter Ordnung, dritten Grades von f, so dass

$$\begin{aligned}
C_0 &= a_0a_2a_4 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3,\\
3C_1 &= a_0a_2a_5 - a_0a_3a_4 - a_1^2a_5 + a_1a_2a_4 + a_1a_3^2 - a_2^2a_3,\\
3C_2 &= a_0a_3a_5 - a_0a_4^2 - a_1a_2a_5 + a_1a_3a_4 + a_2^2a_4 - a_2a_3^2,\\
C_3 &= a_1a_3a_5 - a_1a_4^2 - a_2^2a_5 + 2a_2a_3a_4 - a_3^3.
\end{aligned}$$

Sei ferner

$$i = D_0x^2 + 2D_1xy + D_2y^2$$

die quadratische Kovariante zweiten Grades von f, so dass

$$\begin{aligned}
D_0 &= a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2,\\
2D_1 &= a_0a_5 - 3a_1a_4 + 2a_2a_3,\\
D_2 &= a_1a_5 - 4a_2a_4 + 3a_3^2.
\end{aligned}$$

Dann ist $J_8 = [i, \varphi_{2,6}]$ (vergl. pag. 335), d. h.:

$$J_8 = 18\{D_2(C_0C_2 - C_1^2) - D_1(C_0C_3 - C_1C_2) + D_0(C_1C_3 - C_2^2)\}.$$

Ferner ist

$$J_8 = \tfrac{1}{4}[j, (ji)].$$

3) Δ = Diskriminante von $f = J_4^2 - 128J_8$:

$$\begin{array}{lll}
+a_0^4a_5^4 & +5760a_0^2a_2a_3^2a_4^3 & +6400a_0a_2^4a_4^3\\
-20a_0^3a_1a_4a_5^3 & +3456a_0^2a_3^5a_5 & +5120a_0a_2^3a_3^3a_5\\
-120a_0^3a_2a_3a_5^3 & -2160a_0^2a_3^4a_4^2 & -3200a_0a_2^3a_3^2a_4^2\\
+160a_0^3a_2a_4^2a_5^2 & -640a_0a_1^3a_2a_5^3 & +256a_1^5a_5^3\\
+360a_0^3a_3^2a_4a_5^2 & +320a_0a_1^3a_3a_4a_5^2 & -1920a_1^4a_2a_4a_5^2\\
-640a_0^3a_3a_4^3a_5 & -180a_0a_1^3a_4^3a_5 & -2560a_1^4a_3^2a_5^2\\
+256a_0^3a_4^5 & +4080a_0a_1^2a_2^2a_4a_5^2 & +7200a_1^4a_3a_4^2a_5\\
+160a_0^2a_1^2a_3a_5^3 & +4480a_0a_1^2a_2a_3^2a_5^2 & -3375a_1^4a_4^4\\
-10a_0^2a_1^2a_4^2a_5^2 & -14920a_0a_1^2a_2a_3a_4^2a_5 & +5760a_1^3a_2^2a_3a_5^2\\
+360a_0^2a_1a_2^2a_5^3 & +7200a_0a_1^2a_2a_4^4 & -600a_1^3a_2^2a_4^2a_5\\
-1640a_0^2a_1a_2a_3a_4a_5^2 & +960a_0a_1^2a_3^3a_4a_5 & -16000a_1^3a_2a_3^2a_4a_5\\
+320a_0^2a_1a_2a_4^3a_5 & -600a_0a_1^2a_3^2a_4^3 & +9000a_1^3a_2a_3a_4^3\\
-1440a_0^2a_1a_3^3a_5^2 & -10080a_0a_1a_2^3a_3a_5^2 & +6400a_1^3a_3^4a_5\\
+4080a_0^2a_1a_3^2a_4^2a_5 & +960a_0a_1a_2^3a_4^2a_5 & -4000a_1^3a_3^3a_4^2\\
-1920a_0^2a_1a_3a_4^4 & +28480a_0a_1a_2^2a_3^2a_4a_5 & -2160a_1^2a_2^4a_5^2\\
-1440a_0^2a_2^3a_4a_5^2 & -16000a_0a_1a_2^2a_3a_4^3 & +7200a_1^2a_2^3a_3a_4a_5\\
+2640a_0^2a_2^2a_3^2a_5^2 & -11520a_0a_1a_2a_3^4a_5 & -4000a_1^2a_2^3a_4^3\\
+4480a_0^2a_2^2a_3a_4^2a_5 & +7200a_0a_1a_2a_3^3a_4^2 & -3200a_1^2a_2^2a_3^3a_5\\
-2560a_0^2a_2^2a_4^4 & +3456a_0a_2^5a_5^2 & +2000a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2\\
-10080a_0^2a_2a_3^3a_4a_5 & -11520a_0a_2^4a_3a_4a_5 &
\end{array}$$

4) $J'_{12}=\frac{1}{9}(J_4J_8-J_{12})$=Diskrimin. von j (wobei $J_{12}=\frac{1}{2}(PQ'-P'Q)$ ist [§ 22, 5]):

$$
\begin{array}{lll}
-a_0^4a_2^2a_3^2a_5^4 & +46a_0^3a_2^2a_3^3a_4^3a_5 & -104a_0^2a_1a_2^3a_3a_4^5 \\
+2a_0^4a_2^2a_3a_4^2a_5^3 & -60a_0^3a_2^2a_3^2a_4^5 & -108a_0^2a_1a_2^2a_3^5a_5^2 \\
-a_0^4a_2^2a_4^4a_5^2 & -6a_0^3a_2a_3^6a_5^2 & -42a_0^2a_1a_2^2a_3^4a_4^2a_5 \\
+6a_0^4a_2a_3^3a_4a_5^3 & -70a_0^3a_2a_3^5a_4^2a_5 & +298a_0^2a_1a_2^2a_3^3a_4^4 \\
-16a_0^4a_2a_3^2a_4^3a_5^2 & +56a_0^3a_2a_3^4a_4^4 & +242a_0^2a_1a_2a_3^6a_4a_5 \\
+14a_0^4a_2a_3a_4^5a_5 & +18a_0^3a_3^7a_4a_5 & -294a_0^2a_1a_2a_3^5a_4^3 \\
-4a_0^4a_2a_4^7 & -14a_0^3a_3^6a_4^3 & -72a_0^2a_1a_3^8a_5 \\
-4a_0^4a_3^5a_5^3 & -a_0^2a_1^4a_3^2a_5^4 & +78a_0^2a_1a_3^7a_4^2 \\
+11a_0^4a_3^4a_4^2a_5^2 & +2a_0^2a_1^4a_3a_4^2a_5^3 & -6a_0^2a_2^6a_3a_5^3 \\
-10a_0^4a_3^3a_4^4a_5 & -a_0^2a_1^4a_4^4a_5^2 & +62a_0^2a_2^6a_4^2a_5^2 \\
+3a_0^4a_3^2a_4^6 & -16a_0^2a_1^3a_2^2a_3a_5^4 & -108a_0^2a_2^5a_3^2a_4a_5^2 \\
+2a_0^3a_1^2a_2a_3^2a_5^4 & +16a_0^2a_1^3a_2^2a_4^2a_5^3 & -164a_0^2a_2^5a_3a_4^3a_5 \\
-4a_0^3a_1^2a_2a_3a_4^2a_5^3 & +82a_0^2a_1^3a_2a_3^2a_4a_5^3 & -24a_0^2a_2^5a_4^5 \\
+2a_0^3a_1^2a_2a_4^2a_5^2 & -132a_0^2a_1^3a_2a_3a_4^3a_5^2 & +63a_0^2a_2^4a_3^4a_5^2 \\
-6a_0^3a_1^2a_3^3a_4a_5^3 & +50a_0^2a_1^3a_2a_4^5a_5 & +394a_0^2a_2^4a_3^3a_4^2a_5 \\
+16a_0^3a_1^2a_3^2a_4^3a_5^2 & -16a_0^2a_1^3a_3^4a_5^3 & +194a_0^2a_2^4a_3^2a_4^4 \\
-14a_0^3a_1^2a_3a_4^5a_5 & -14a_0^2a_1^3a_3^3a_4^2a_5^2 & -324a_0^2a_2^3a_3^5a_4a_5 \\
+4a_0^3a_1^2a_4^7 & +60a_0^2a_1^3a_3^2a_4^4a_5 & -440a_0^2a_2^3a_3^4a_4^3 \\
+6a_0^3a_1a_2^3a_3a_5^4 & -30a_0^2a_1^3a_3a_4^6 & +78a_0^2a_2^2a_3^7a_5 \\
-6a_0^3a_1a_2^3a_4^2a_5^3 & +11a_0^2a_1^2a_2^4a_5^4 & +428a_0^2a_2^2a_3^6a_4^2 \\
-50a_0^3a_1a_2^2a_3^2a_4a_5^3 & -30a_0^2a_1^2a_2^3a_3a_4a_5^3 & -180a_0^2a_2a_3^8a_4 \\
+82a_0^3a_1a_2^2a_3a_4^3a_5^2 & -14a_0^2a_1^2a_2^3a_4^3a_5^2 & +27a_0^2a_3^{10} \\
-32a_0^3a_1a_2^2a_4^5a_5 & -50a_0^2a_1^2a_2^2a_3^3a_5^3 & +14a_0a_1^5a_2a_3a_5^4 \\
+36a_0^3a_1a_2a_3^4a_5^3 & +168a_0^2a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2 & -14a_0a_1^5a_2a_4^2a_5^3 \\
-30a_0^3a_1a_2a_3^3a_4^2a_5^2 & -48a_0^2a_1^2a_2^2a_3a_4^4a_5 & -32a_0a_1^5a_3^2a_4a_5^3 \\
-30a_0^3a_1a_2a_3^2a_4^4a_5 & -4a_0^2a_1^2a_2^2a_4^6 & +50a_0a_1^5a_3a_4^3a_5^2 \\
+24a_0^3a_1a_2a_3a_4^6 & -48a_0^2a_1^2a_2a_3^4a_4a_5^2 & -18a_0a_1^5a_4^5a_5 \\
-28a_0^3a_1a_3^5a_4a_5^2 & -2a_0^2a_1^2a_2a_3^3a_4^3a_5 & -10a_0a_1^4a_2^3a_5^4 \\
+50a_0^3a_1a_3^4a_4^3a_5 & +6a_0^2a_1^2a_2a_3^2a_4^5 & -30a_0a_1^4a_2^2a_3a_4a_5^3 \\
-22a_0^3a_1a_3^3a_4^5 & +62a_0^2a_1^2a_3^6a_5^2 & +60a_0a_1^4a_2^2a_4^3a_5^2 \\
-4a_0^3a_2^5a_5^4 & -90a_0^2a_1^2a_3^5a_4^2a_5 & +16a_0a_1^4a_2a_3^3a_5^3 \\
+36a_0^3a_2^4a_3a_4a_5^3 & +39a_0^2a_1^2a_3^4a_4^4 & -48a_0a_1^4a_2a_3^2a_4^2a_5^2 \\
-16a_0^3a_2^4a_4^3a_5^2 & -28a_0^2a_1a_2^5a_4a_5^3 & +38a_0a_1^4a_2a_3a_4^4a_5 \\
-22a_0^3a_2^3a_3^3a_5^3 & +54a_0^2a_1a_2^4a_3^2a_5^3 & -36a_0a_1^4a_2a_4^6 \\
-50a_0^3a_2^3a_3^2a_4^2a_5^2 & -48a_0^2a_1a_2^4a_3a_4^2a_5^2 & +112a_0a_1^4a_3^4a_4a_5^2 \\
+16a_0^3a_2^3a_3a_4^4a_5 & +112a_0^2a_1a_2^4a_4^4a_5 & -204a_0a_1^4a_3^3a_4^3a_5 \\
+16a_0^3a_2^3a_4^6 & +82a_0^2a_1a_2^3a_3^3a_4a_5^2 & +102a_0a_1^4a_3^2a_4^5 \\
+54a_0^3a_2^2a_3^4a_4a_5^2 & -170a_0^2a_1a_2^3a_3^2a_4^3a_5 & +50a_0a_1^3a_2^4a_4a_5^3
\end{array}
$$

J'_{12}:

$+46a_0a_1^3a_2^3a_3^2a_5^3$
$-2a_0a_1^3a_2^3a_3a_4^2a_5^2$
$-204a_0a_1^3a_2^3a_4^4a_5$
$-170a_0a_1^3a_2^2a_3^3a_4a_5^2$
$+42a_0a_1^3a_2^2a_3^2a_4^3a_5$
$+308a_0a_1^3a_2^2a_3a_4^5$
$-164a_0a_1^3a_2a_3^5a_5^2$
$+674a_0a_1^3a_2a_3^4a_4^2a_5$
$-590a_0a_1^3a_2a_3^3a_4^4$
$-128a_0a_1^3a_3^6a_4a_5$
$+138a_0a_1^3a_3^5a_4^3$
$-70a_0a_1^2a_2^5a_3a_5^3$
$-90a_0a_1^2a_2^5a_4^2a_5^2$
$-42a_0a_1^2a_2^4a_3^2a_4a_5^2$
$+674a_0a_1^2a_2^4a_3a_4^3a_5$
$-4a_0a_1^2a_2^4a_4^5$
$+394a_0a_1^2a_2^3a_3^4a_5^2$
$-714a_0a_1^2a_2^3a_3^3a_4^2a_5$
$-652a_0a_1^2a_2^3a_3^2a_4^4$
$-498a_0a_1^2a_2^2a_3^5a_4a_5$
$+1246a_0a_1^2a_2^2a_3^4a_4^3$
$+224a_0a_1^2a_2a_3^7a_5$
$-516a_0a_1^2a_2a_3^6a_4^2$
$+48a_0a_1^2a_3^8a_4$
$+18a_0a_1a_2^7a_5^2$
$+242a_0a_1a_2^6a_3a_4a_5^2$
$-128a_0a_1a_2^6a_4^3a_5$
$-324a_0a_1a_2^5a_3^3a_5^2$
$-498a_0a_1a_2^5a_3^2a_4^2a_5$
$+136a_0a_1a_2^5a_3a_4^4$
$+1078a_0a_1a_2^4a_3^4a_4a_5$
$+206a_0a_1a_2^4a_3^3a_4^3$
$-342a_0a_1a_2^3a_3^6a_5$
$-804a_0a_1a_2^3a_3^5a_4^2$
$+506a_0a_1a_2^2a_3^7a_4$
$-90a_0a_1a_2a_3^9$
$-72a_0a_2^8a_4a_5^2$
$+78a_0a_2^7a_3^2a_5^2$
$+224a_0a_2^7a_3a_4^2a_5$
$+16a_0a_2^7a_4^4$
$-342a_0a_2^6a_3^3a_4a_5$
$-220a_0a_2^6a_3^2a_4^3$
$+106a_0a_2^5a_3^5a_5$
$+392a_0a_2^5a_3^4a_4^2$
$-222a_0a_2^4a_3^6a_4$
$+40a_0a_2^3a_3^8$
$-4a_1^7a_3a_5^4$
$+4a_1^7a_4^2a_5^3$
$+3a_1^6a_2^2a_5^4$
$+24a_1^6a_2a_3a_4a_5^3$
$-30a_1^6a_2a_4^3a_5^2$
$+16a_1^6a_3^3a_5^3$
$-4a_1^6a_3^2a_4^2a_5^2$
$-36a_1^6a_3a_4^4a_5$
$+27a_1^6a_4^6$
$-22a_1^5a_2^3a_4a_5^3$
$-60a_1^5a_2^2a_3^2a_5^3$
$+6a_1^5a_2^2a_3a_4^2a_5^2$
$+102a_1^5a_2^2a_4^4a_5$
$-104a_1^5a_2a_3^3a_4a_5^2$
$+308a_1^5a_2a_3^2a_4^3a_5$
$-234a_1^5a_2a_3a_4^5$
$-24a_1^5a_3^5a_5^2$
$-4a_1^5a_3^4a_4^2a_5$
$+32a_1^5a_3^3a_4^4$
$+56a_1^4a_2^4a_3a_5^3$
$+39a_1^4a_2^4a_4^2a_5^2$
$+298a_1^4a_2^3a_3^2a_4a_5^2$
$-590a_1^4a_2^3a_3a_4^3a_5$
$+32a_1^4a_2^3a_4^5$
$+194a_1^4a_2^2a_3^4a_5^2$
$-652a_1^4a_2^2a_3^3a_4^2a_5$
$+713a_1^4a_2^2a_3^2a_4^4$
$+136a_1^4a_2a_3^5a_4a_5$
$-246a_1^4a_2a_3^4a_4^3$
$+16a_1^4a_3^7a_5$
$+4a_1^4a_3^6a_4^2$
$-14a_1^3a_2^6a_5^3$
$-294a_1^3a_2^5a_3a_4a_5^2$
$+138a_1^3a_2^5a_4^3a_5$
$-440a_1^3a_2^4a_3^3a_5^2$
$+1246a_1^3a_2^4a_3^2a_4^2a_5$
$-246a_1^3a_2^4a_3a_4^4$
$+206a_1^3a_2^3a_3^4a_4a_5$
$-866a_1^3a_2^3a_3^3a_4^3$
$-220a_1^3a_2^2a_3^6a_5$
$+550a_1^3a_2^2a_3^5a_4^2$
$-56a_1^3a_2a_3^7a_4$
$-4a_1^3a_3^9$
$+78a_1^2a_2^7a_4a_5^2$
$+428_1^2a_2^6a_3^2a_5^2$
$-516a_1^2a_2^6a_3a_4a_5$
$+4a_1^2a_2^6a_4^4$
$-804a_1^2a_2^5a_3^3a_4a_5$
$+550a_1^2a_2^5a_3^2a_4^3$
$+392a_1^2a_2^4a_3^5a_5$
$+139a_1^2a_2^4a_3^4a_4^2$
$-354a_1^2a_2^3a_3^6a_4$
$+83a_1^2a_2^2a_3^8$
$-180a_1a_2^8a_3a_5^2$
$+48a_1a_2^8a_4^2a_5$
$+506a_1a_2^7a_3^2a_4a_5$
$-56a_1a_2^7a_3a_4^3$
$-222a_1a_2^6a_3^4a_5$
$-354a_1a_2^6a_3^3a_4^2$
$+330a_1a_2^5a_3^5a_4$
$-72a_1a_2^4a_3^7$
$+27a_2^{10}a_5^2$
$-90a_2^9a_3a_4a_5$
$-4a_2^9a_4^3$
$+40a_2^8a_3^3a_5$
$+83a_2^8a_3^2a_4^2$
$-72a_2^7a_3^4a_4$
$+16a_2^6a_3^6$.

5) J_{18} = Resultante von f und j:

$$
\begin{array}{lll}
+a_0^7 a_3^5 a_5^6 & +5a_0^6 a_3^3 a_4^9 & -390a_0^5 a_1 a_2 a_3^4 a_4^5 a_5^2 \\
-5a_0^7 a_3^4 a_4^2 a_5^5 & +10a_0^5 a_1^3 a_3^4 a_5^6 & +280a_0^5 a_1 a_2 a_3^3 a_4^7 a_5 \\
+10a_0^7 a_3^3 a_4^4 a_5^4 & -40a_0^5 a_1^3 a_3^3 a_4^2 a_5^5 & +30a_0^5 a_1 a_2 a_3^2 a_4^9 \\
-10a_0^7 a_3^2 a_4^6 a_5^3 & +60a_0^5 a_1^3 a_3^2 a_4^4 a_5^4 & -180a_0^5 a_1 a_3^8 a_5^4 \\
+5a_0^7 a_3 a_4^8 a_5^2 & -40a_0^5 a_1^3 a_3 a_4^6 a_5^3 & +300a_0^5 a_1 a_3^7 a_4^2 a_5^3 \\
-a_0^7 a_4^{10} a_5 & +10a_0^5 a_1^3 a_4^8 a_5^2 & -120a_0^5 a_1 a_3^6 a_4^4 a_5^2 \\
-15a_0^6 a_1 a_2 a_3^4 a_5^6 & +5a_0^5 a_1^2 a_2^4 a_5^7 & +30a_0^5 a_1 a_3^5 a_4^6 a_5 \\
+60a_0^6 a_1 a_2 a_3^3 a_4^2 a_5^5 & -60a_0^5 a_1^2 a_2^3 a_3 a_4 a_5^6 & -30a_0^5 a_1 a_3^4 a_4^8 \\
-90a_0^6 a_1 a_2 a_3^2 a_4^4 a_5^4 & +40a_0^5 a_1^2 a_2^3 a_4^3 a_5^5 & +15a_0^5 a_2^6 a_3 a_5^6 \\
+60a_0^6 a_1 a_2 a_3 a_4^6 a_5^3 & +90a_0^5 a_1^2 a_2^2 a_3^3 a_5^6 & +5a_0^5 a_2^6 a_4^2 a_5^5 \\
-15a_0^6 a_1 a_2 a_4^8 a_5^2 & -90a_0^5 a_1^2 a_2^2 a_3 a_4^4 a_5^4 & -30a_0^5 a_2^5 a_3^2 a_4 a_5^5 \\
+10a_0^6 a_1 a_3^5 a_4 a_5^5 & +30a_0^5 a_1^2 a_2^2 a_4^6 a_5^3 & -270a_0^5 a_2^5 a_3 a_4^3 a_5^4 \\
-35a_0^6 a_1 a_3^4 a_4^3 a_5^4 & -210a_0^5 a_1^2 a_2 a_3^4 a_4 a_5^5 & +196a_0^5 a_2^5 a_4^5 a_5^3 \\
+40a_0^6 a_1 a_3^3 a_4^5 a_5^3 & +120a_0^5 a_1^2 a_2 a_3^3 a_4^3 a_5^4 & +225a_0^5 a_2^4 a_3^3 a_4^2 a_5^4 \\
-10a_0^6 a_1 a_3^2 a_4^7 a_5^2 & +360a_0^5 a_1^2 a_2 a_3^2 a_4^5 a_5^3 & +615a_0^5 a_2^4 a_3^2 a_4^4 a_5^3 \\
-10a_0^6 a_1 a_3 a_4^9 a_5 & -420a_0^5 a_1^2 a_2 a_3 a_4^7 a_5^2 & -660a_0^5 a_2^4 a_3 a_4^6 a_5^2 \\
+5a_0^6 a_1 a_4^{11} & +130a_0^5 a_1^2 a_2 a_4^9 a_5 & +45a_0^5 a_2^4 a_4^8 a_5 \\
-a_0^6 a_2^5 a_5^7 & -5a_0^5 a_1^2 a_3^6 a_5^5 & -120a_0^5 a_2^3 a_3^5 a_4 a_5^4 \\
+15a_0^6 a_2^4 a_3 a_4 a_5^6 & +195a_0^5 a_1^2 a_3^5 a_4^2 a_5^4 & -220a_0^5 a_2^3 a_3^4 a_4^3 a_5^3 \\
-10a_0^6 a_2^4 a_4^3 a_5^5 & -315a_0^5 a_1^2 a_3^4 a_4^4 a_5^3 & -980a_0^5 a_2^3 a_3^3 a_4^5 a_5^2 \\
-90a_0^6 a_2^3 a_3^2 a_4^2 a_5^5 & +40a_0^5 a_1^2 a_3^3 a_4^6 a_5^2 & +1320a_0^5 a_2^3 a_3^2 a_4^7 a_5 \\
+120a_0^6 a_2^3 a_3 a_4^4 a_5^4 & +165a_0^5 a_1^2 a_3^2 a_4^8 a_5 & -260a_0^5 a_2^3 a_3 a_4^9 \\
-40a_0^6 a_2^3 a_4^6 a_5^3 & -75a_0^5 a_1^2 a_3 a_4^{10} & +60a_0^5 a_2^2 a_3^7 a_5^4 \\
+60a_0^6 a_2^2 a_3^4 a_4 a_5^5 & -10a_0^5 a_1 a_2^5 a_4 a_5^6 & -500a_0^5 a_2^2 a_3^6 a_4^2 a_5^3 \\
+30a_0^6 a_2^2 a_3^3 a_4^3 a_5^4 & -60a_0^5 a_1 a_2^4 a_3^2 a_5^6 & +2235a_0^5 a_2^2 a_3^5 a_4^4 a_5^2 \\
-180a_0^6 a_2^2 a_3^2 a_4^5 a_5^3 & +210a_0^5 a_1 a_2^4 a_3 a_4^2 a_5^5 & -1995a_0^5 a_2^2 a_3^4 a_4^6 a_5 \\
+120a_0^6 a_2^2 a_3 a_4^7 a_5^2 & -110a_0^5 a_1 a_2^4 a_4^4 a_5^4 & +370a_0^5 a_2^2 a_3^3 a_4^8 \\
-20a_0^6 a_2^2 a_4^9 a_5 & +60a_0^5 a_1 a_2^3 a_3^2 a_4^3 a_5^4 & +360a_0^5 a_2 a_3^8 a_4 a_5^3 \\
-15a_0^6 a_2 a_3^6 a_5^5 & -360a_0^5 a_1 a_2^3 a_3 a_4^5 a_5^3 & -1320a_0^5 a_2 a_3^7 a_4^3 a_5^2 \\
-110a_0^6 a_2 a_3^5 a_4^2 a_5^4 & +240a_0^5 a_1 a_2^3 a_4^7 a_5^2 & +1110a_0^5 a_2 a_3^6 a_4^5 a_5 \\
+256a_0^6 a_2 a_3^4 a_4^4 a_5^3 & +30a_0^5 a_1 a_2^2 a_3^5 a_5^5 & -210a_0^5 a_2 a_3^5 a_4^7 \\
-200a_0^6 a_2 a_3^3 a_4^6 a_5^2 & -210a_0^5 a_1 a_2^2 a_3^4 a_4^2 a_5^4 & -81a_0^5 a_3^{10} a_5^3 \\
+65a_0^6 a_2 a_3^2 a_4^8 a_5 & -180a_0^5 a_1 a_2^2 a_3^3 a_4^4 a_5^3 & +270a_0^5 a_3^9 a_4^2 a_5^2 \\
-10a_0^6 a_2 a_3 a_4^{10} & +1140a_0^5 a_1 a_2^2 a_3^2 a_4^6 a_5^2 & -225a_0^5 a_3^8 a_4^4 a_5 \\
+45a_0^6 a_3^7 a_4 a_5^4 & -870a_0^5 a_1 a_2^2 a_3 a_4^8 a_5 & +45a_0^5 a_3^7 a_4^6 \\
-100a_0^6 a_3^6 a_4^3 a_5^3 & +130a_0^5 a_1 a_2^2 a_4^{10} & -10a_0^4 a_1^4 a_2^3 a_5^7 \\
+81a_0^6 a_3^5 a_4^5 a_5^2 & +310a_0^5 a_1 a_2 a_3^6 a_4 a_5^4 & +90a_0^4 a_1^4 a_2^2 a_3 a_4 a_5^6 \\
-30a_0^6 a_3^4 a_4^7 a_5 & -240a_0^5 a_1 a_2 a_3^5 a_4^3 a_5^3 & -60a_0^4 a_1^4 a_2^2 a_4^3 a_5^5
\end{array}
$$

J_{18}:

$$
\begin{array}{lll}
-120a_0^4a_1^4a_2a_3^3a_5^6 & +265a_0^4a_1^2a_2^2a_3a_4^9 & -60a_0^4a_2^7a_3^2a_5^5 \\
+90a_0^4a_1^4a_2a_3^2a_4^2a_5^5 & +1420a_0^4a_1^2a_2a_3^7a_5^4 & -1420a_0^4a_2^7a_3a_4^2a_5^4 \\
+110a_0^4a_1^4a_3^4a_4a_5^5 & -3810a_0^4a_1^2a_2a_3^6a_4^2a_5^3 & +25a_0^4a_2^7a_4^4a_5^3 \\
-50a_0^4a_1^4a_3^3a_4^3a_5^4 & +2310a_0^4a_1^2a_2a_3^5a_4^4a_5^2 & +780a_0^4a_2^6a_3^3a_4a_5^4 \\
-240a_0^4a_1^4a_3^2a_4^5a_5^3 & +1795a_0^4a_1^2a_2a_3^4a_4^6a_5 & +5760a_0^4a_2^6a_3^2a_4^3a_5^3 \\
+280a_0^4a_1^4a_3a_4^7a_5^2 & -1800a_0^4a_1^2a_2a_3^3a_4^8 & -2945a_0^4a_2^6a_3a_4^5a_5^2 \\
-90a_0^4a_1^4a_4^9a_5 & +240a_0^4a_1^2a_3^8a_4a_5^3 & +1390a_0^4a_2^6a_4^7a_5 \\
+35a_0^4a_1^3a_2^4a_4a_5^6 & +30a_0^4a_1^2a_3^7a_4^3a_5^2 & -7020a_0^4a_2^5a_3^4a_4^2a_5^3 \\
-30a_0^4a_1^3a_2^3a_3^2a_5^6 & -870a_0^4a_1^2a_3^6a_4^5a_5 & -180a_0^4a_2^5a_3^3a_4^4a_5^2 \\
-120a_0^4a_1^3a_2^3a_3a_4^2a_5^5 & +615a_0^4a_1^2a_3^5a_4^7 & -1275a_0^4a_2^5a_3^2a_4^6a_5 \\
+50a_0^4a_1^3a_2^3a_4^4a_5^4 & -45a_0^4a_1a_2^7a_5^6 & -1110a_0^4a_2^5a_3a_4^8 \\
-60a_0^4a_1^3a_2^2a_3^3a_4a_5^5 & -310a_0^4a_1a_2^6a_3a_4a_5^5 & +3120a_0^4a_2^4a_3^6a_4a_5^3 \\
+360a_0^4a_1^3a_2^2a_3a_4^5a_5^3 & +685a_0^4a_1a_2^6a_4^3a_5^4 & +3900a_0^4a_2^4a_3^5a_4^3a_5^2 \\
-210a_0^4a_1^3a_2^2a_4^7a_5^2 & +120a_0^4a_1a_2^5a_3^3a_5^5 & +1240a_0^4a_2^4a_3^4a_4^5a_5 \\
+270a_0^4a_1^3a_2^2a_3^5a_5^5 & +1965a_0^4a_1a_2^5a_3^2a_4^2a_5^4 & +3155a_0^4a_2^4a_3^3a_4^7 \\
+575a_0^4a_1^3a_2a_3^4a_4^2a_5^4 & -2210a_0^4a_1a_2^5a_3a_4^4a_5^3 & -515a_0^4a_2^3a_3^8a_5^3 \\
-1700a_0^4a_1^3a_2a_3^3a_4^4a_5^3 & -960a_0^4a_1a_2^5a_4^6a_5^2 & -2920a_0^4a_2^3a_3^7a_4^2a_5^2 \\
+480a_0^4a_1^3a_2a_3^2a_4^6a_5^2 & -11700a_0^4a_1a_2^4a_3^3a_4^3a_5^3 & -940a_0^4a_2^3a_3^6a_4^4a_5 \\
+670a_0^4a_1^3a_2a_3a_4^8a_5 & +15435a_0^4a_1a_2^4a_3^2a_4^5a_5^2 & -4300a_0^4a_2^3a_3^5a_4^6 \\
-315a_0^4a_1^3a_2a_4^{10} & -2760a_0^4a_1a_2^4a_3a_4^7a_5 & +675a_0^4a_2^2a_3^9a_4a_5^2 \\
-685a_0^4a_1^3a_3^6a_4a_5^4 & +555a_0^4a_1a_2^4a_4^9 & +510a_0^4a_2^2a_3^8a_4^3a_5 \\
+540a_0^4a_1^3a_3^5a_4^3a_5^3 & -780a_0^4a_1a_2^3a_3^6a_5^4 & +2940a_0^4a_2^2a_3^7a_4^5 \\
+1515a_0^4a_1^3a_3^4a_4^5a_5^2 & +14040a_0^4a_1a_2^3a_3^5a_4^2a_5^3 & -135a_0^4a_2a_3^{10}a_4^2a_5 \\
-2080a_0^4a_1^3a_3^3a_4^7a_5 & -10625a_0^4a_1a_2^3a_3^4a_4^4a_5^2 & -990a_0^4a_2a_3^9a_4^4 \\
+705a_0^4a_1^3a_3^2a_4^9 & -3220a_0^4a_1a_2^3a_3^3a_4^6a_5 & +135a_0^4a_3^{11}a_4^3 \\
+110a_0^4a_1^2a_2^5a_3a_5^6 & -570a_0^4a_1a_2^3a_3^2a_4^8 & +10a_0^3a_1^6a_2^2a_5^7 \\
-195a_0^4a_1^2a_2^5a_4^2a_5^5 & -5840a_0^4a_1a_2^2a_3^7a_4a_5^3 & -60a_0^3a_1^6a_2a_3a_4a_5^6 \\
+210a_0^4a_1^2a_2^4a_3^2a_4a_5^5 & -540a_0^4a_1a_2^2a_3^6a_4^3a_5^2 & +40a_0^3a_1^6a_2a_4^3a_5^5 \\
-575a_0^4a_1^2a_2^4a_3a_4^3a_5^4 & +5550a_0^4a_1a_2^2a_3^5a_4^5a_5 & +40a_0^3a_1^6a_3^3a_5^6 \\
+660a_0^4a_1^2a_2^4a_4^5a_5^3 & +1285a_0^4a_1a_2^2a_3^4a_4^7 & -30a_0^3a_1^6a_3^2a_4^2a_5^5 \\
-225a_0^4a_1^2a_2^3a_3^4a_5^5 & +990a_0^4a_1a_2a_3^9a_5^3 & -40a_0^3a_1^5a_2^3a_4a_5^6 \\
+1350a_0^4a_1^2a_2^3a_3^2a_4^4a_5^3 & +3150a_0^4a_1a_2a_3^8a_4^2a_5^2 & +180a_0^3a_1^5a_2^2a_3^2a_5^6 \\
-1440a_0^4a_1^2a_2^3a_3a_4^6a_5^2 & -3600a_0^4a_1a_2a_3^7a_4^4a_5 & -360a_0^3a_1^5a_2^2a_3a_4^2a_5^5 \\
-75a_0^4a_1^2a_2^3a_4^8a_5 & -615a_0^4a_1a_2a_3^6a_4^6 & +240a_0^3a_1^5a_2^2a_4^4a_5^4 \\
-1965a_0^4a_1^2a_2^2a_3^5a_4a_5^4 & -945a_0^4a_1a_3^{10}a_4a_5^2 & +360a_0^3a_1^5a_2a_3^3a_4a_5^5 \\
+6000a_0^4a_1^2a_2^2a_3^4a_4^3a_5^3 & +900a_0^4a_1a_3^9a_4^3a_5 & -360a_0^3a_1^5a_2a_3^2a_4^3a_5^4 \\
-7050a_0^4a_1^2a_2^2a_3^3a_4^5a_5^2 & +45a_0^4a_1a_3^8a_4^5 & -196a_0^3a_1^5a_3^5a_5^5 \\
+3000a_0^4a_1^2a_2^2a_3^2a_4^7a_5 & +180a_0^4a_2^8a_4a_5^5 & -660a_0^3a_1^5a_3^4a_4^2a_5^4
\end{array}
$$

J_{18}:

$+1840a_0^3a_1^5a_3^3a_4^4a_5^3$
$-1040a_0^3a_1^5a_3^2a_4^6a_5^2$
$-180a_0^3a_1^5a_3a_4^8a_5$
$+216a_0^3a_1^5a_4^{10}$
$-265a_0^3a_1^4a_2^4a_3a_5^6$
$+315a_0^3a_1^4a_2^4a_4^2a_5^5$
$+180a_0^3a_1^4a_2^3a_3^2a_4a_5^5$
$+1700a_0^3a_1^4a_2^3a_3a_4^3a_5^4$
$-1840a_0^3a_1^4a_2^3a_4^5a_5^3$
$-615a_0^3a_1^4a_2^2a_3^4a_5^5$
$-1350a_0^3a_1^4a_2^2a_3^3a_4^2a_5^4$
$+1560a_0^3a_1^4a_2^2a_3a_4^6a_5^2$
$+135a_0^3a_1^4a_2^2a_4^8a_5$
$+2210a_0^3a_1^4a_2a_3^5a_4a_5^4$
$+4100a_0^3a_1^4a_2a_3^4a_4^3a_5^3$
$+6000a_0^3a_1^4a_2a_3^3a_4^5a_5^2$
$-4880a_0^3a_1^4a_2a_3^2a_4^7a_5$
$+990a_0^3a_1^4a_2a_3a_4^9$
$-25a_0^3a_1^4a_3^7a_5^4$
$+3710a_0^3a_1^4a_3^6a_4^2a_5^3$
$-10755a_0^3a_1^4a_3^5a_4^4a_5^2$
$+9875a_0^3a_1^4a_3^4a_4^6a_5$
$-2845a_0^3a_1^4a_3^8a_4^8$
$+100a_0^3a_1^3a_2^6a_5^6$
$+240a_0^3a_1^3a_2^5a_3a_4a_5^5$
$-540a_0^3a_1^3a_2^5a_4^3a_5^4$
$+220a_0^3a_1^3a_2^4a_3^3a_5^5$
$-6000a_0^3a_1^3a_2^4a_3^2a_4^2a_5^4$
$+4100a_0^3a_1^3a_2^4a_3a_4^4a_5^3$
$+1340a_0^3a_1^3a_2^4a_4^6a_5^2$
$+11700a_0^3a_1^3a_2^3a_3^4a_4a_5^4$
$-15240a_0^3a_1^3a_2^3a_3^2a_4^5a_5^2$
$+6960a_0^3a_1^3a_2^3a_3a_4^7a_5$
$-1620a_0^3a_1^3a_2^3a_4^9$
$-5760a_0^3a_1^3a_2^2a_3^6a_5^4$
$-16120a_0^3a_1^3a_2^2a_3^5a_4^2a_5^3$
$+26700a_0^3a_1^3a_2^2a_3^4a_4^4a_5^2$
$-5240a_0^3a_1^3a_2^2a_3^3a_4^6a_5$
$-1640a_0^3a_1^3a_2^2a_3^2a_4^8$
$+6560a_0^3a_1^3a_2a_3^7a_4a_5^3$
$+7240a_0^3a_1^3a_2a_3^6a_4^3a_5^2$
$-24240a_0^3a_1^3a_2a_3^5a_4^5a_5$
$+11420a_0^3a_1^3a_2a_3^4a_4^7$
$-980a_0^3a_1^3a_3^9a_5^3$
$-3420a_0^3a_1^3a_3^8a_4^2a_5^2$
$+8100a_0^3a_1^3a_3^7a_4^4a_5$
$-3880a_0^3a_1^3a_3^6a_4^6$
$-300a_0^3a_1^2a_2^7a_4a_5^5$
$+500a_0^3a_1^2a_2^6a_3^6a_5^5$
$+3810a_0^3a_1^2a_2^6a_3a_4^2a_5^4$
$-3710a_0^3a_1^2a_2^6a_4^4a_5^3$
$-14040a_0^3a_1^2a_2^5a_3^3a_4a_5^4$
$+16120a_0^3a_1^2a_2^5a_3^2a_4^3a_5^3$
$-540a_0^3a_1^2a_2^5a_3a_4^5a_5^2$
$+600a_0^3a_1^2a_2^5a_4^7a_5$
$+7020a_0^3a_1^2a_2^4a_3^5a_5^4$
$+1950a_0^3a_1^2a_2^4a_3^3a_4^4a_5^2$
$-17670a_0^3a_1^2a_2^4a_3^2a_4^6a_5$
$+4170a_0^3a_1^2a_2^4a_3a_4^8$
$+480a_0^3a_1^2a_2^3a_3^6a_4a_5^3$
$-31040a_0^3a_1^2a_2^3a_3^5a_4^3a_5^2$
$+45180a_0^3a_1^2a_2^3a_3^4a_4^5a_5$
$-3160a_0^3a_1^2a_2^3a_3^3a_4^7$
$-140a_0^3a_1^2a_2^2a_3^8a_5^3$
$+18000a_0^3a_1^2a_2^2a_3^7a_4^2a_5^2$
$-12180a_0^3a_1^2a_2^2a_3^6a_4^4a_5$
$-13430a_0^3a_1^2a_2^2a_3^5a_4^6$
$-7200a_0^3a_1^2a_2a_3^9a_4a_5^2$
$-120a_0^3a_1^2a_2a_3^8a_4^3a_5$
$+9960a_0^3a_1^2a_2a_3^7a_4^5$
$+1890a_0^3a_1^2a_3^{11}a_5^2$
$-540a_0^3a_1^2a_3^{10}a_4^2a_5$
$-1710a_0^3a_1^2a_3^9a_4^4$
$-360a_0^3a_1a_2^8a_3a_5^5$
$-240a_0^3a_1a_2^8a_4^2a_5^4$
$+5840a_0^3a_1a_2^7a_3^2a_4a_5^4$
$-6560a_0^3a_1a_2^7a_3a_4^3a_5^3$
$+8460a_0^3a_1a_2^7a_4^5a_5^2$
$-3120a_0^3a_1a_2^6a_3^4a_5^4$
$-480a_0^3a_1a_2^6a_3^3a_4^2a_5^3$
$-25880a_0^3a_1a_2^6a_3^2a_4^4a_5^2$
$-1820a_0^3a_1a_2^6a_3a_4^6a_5$
$-3620a_0^3a_1a_2^6a_4^8$
$+49680a_0^3a_1a_2^5a_3^4a_4^3a_5^2$
$+17520a_0^3a_1a_2^5a_3^3a_4^5a_5$
$+13500a_0^3a_1a_2^5a_3^2a_4^7$
$-120a_0^3a_1a_2^4a_3^7a_5^3$
$-32280a_0^3a_1a_2^4a_3^6a_4^2a_5^2$
$-46880a_0^3a_1a_2^4a_3^5a_4^4a_5$
$-30040a_0^3a_1a_2^4a_3^4a_4^6$
$+12860a_0^3a_1a_2^3a_3^8a_4a_5^2$
$+32000a_0^3a_1a_2^3a_3^7a_4^3a_5$
$+46160a_0^3a_1a_2^3a_3^6a_4^5$
$-2700a_0^3a_1a_2^2a_3^{10}a_5^2$
$-8820a_0^3a_1a_2^2a_3^9a_4^2a_5$
$-34620a_0^3a_1a_2^2a_3^8a_4^4$
$+1080a_0^3a_1a_2a_3^{11}a_4a_5$
$+12060a_0^3a_1a_2a_3^{10}a_4^3$
$-1620a_0^3a_1a_3^{12}a_4^2$
$+81a_0^3a_2^{10}a_5^5$
$-990a_0^3a_2^9a_3a_4a_5^4$
$+980a_0^3a_2^9a_4^3a_5^3$
$+515a_0^3a_2^8a_3^3a_5^4$
$+140a_0^3a_2^8a_3^2a_4^2a_5^3$
$-195a_0^3a_2^8a_3a_4^4a_5^2$
$-5575a_0^3a_2^8a_4^6a_5$
$+120a_0^3a_2^7a_3^4a_4a_5^3$
$-800a_0^3a_2^7a_3^3a_4^3a_5^2$
$+22600a_0^3a_2^7a_3^2a_4^5a_5$
$+7240a_0^3a_2^7a_3a_4^7$
$-1260a_0^3a_2^6a_3^5a_4^2a_5^2$
$-42330a_0^3a_2^6a_3^4a_4^4a_5$
$-34340a_0^3a_2^6a_3^3a_4^6$
$+480a_0^3a_2^5a_3^7a_4a_5^2$

J_{18}:

$$
\begin{array}{lll}
+48360a_0^3a_2^5a_3^6a_4^3a_5 & -6000a_0^2a_1^5a_2^3a_3a_4^4a_5^3 & -30a_0^2a_1^3a_2^7a_4^2a_5^4 \\
+73828a_0^3a_2^5a_3^5a_4^5 & +2440a_0^2a_1^5a_2^3a_4^6a_5^2 & +540a_0^2a_1^3a_2^6a_3^2a_4a_5^4 \\
+105a_0^3a_2^4a_3^9a_5^2 & -15435a_0^2a_1^5a_2^2a_3^4a_4a_5^4 & -7240a_0^2a_1^3a_2^6a_3a_4^3a_5^4 \\
-30265a_0^3a_2^4a_3^8a_4^2a_5 & +15240a_0^2a_1^5a_2^2a_3^3a_4^3a_5^3 & -20390a_0^2a_1^3a_2^6a_4^5a_5^2 \\
-92290a_0^3a_2^4a_3^7a_4^4 & -6480a_0^2a_1^5a_2^2a_3a_4^7a_5 & -3900a_0^2a_1^3a_2^5a_3^4a_5^4 \\
+9540a_0^3a_2^3a_3^{10}a_4a_5 & +1215a_0^2a_1^5a_2^2a_4^9 & +31040a_0^2a_1^3a_2^5a_3^3a_4^2a_5^3 \\
+69220a_0^3a_2^3a_3^9a_4^3 & +2945a_0^2a_1^5a_2a_3^6a_5^4 & +32370a_0^2a_1^3a_2^5a_3^2a_4^4a_5^2 \\
-1215a_0^3a_2^2a_3^{12}a_5 & +540a_0^2a_1^5a_2a_3^5a_4^2a_5^3 & +38820a_0^2a_1^3a_2^5a_3a_4^6a_5 \\
-30510a_0^3a_2^2a_3^{11}a_4^2 & -795a_0^2a_1^5a_2a_3^4a_4^4a_5^2 & +9310a_0^2a_1^3a_2^5a_4^8 \\
+7290a_0^3a_2a_3^{13}a_4 & -4180a_0^2a_1^5a_2a_3^3a_4^6a_5 & -49680a_0^2a_1^3a_2^4a_3^5a_4a_5^3 \\
-729a_0^3a_3^{15} & +4185a_0^2a_1^5a_2a_3^2a_4^8 & -91260a_0^2a_1^3a_2^4a_3^3a_4^5a_5 \\
-5a_0^2a_1^8a_2a_5^7 & -8460a_0^2a_1^5a_3^7a_4a_5^3 & -50550a_0^2a_1^3a_2^4a_3^2a_4^7 \\
+15a_0^2a_1^8a_3a_4a_5^6 & +20390a_0^2a_1^5a_3^6a_4^3a_5^2 & +800a_0^2a_1^3a_2^3a_3^7a_5^3 \\
-10a_0^2a_1^8a_4^3a_5^5 & -16194a_0^2a_1^5a_3^5a_4^5a_5 & +81840a_0^2a_1^3a_2^3a_3^6a_4^2a_5^2 \\
+10a_0^2a_1^7a_2^2a_4a_5^6 & +3765a_0^2a_1^5a_3^4a_4^7 & +360a_0^2a_1^3a_2^3a_3^5a_4^4a_5 \\
-120a_0^2a_1^7a_2a_3^2a_5^6 & +120a_0^2a_1^4a_2^6a_4a_5^5 & +101450a_0^2a_1^3a_2^3a_3^4a_4^6 \\
+420a_0^2a_1^7a_2a_3a_4^2a_5^5 & -2235a_0^2a_1^4a_2^5a_3^2a_5^5 & -8220a_0^2a_1^3a_2^2a_3^8a_4a_5^2 \\
-280a_0^2a_1^7a_2a_4^4a_5^4 & -2310a_0^2a_1^4a_2^3a_3a_4^2a_5^4 & -58080a_0^2a_1^3a_2^2a_3^7a_4^3a_5 \\
-240a_0^2a_1^7a_3^3a_4a_5^5 & +10755a_0^2a_1^4a_2^5a_4^4a_5^3 & -34300a_0^2a_1^3a_2^2a_3^6a_4^5 \\
+210a_0^2a_1^7a_3^2a_4^3a_5^4 & +10625a_0^2a_1^4a_2^4a_3^3a_4a_5^4 & -7590a_0^2a_1^3a_2a_3^{10}a_5^2 \\
+200a_0^2a_1^6a_2^3a_3a_5^6 & -26700a_0^2a_1^4a_2^4a_3^2a_4^3a_5^3 & +41640a_0^2a_1^3a_2a_3^9a_4^2a_5 \\
-40a_0^2a_1^6a_2^3a_4^2a_5^5 & +795a_0^2a_1^4a_2^4a_3a_4^5a_5^2 & -4650a_0^2a_1^3a_2a_3^8a_4^4 \\
-1140a_0^2a_1^6a_2^2a_3^2a_4a_5^5 & -10070a_0^2a_1^4a_2^4a_4^7a_5 & -5580a_0^2a_1^3a_3^{11}a_4a_5 \\
-480a_0^2a_1^6a_2^2a_3a_4^3a_5^4 & +180a_0^2a_1^4a_2^3a_3^5a_5^4 & +1980a_0^2a_1^3a_3^{10}a_4^3 \\
+1040a_0^2a_1^6a_2^2a_4^5a_5^3 & +1950a_0^2a_1^4a_2^3a_3^4a_4^2a_5^3 & -270a_0^2a_1^2a_2^9a_5^5 \\
+660a_0^2a_1^6a_2a_3^4a_5^5 & +36510a_0^2a_1^4a_2^3a_3^2a_4^6a_5 & -3150a_0^2a_1^2a_2^8a_3a_4a_5^4 \\
+1440a_0^2a_1^6a_2a_3^3a_4^2a_5^4 & +25880a_0^2a_1^4a_2^2a_3^6a_4a_5^3 & +3420a_0^2a_1^2a_2^8a_4^3a_5^3 \\
-1560a_0^2a_1^6a_2a_3^2a_4^4a_5^3 & +32370a_0^2a_1^4a_2^2a_3^5a_4^3a_5^2 & +2920a_0^2a_1^2a_2^7a_3^3a_5^4 \\
+960a_0^2a_1^6a_3^5a_4a_5^4 & -12180a_0^2a_1^4a_2^2a_3^4a_4^5a_5 & -18000a_0^2a_1^2a_2^7a_3^2a_4^2a_5^3 \\
-1340a_0^2a_1^6a_3^4a_4^3a_5^3 & -9850a_0^2a_1^4a_2^2a_3^3a_4^7 & +43800a_0^2a_1^2a_2^7a_3a_4^4a_5^2 \\
-2440a_0^2a_1^6a_3^3a_4^5a_5^2 & +195a_0^2a_1^4a_2a_3^8a_5^3 & +5030a_0^2a_1^2a_2^7a_4^6a_5 \\
+4320a_0^2a_1^6a_3^2a_4^7a_5 & -43800a_0^2a_1^4a_2a_3^7a_4^2a_5^2 & +32280a_0^2a_1^2a_2^6a_3^4a_4a_5^3 \\
-1620a_0^2a_1^6a_3a_4^9 & +72755a_0^2a_1^4a_2a_3^6a_4^4a_5 & -81840a_0^2a_1^2a_2^6a_3^3a_4^3a_5^2 \\
-81a_0^2a_1^5a_2^5a_5^6 & -18750a_0^2a_1^4a_2a_3^5a_4^6 & -85800a_0^2a_1^2a_2^6a_3^2a_4^5a_5 \\
+390a_0^2a_1^5a_2^4a_3a_4a_5^5 & +14115a_0^2a_1^4a_3^9a_4a_5^2 & -28710a_0^2a_1^2a_2^6a_3a_4^7 \\
-1515a_0^2a_1^5a_2^4a_4^3a_5^4 & -23790a_0^2a_1^4a_3^8a_4^3a_5 & +1260a_0^2a_1^2a_2^5a_3^6a_5^3 \\
+980a_0^2a_1^5a_2^3a_3^3a_5^5 & +8175a_0^2a_1^4a_3^7a_4^5 & +181980a_0^2a_1^2a_2^5a_3^4a_4^4a_5 \\
+7050a_0^2a_1^5a_2^3a_3^2a_4^2a_5^4 & +1320a_0^2a_1^3a_2^7a_3a_5^5 & +153480a_0^2a_1^2a_2^5a_3^3a_4^6
\end{array}
$$

J_{18}:

$-26700a_0^2a_1^2a_2^4a_3^7a_4a_5^2$	$-105a_0^2a_2^9a_3^4a_5^3$	$-1390a_0a_1^7a_3^6a_5^4$
$-41360a_0^2a_1^2a_2^4a_3^6a_4^3a_5$	$-14360a_0^2a_2^9a_3^3a_4^2a_5^2$	$-600a_0a_1^7a_3^5a_4^2a_5^3$
$-306900a_0^2a_1^2a_2^4a_3^5a_4^5$	$-43605a_0^2a_2^9a_3^2a_4^4a_5$	$+10070a_0a_1^7a_3^4a_4^4a_5^2$
$+14360a_0^2a_1^2a_2^3a_3^9a_5^2$	$-12310a_0^2a_2^9a_3a_4^6$	$-12600a_0a_1^7a_3^3a_4^6a_5$
$-16170a_0^2a_1^2a_2^3a_3^8a_4^2a_5$	$+4755a_0^2a_2^8a_3^5a_4a_5^2$	$+4050a_0a_1^7a_3^2a_4^8$
$+243000a_0^2a_1^2a_2^3a_3^7a_4^4$	$+77790a_0^2a_2^8a_3^4a_4^3a_5$	$-30a_0a_1^6a_2^5a_4a_5^5$
$+2340a_0^2a_1^2a_2^2a_3^{10}a_4a_5$	$+59835a_0^2a_2^8a_3^3a_4^5$	$+1995a_0a_1^6a_2^4a_3^2a_5^5$
$-89550a_0^2a_1^2a_2^2a_3^9a_4^3$	$-57060a_0^2a_2^7a_3^6a_4^2a_5$	$-1795a_0a_1^6a_2^4a_3a_4^2a_5^4$
$+270a_0^2a_1^2a_2a_3^{12}a_5$	$-114960a_0^2a_2^7a_3^5a_4^4$	$-9875a_0a_1^6a_2^4a_4^4a_5^3$
$+15120a_0^2a_1^2a_2a_3^{11}a_4^2$	$+19020a_0^2a_2^6a_3^8a_4a_5$	$+3220a_0a_1^6a_2^3a_3^3a_4a_5^4$
$-810a_0^2a_1^2a_3^{13}a_4$	$+109660a_0^2a_2^6a_3^7a_4^3$	$+5240a_0a_1^6a_2^3a_3^2a_4^3a_5^3$
$+945a_0^2a_1a_2^{10}a_4a_5^4$	$-2481a_0^2a_2^5a_3^{10}a_5$	$+4180a_0a_1^6a_2^3a_3a_4^5a_5^2$
$-675a_0^2a_1a_2^9a_3^2a_5^4$	$-56110a_0^2a_2^5a_3^9a_4^2$	$+12600a_0a_1^6a_2^3a_4^7a_5$
$+7200a_0^2a_1a_2^9a_3a_4^2a_5^3$	$+14895a_0^2a_2^4a_3^{11}a_4$	$+1275a_0a_1^6a_2^2a_3^5a_5^4$
$-14115a_0^2a_1a_2^9a_4^4a_5^2$	$-1620a_0^2a_2^3a_3^{13}$	$+17670a_0a_1^6a_2^2a_3^4a_4^2a_5^3$
$-12860a_0^2a_1a_2^8a_3^3a_4a_5^3$	$+a_0a_1^{10}a_5^7$	$-36510a_0a_1^6a_2^2a_3^3a_4^4a_5^2$
$+8220a_0^2a_1a_2^8a_3^2a_4^3a_5^2$	$+10a_0a_1^9a_2a_4a_5^6$	$-6075a_0a_1^6a_2^2a_3a_4^8$
$+150a_0^2a_1a_2^8a_3a_4^5a_5$	$+20a_0a_1^9a_3^2a_5^6$	$+1820a_0a_1^6a_2a_3^6a_4a_5^3$
$+6155a_0^2a_1a_2^8a_4^7$	$-130a_0a_1^9a_3a_4^2a_5^5$	$-38820a_0a_1^6a_2a_3^5a_4^3a_5^2$
$-480a_0^2a_1a_2^7a_3^5a_5^3$	$+90a_0a_1^9a_4^4a_5^4$	$+66650a_0a_1^6a_2a_3^4a_4^5a_5$
$+26700a_0^2a_1a_2^7a_3^4a_4^2a_5^2$	$-65a_0a_1^8a_2^2a_3a_5^6$	$-19800a_0a_1^6a_2a_3^3a_4^7$
$+63960a_0^2a_1a_2^7a_3^3a_4^4a_5$	$-165a_0a_1^8a_2^2a_4^2a_5^5$	$+5575a_0a_1^6a_3^8a_5^3$
$-6660a_0^2a_1a_2^7a_3^2a_4^6$	$+870a_0a_1^8a_2a_3^2a_4a_5^5$	$-5030a_0a_1^6a_3^7a_4^2a_5^2$
$-180600a_0^2a_1a_2^6a_3^5a_4^3a_5$	$-670a_0a_1^8a_2a_3a_4^3a_5^4$	$-4255a_0a_1^6a_3^6a_4^4a_5$
$-71610a_0^2a_1a_2^6a_3^4a_4^5$	$+180a_0a_1^8a_2a_4^5a_5^3$	$+2175a_0a_1^6a_3^5a_4^6$
$-4755a_0^2a_1a_2^5a_3^8a_5^2$	$-45a_0a_1^8a_3^4a_5^5$	$-1110a_0a_1^5a_2^6a_3a_5^5$
$+141240a_0^2a_1a_2^5a_3^7a_4^2a_5$	$+75a_0a_1^8a_3^3a_4^2a_5^4$	$+870a_0a_1^5a_2^6a_4^2a_5^4$
$+219730a_0^2a_1a_2^4a_3^6a_4^4$	$-135a_0a_1^8a_3^2a_4^4a_5^3$	$-5550a_0a_1^5a_2^5a_3^2a_4a_5^4$
$-45130a_0^2a_1a_2^4a_3^9a_4a_5$	$+30a_0a_1^7a_2^3a_3a_4a_5^5$	$+24240a_0a_1^5a_2^5a_3a_4^3a_5^3$
$-240975a_0^2a_1a_2^4a_3^8a_4^3$	$-280a_0a_1^7a_2^3a_3a_4a_5^5$	$+16194a_0a_1^5a_2^5a_4^5a_5^2$
$+5580a_0^2a_1a_2^3a_3^{11}a_5$	$+2080a_0a_1^7a_2^3a_4^3a_5^4$	$-1240a_0a_1^5a_2^4a_3^4a_4^4$
$+128490a_0^2a_1a_2^3a_3^{10}a_4^2$	$-1320a_0a_1^7a_2^2a_3^3a_5^5$	$-45180a_0a_1^5a_2^4a_3^3a_4^2a_5^3$
$-34155a_0^2a_1a_2^2a_3^{12}a_4$	$-3000a_0a_1^7a_2^2a_3^2a_4^2a_5^4$	$+12180a_0a_1^5a_2^4a_3^2a_4^4a_5^2$
$+3645a_0^2a_1a_2a_3^{14}$	$+4880a_0a_1^7a_2^2a_3a_4^4a_5^3$	$-66650a_0a_1^5a_2^4a_3a_4^6a_5$
$-1890a_0^2a_2^{11}a_4^2a_5^3$	$-4320a_0a_1^7a_2^2a_4^6a_5^2$	$-8550a_0a_1^5a_2^4a_4^8$
$+2700a_0^2a_2^{10}a_3^2a_4a_5^3$	$+2760a_0a_1^7a_2a_3^4a_4a_5^4$	$-17520a_0a_1^5a_3^3a_3^5a_4a_5^3$
$+7590a_0^2a_2^{10}a_3a_4^3a_5^2$	$-6960a_0a_1^7a_2a_3^3a_4^3a_5^3$	$+91260a_0a_1^5a_3^3a_3^4a_4^3a_5^2$
$+8256a_0^2a_2^{10}a_4^5a_5$	$+6480a_0a_1^7a_2a_3^2a_4^5a_5^2$	$+62100a_0a_1^5a_2^3a_3^2a_4^7$

J_{18}:

$$
\begin{array}{lll}
-22600a_0a_1^5a_2^2a_3^7a_5^3 & -32000a_0a_1^3a_2^7a_3^3a_4a_5^3 & -3375a_0a_1^2a_2^2a_3^{13} \\
+85800a_0a_1^5a_2^2a_3^6a_4^2a_5^2 & +58080a_0a_1^3a_2^7a_3^2a_4^3a_5^2 & -1080a_0a_1a_2^{11}a_3a_4a_5^3 \\
-148890a_0a_1^5a_2^2a_3^5a_4^4a_5 & -15440a_0a_1^3a_2^7a_3a_4^5a_5 & +5580a_0a_1a_2^{11}a_4^3a_5^2 \\
+1850a_0a_1^5a_2^2a_3^4a_4^6 & -12500a_0a_1^3a_2^7a_4^7 & -9540a_0a_1a_2^{10}a_3^3a_5^3 \\
-150a_0a_1^5a_2a_3^8a_4a_5^2 & -48360a_0a_1^3a_2^6a_3^5a_5^3 & -2340a_0a_1a_2^{10}a_3^2a_4^2a_5^2 \\
+15440a_0a_1^5a_2a_3^7a_4^3a_5 & +41360a_0a_1^3a_2^6a_3^4a_4^2a_5^2 & +20610a_0a_1a_2^{10}a_3a_4^4a_5 \\
+10350a_0a_1^5a_2a_3^6a_4^5 & -181600a_0a_1^3a_2^6a_3^3a_4^4a_5 & -4350a_0a_1a_2^{10}a_4^6 \\
-8256a_0a_1^5a_3^{10}a_5^2 & -18400a_0a_1^3a_2^6a_3^2a_4^6 & +45130a_0a_1a_2^9a_3^4a_4a_5^2 \\
+12210a_0a_1^5a_3^9a_4^2a_5 & +180600a_0a_1^3a_2^5a_3^6a_4a_5^2 & -92200a_0a_1a_2^9a_3^3a_4^3a_5 \\
-7050a_0a_1^5a_3^8a_4^4 & +289800a_0a_1^3a_2^5a_3^4a_4^5 & -25050a_0a_1a_2^9a_3^2a_4^5 \\
+225a_0a_1^4a_2^8a_5^5 & -77790a_0a_1^3a_2^4a_3^8a_5^2 & -19020a_0a_1a_2^8a_3^6a_5^2 \\
+3600a_0a_1^4a_2^7a_3a_4a_5^4 & -87000a_0a_1^3a_2^4a_3^7a_4^2a_5 & +46050a_0a_1a_2^8a_3^5a_4^2a_5 \\
-8100a_0a_1^4a_2^7a_4^3a_5^3 & -318500a_0a_1^3a_2^4a_3^6a_4^4 & +138750a_0a_1a_2^8a_3^4a_4^4 \\
+940a_0a_1^4a_2^6a_3^3a_5^4 & +92200a_0a_1^3a_2^3a_3^9a_4a_5 & -178200a_0a_1a_2^7a_3^6a_4^3 \\
+12180a_0a_1^4a_2^6a_3^2a_4^2a_5^3 & +179500a_0a_1^3a_2^3a_3^8a_4^3 & -1650a_0a_1a_2^6a_3^9a_5 \\
-72755a_0a_1^4a_2^6a_3a_4^4a_5^2 & -17520a_0a_1^3a_2^2a_3^{11}a_5 & +103950a_0a_1a_2^6a_3^8a_4^2 \\
+4225a_0a_1^4a_2^6a_4^6a_5 & -69000a_0a_1^3a_2^2a_3^{10}a_4^2 & -30250a_0a_1a_2^5a_3^{10}a_4 \\
+46880a_0a_1^4a_2^5a_3^4a_4a_5^3 & +15300a_0a_1^3a_2a_3^{12}a_4 & +3600a_0a_1a_2^4a_3^{12} \\
-360a_0a_1^4a_2^5a_3^3a_4^3a_5^2 & -1350a_0a_1^3a_3^{14} & +1215a_0a_2^{12}a_3^2a_5^3 \\
+148890a_0a_1^4a_2^5a_3^2a_4^5a_5 & +135a_0a_1^2a_2^{10}a_3a_5^4 & -270a_0a_2^{12}a_3a_4^2a_5^2 \\
+38950a_0a_1^4a_2^5a_3a_4^7 & +540a_0a_1^2a_2^{10}a_4^2a_5^3 & -5445a_0a_2^{12}a_4^4a_5 \\
+42330a_0a_1^4a_2^4a_3^6a_5^3 & +8820a_0a_1^2a_2^9a_3^2a_4a_5^3 & -5580a_0a_2^{11}a_3^3a_4a_5^2 \\
-181980a_0a_1^4a_2^4a_3^5a_4^2a_5^2 & -41640a_0a_1^2a_2^9a_3a_4^3a_5^2 & +17520a_0a_2^{11}a_3^2a_4^3a_5 \\
-220125a_0a_1^4a_2^4a_3^3a_4^6 & -12210a_0a_1^2a_2^9a_4^5a_5 & +8700a_0a_2^{11}a_3a_4^5 \\
-63960a_0a_1^4a_2^3a_3^7a_4a_5^2 & +30265a_0a_1^2a_2^8a_3^4a_5^3 & +2481a_0a_2^{10}a_3^5a_5^2 \\
+181600a_0a_1^4a_2^3a_3^6a_4^3a_5 & +16170a_0a_1^2a_2^8a_3^3a_4^2a_5^2 & -10595a_0a_2^{10}a_3^4a_4^2a_5 \\
+159000a_0a_1^4a_2^3a_3^5a_4^5 & +62025a_0a_1^2a_2^8a_3^2a_4^4a_5 & -31150a_0a_2^{10}a_3^3a_4^4 \\
+43605a_0a_1^4a_2^2a_3^9a_5^2 & +44225a_0a_1^2a_2^8a_3a_4^6 & +1650a_0a_2^9a_3^6a_4a_5 \\
-62025a_0a_1^4a_2^2a_3^8a_4^2a_5 & -141240a_0a_1^2a_2^7a_3^5a_4a_5^2 & +37950a_0a_2^9a_3^5a_4^3 \\
-92500a_0a_1^4a_2^2a_3^7a_4^4 & +87000a_0a_1^2a_2^7a_3^4a_4^3a_5^2 & -22275a_0a_2^8a_3^7a_4^2 \\
-20610a_0a_1^4a_2a_3^{10}a_4a_5 & -129000a_0a_1^2a_2^7a_3^3a_4^5 & +6600a_0a_2^7a_3^9a_4 \\
+41250a_0a_1^4a_2a_3^9a_4^3 & +57060a_0a_1^2a_2^6a_3^7a_5^2 & -800a_0a_2^6a_3^{11} \\
+5445a_0a_1^4a_3^{12}a_5 & -5250a_0a_1^2a_2^6a_3^5a_4^4 & -5a_1^{11}a_4a_5^6 \\
-6525a_0a_1^4a_3^{11}a_4^2 & -46050a_0a_1^2a_2^5a_3^8a_4a_5 & +10a_1^{10}a_2a_3a_5^6 \\
-900a_0a_1^3a_2^9a_4a_5^4 & +122800a_0a_1^2a_2^5a_3^7a_4^3 & +75a_1^{10}a_2a_4^2a_5^5 \\
-510a_0a_1^3a_2^8a_3^2a_5^4 & +10595a_0a_1^2a_2^4a_3^{10}a_5 & -130a_1^{10}a_3^2a_4a_5^5 \\
+120a_0a_1^3a_2^8a_3a_4^2a_5^3 & -88125a_0a_1^2a_2^4a_3^9a_4^2 & +310a_1^{10}a_3a_4^3a_5^4 \\
+23790a_0a_1^3a_2^8a_4^4a_5^2 & +27300a_0a_1^2a_2^3a_3^{11}a_4 & -216a_1^{10}a_4^5a_5^3
\end{array}
$$

J_{18}:

$$
\begin{array}{lll}
-5a_1^9a_2^3a_5^6 & -7240a_1^7a_2a_3^7a_5^3 & +306900a_1^5a_2^5a_3^4a_4^2a_5^2 \\
-30a_1^9a_2^2a_3a_4a_5^5 & +28710a_1^7a_2a_3^6a_4^2a_5^2 & -159000a_1^5a_2^5a_3^3a_4^4a_5 \\
-705a_1^9a_2^2a_4^3a_5^4 & -38950a_1^7a_2a_3^5a_4^4a_5 & +73375a_1^5a_2^5a_3^2a_4^6 \\
+260a_1^9a_2a_3^3a_5^5 & +25875a_1^7a_2a_3^4a_4^6 & +71610a_1^5a_2^4a_3^6a_4a_5^2 \\
-265a_1^9a_2a_3^2a_4^2a_5^4 & -6155a_1^7a_3^8a_4a_5^2 & -289800a_1^5a_2^4a_3^5a_4^3a_5 \\
-990a_1^9a_2a_3a_4^4a_5^3 & +125000a_1^7a_3^7a_4^3a_5 & -59835a_1^5a_2^3a_3^8a_5^2 \\
+1620a_1^9a_2a_4^6a_5^2 & -7375a_1^7a_3^6a_4^5 & +129000a_1^5a_2^3a_3^7a_4^2a_5 \\
-555a_1^9a_3^4a_4a_5^4 & -45a_1^6a_2^7a_5^5 & +80500a_1^5a_2^3a_3^6a_4^4 \\
+1620a_1^9a_3^3a_4^3a_5^3 & +615a_1^6a_2^6a_3a_4a_5^4 & +25050a_1^5a_2^2a_3^9a_4a_5 \\
-1215a_1^9a_3^2a_4^5a_5^2 & +3880a_1^6a_2^6a_4^3a_5^3 & -80125a_1^5a_2^2a_3^8a_4^3 \\
+30a_1^8a_2^4a_4a_5^5 & +4300a_1^6a_2^5a_3^3a_5^4 & -8700a_1^5a_2a_3^{11}a_5 \\
-370a_1^8a_2^3a_3^2a_5^5 & +13430a_1^6a_2^5a_3^2a_4^2a_5^3 & +19875a_1^5a_2a_3^{10}a_4^2 \\
+1800a_1^8a_2^3a_3a_4^2a_5^4 & +18750a_1^6a_2^5a_3a_4^4a_5^2 & -1125a_1^5a_3^{12}a_4 \\
+2845a_1^8a_2^3a_4^4a_5^3 & -2175a_1^6a_2^5a_4^6a_5 & +990a_1^4a_2^9a_3a_5^4 \\
+570a_1^8a_2^2a_3^3a_4a_5^4 & +30040a_1^6a_2^4a_3^4a_4a_5^3 & +1710a_1^4a_2^9a_4^2a_5^3 \\
+1640a_1^8a_2^2a_3^2a_4^3a_5^3 & -101450a_1^6a_2^4a_3^3a_4^3a_5^2 & +34620a_1^4a_2^8a_3^2a_4a_5^3 \\
-4185a_1^8a_2^2a_3a_4^5a_5^2 & -1850a_1^6a_2^4a_3^2a_4^5a_5 & +4650a_1^4a_2^8a_3a_4^3a_5^2 \\
-4050a_1^8a_2^2a_4^7a_5 & -25875a_1^6a_2^4a_3a_4^7 & +7050a_1^4a_2^8a_4^5a_5 \\
+1110a_1^8a_2a_3^5a_5^4 & +34340a_1^6a_2^3a_3^6a_5^3 & +92290a_1^4a_2^7a_3^4a_5^3 \\
-4170a_1^8a_2a_3^4a_4^2a_5^3 & -153480a_1^6a_2^3a_3^5a_4^2a_5^2 & -243000a_1^4a_2^7a_3^3a_4^2a_5^2 \\
+6075a_1^8a_2a_3^2a_4^6a_5 & +220125a_1^6a_2^3a_3^4a_4^4a_5 & +92500a_1^4a_2^7a_3^2a_4^4a_5 \\
+3620a_1^8a_3^6a_4a_5^3 & +6660a_1^6a_2^2a_3^7a_4a_5^2 & -42500a_1^4a_2^7a_3a_4^6 \\
-9310a_1^8a_3^5a_4^3a_5^2 & +18400a_1^6a_2^2a_3^6a_4^3a_5 & -219730a_1^4a_2^6a_3^5a_4a_5^2 \\
+8550a_1^8a_3^4a_4^5a_5 & -73375a_1^6a_2^2a_3^5a_4^5 & +318500a_1^4a_2^6a_3^4a_4^3a_5 \\
-3375a_1^8a_3^3a_4^7 & +12310a_1^6a_2a_3^9a_5^2 & -80500a_1^4a_2^6a_3^3a_4^5 \\
+210a_1^7a_2^5a_3a_5^5 & -44225a_1^6a_2a_3^8a_4^2a_5 & +114960a_1^4a_2^5a_3^7a_4^2 \\
-615a_1^7a_2^5a_4^2a_5^4 & +42500a_1^6a_2a_3^7a_4^4 & +5250a_1^4a_2^5a_3^6a_4^2a_5 \\
-1285a_1^7a_2^4a_3^2a_4a_5^4 & +4350a_1^6a_3^{10}a_4a_5 & -138750a_1^4a_2^4a_3^8a_4a_5 \\
-11420a_1^7a_2^4a_3a_4^3a_5^3 & -5125a_1^6a_3^9a_4^3 & -1250a_1^4a_2^4a_3^7a_4^3 \\
-3765a_1^7a_2^4a_4^5a_5^2 & -45a_1^5a_2^8a_4a_5^4 & +31150a_1^4a_2^3a_3^{10}a_5 \\
-3155a_1^7a_2^3a_3^4a_5^4 & -2940a_1^5a_2^7a_3^2a_5^4 & +40000a_1^4a_2^3a_3^9a_4^2 \\
+3160a_1^7a_2^3a_3^3a_4^2a_5^3 & -9960a_1^5a_2^7a_3a_4^2a_5^3 & -18750a_1^4a_2^2a_3^{11}a_4 \\
+9850a_1^7a_2^3a_3^2a_4^4a_5^2 & -8175a_1^5a_2^7a_4^4a_5^2 & +2250a_1^4a_2a_3^{13} \\
+19800a_1^7a_2^3a_3a_4^6a_5 & -46160a_1^5a_2^6a_3^3a_4a_5^3 & -135a_1^3a_2^{11}a_5^4 \\
+3375a_1^7a_2^3a_4^8 & +34300a_1^5a_2^6a_3^2a_4^3a_5^2 & -12060a_1^3a_2^{10}a_3a_4a_5^3 \\
-13500a_1^7a_2^2a_3^5a_4a_5^3 & -10350a_1^5a_2^6a_3a_4^5a_5 & -1980a_1^3a_2^{10}a_4^3a_5^2 \\
+50550a_1^7a_2^2a_3^4a_4^3a_5^2 & +7375a_1^5a_2^6a_4^7 & -69220a_1^3a_2^9a_3^3a_5^3 \\
-62100a_1^7a_2^2a_3^3a_4^5a_5 & -73828a_1^5a_2^5a_3^5a_5^3 & +89550a_1^3a_2^9a_3^2a_4^2a_5^2
\end{array}
$$

J_{18}:

$$
\begin{array}{lll}
-41250a_1^3a_2^9a_3a_4^4a_5 & -128490a_1^2a_2^{10}a_3^3a_4a_5^2 & -27300a_1a_2^{11}a_3^3a_4^2a_5 \\
+5125a_1^3a_2^9a_4^6 & +69000a_1^2a_2^{10}a_3^2a_4^3a_5 & +18750a_1a_2^{11}a_3^2a_4^4 \\
+240975a_1^3a_2^8a_3^4a_4a_5^2 & -19875a_1^2a_2^{10}a_3a_4^5 & +30250a_1a_2^{10}a_3^5a_4a_5 \\
-179500a_1^3a_2^8a_3^3a_4^3a_5 & +56110a_1^2a_2^9a_3^5a_5^2 & -17875a_1a_2^{10}a_3^4a_4^3 \\
+80125a_1^3a_2^8a_3^2a_4^5 & +88125a_1^2a_2^9a_3^4a_4^2a_5 & -6600a_1a_2^9a_3^7a_5 \\
-109660a_1^3a_2^7a_3^6a_5^2 & -40000a_1^2a_2^9a_3^3a_4^4 & +4125a_1a_2^9a_3^6a_4^2 \\
-122800a_1^3a_2^7a_3^5a_4^2a_5 & -103950a_1^2a_2^8a_3^6a_4a_5 & +729a_2^{15}a_5^3 \\
+1250a_1^3a_2^7a_3^4a_4^4 & +37125a_1^2a_2^8a_3^5a_4^3 & -3645a_2^{14}a_3a_4a_5^2 \\
+178200a_1^3a_2^6a_3^7a_4a_5 & +22275a_1^2a_2^7a_3^8a_5 & +1350a_2^{14}a_4^3a_5 \\
-37950a_1^3a_2^5a_3^9a_5 & -4125a_1^2a_2^6a_3^9a_4 & +1620a_2^{13}a_3^3a_5^2 \\
-37125a_1^3a_2^5a_3^8a_4^2 & +500a_1^2a_2^5a_3^{11} & +3375a_2^{13}a_3^2a_4^2a_5 \\
+17875a_1^3a_2^4a_3^{10}a_4 & -7290a_1a_2^{13}a_3a_5^3 & -2250a_2^{13}a_3a_4^4 \\
-2125a_1^3a_2^3a_3^{12} & +810a_1a_2^{13}a_4^2a_5^2 & -3600a_2^{12}a_3^4a_4a_5 \\
+1620a_1^2a_2^{12}a_4a_5^3 & +34155a_1a_2^{12}a_3^2a_4a_5^2 & +2125a_2^{12}a_3^3a_4^3 \\
+30510a_1^2a_2^{11}a_3^2a_5^3 & -15300a_1a_2^{12}a_3a_4^3a_5 & +800a_2^{11}a_3^6a_5 \\
-15120a_1^2a_2^{11}a_3a_4^2a_5^2 & +1125a_1a_2^{12}a_4^5 & -500a_2^{11}a_3^5a_4^2 \\
+6525a_1^2a_2^{11}a_4^4a_5 & -14895a_1a_2^{11}a_3^4a_5^2 &
\end{array}
$$

Die Invarianten J_4, ... als Funktionen der Wurzeln.

Die Differenzen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ seien zur Abkürzung mit

$$(\alpha_i - \alpha_k) = (ik)$$

bezeichnet. Es wird:

$$-2.5^4.J_4 = a_0^4 \Sigma(12)^2(23)^2(31)^2(45)^4 =$$
$$= a_0^4 \Sigma(12)^2(23)^2(34)^2(45)^2(51)^2.$$
$$5^5.\Delta = a_0^8 \Sigma(12)^2(13)^2(14)^2(15)^2(23)^2(24)^2(25)^2(34)^2(35)^2(45)^2.$$

Sei ferner gesetzt:

$$A_1 = (23)^2(45)^2 + (24)^2(35)^2 + (25)^2(34)^2,$$
$$B_1 = [(24)(35) + (25)(34)]\,[(23)(45) + (25)(43)]\,[(23)(54) + (24)(53)],$$
$$C_1 = [(12)(13)(45) + (12)(14)(35) + (15)(13)(42) + (15)(14)(32)]\,.$$
$$.\,[(12)(15)(34) + (12)(13)(54) + (14)(15)(32) + (14)(13)(52)]\,.$$
$$.\,[(12)(15)(43) + (12)(14)(53) + (13)(15)(42) + (13)(14)(52)];$$

mit A_2, A_3, A_4, A_5 die Ausdrücke bezeichnet, die aus A_1 durch Vertauschung bez. von 2, 3, 4, 5 mit 1 hervorgehen, und ebenso $B_2, \ldots, B_5$; $C_2, \ldots, C_5$ aus B_1 und C_1 definiert. Dann wird:

$$a_0^8.A_1A_2A_3A_4A_5 = 2^{10}.5^5.(J_4^2 - 3J_8),$$
$$a_0^{12}.B_1B_2B_3B_4B_5 = 5^{10}\{2^{13}.3^3.J'_{12} + 2^3.J_4^3 - 3^2.J_4\Delta\},$$
$$a_0^{18}.C_1C_2C_3C_4C_5 = -20^{15}.J_{18},$$

wo J_4, J_8, Δ, J'_{12}, J_{18} die in den vorhergehenden Tafeln gegebenen Ausdrücke vorstellen.

IV.

Die irreduciebeln Kovarianten

der

Formen dritter, vierter und fünfter Ordnung.

I. Die kubische Form:

$$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3.$$

1) $\varphi_{2,2} = \Delta = (a_0a_2 - a_1^2)x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)xy + (a_1a_3 - a_2^2)y^2.$

2) $\varphi_{3,3} = Q = (a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)x^3 +$
$+ 3(a_0a_1a_3 - 2a_0a_2^2 + a_1^2a_2)x^2y - 3(a_0a_2a_3 - 2a_1^2a_3 + a_1a_2^2)xy^2 -$
$- (a_0a_3^2 - 3a_1a_2a_3 + 2a_2^3)y^3.$

II. Die biquadratische Form:

$$f = a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4.$$

1) $\varphi_{4,2} = H = (a_0a_2 - a_1^2)x^4 + 2(a_0a_3 - a_1a_2)x^3y +$
$+ (a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2)x^2y^2 + 2(a_1a_4 - a_2a_3)xy^3 +$
$+ (a_2a_4 - a_3^2)y^4.$

2) $\varphi_{6,3} = T.$

x^6	x^5y	x^4y^2	x^3y^3	x^2y^4	xy^5	y^6
$+a_0^2a_3$	$+a_0^2a_4$	$+5a_0a_1a_4$	$-10a_0a_3^2$	$-5a_0a_3a_4$	$-a_0a_4^2$	$-a_1a_4^2$
$-3a_0a_1a_2$	$+2a_0a_1a_3$	$-15a_0a_2a_3$	$+10a_1^2a_4$	$+15a_1a_2a_4$	$-2a_1a_3a_4$	$+3a_2a_3a_4$
$+2a_1^3$	$-9a_0a_2^2$	$+10a_1^2a_3$		$-10a_1a_3^2$	$+9a_2^2a_4$	$-2a_3^3$
	$+6a_1^2a_2$				$-6a_2a_3^2$	

III. Die Form fünfter Ordnung.

Nr. 1.

$$f = a_0x^5 + 5a_1x^4y + 10a_2x^3y^2 + 10a_3x^2y^3 + 5a_4xy^4 + a_5y^5.$$

Nr. 2.

$$\varphi_{2,2} = i = (a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)x^2 + (a_0a_5 - 3a_1a_4 + 2a_2a_3)xy +$$
$$+ (a_1a_5 - 4a_2a_4 + 3a_3^2)y^2.$$

Nr. 3.

$\varphi_{6,2} = H =$ Hessesche Form von f.

x^6	x^5y	x^4y^2	x^3y^3	x^2y^4	xy^5	y^6
$+a_0a_2$	$+3a_0a_3$	$+3a_0a_4$	$+a_0a_5$	$+3a_1a_5$	$+3a_2a_5$	$+a_3a_5$
$-a_1^2$	$-3a_1a_2$	$+3a_1a_3$	$+7a_1a_4$	$+3a_2a_4$	$-3a_3a_4$	$-a_4^2$
		$-6a_2^2$	$-8a_2a_3$	$-6a_3^2$		

Nr. 4.

$\varphi_{3,3} = j = -\frac{1}{60}[i, f]$ (§ 22, 5).

x^3	x^2y	xy^2	y^3
$+a_0a_2a_4$	$+a_0a_2a_5$	$+a_0a_3a_5$	$+a_1a_3a_5$
$-a_0a_3^2$	$-a_0a_3a_4$	$-a_0a_4^2$	$-a_1a_4^2$
$-a_1^2a_4$	$-a_1^2a_5$	$-a_1a_2a_5$	$-a_2^2a_5$
$+2a_1a_2a_3$	$+a_1a_2a_4$	$+a_1a_3a_4$	$+2a_2a_3a_4$
$-a_2^3$	$+a_1a_3^2$	$+a_2^2a_4$	$-a_3^3$
	$-a_2^2a_3$	$-a_2a_3^2$	

Nr. 5.

$\varphi_{5,3} = \frac{1}{5}(f, i)$.

x^5	x^4y	x^3y^2	x^2y^3	xy^4	y^5
$+a_0^2a_5$	$+5a_0a_1a_5$	$+2a_0a_2a_5$	$-2a_0a_3a_5$	$-5a_0a_4a_5$	$-a_0a_5^2$
$-5a_0a_1a_4$	$-16a_0a_2a_4$	$-12a_0a_3a_4$	$-8a_0a_4^2$	$+16a_1a_3a_5$	$+5a_1a_4a_5$
$+2a_0a_2a_3$	$+6a_0a_3^2$	$+8a_1^2a_5$	$+12a_1a_2a_5$	$+9a_1a_4^2$	$-2a_2a_3a_5$
$+8a_1^2a_3$	$-9a_1^2a_4$	$-38a_1a_2a_4$	$+38a_1a_3a_4$	$-6a_2^2a_5$	$-8a_2a_4^2$
$-6a_1a_2^2$	$+38a_1a_2a_3$	$+72a_1a_3^2$	$-72a_2^2a_4$	$-38a_2a_3a_4$	$+6a_3^2a_4$
	$-24a_2^3$	$-32a_2^2a_3$	$+32a_2a_3^2$	$+24a_3^3$	

Nr. 6.

$\varphi_{9,3} = T = \frac{1}{15}(f, H)$.

x^9	x^8y	x^7y^2	x^6y^3	x^5y^4	x^4y^5	x^3y^6	x^2y^7	xy^8	y^9
$+a_0^2a_3$	$+2a_0^2a_4$	$+a_0^2a_5$	$+7a_0a_1a_5$	$+5a_0a_2a_5$	$-5a_0a_3a_5$	$-7a_0a_4a_5$	$-a_0a_5^2$	$-2a_1a_5^2$	$-a_2a_5^2$
$-3a_0a_1a_2$	$+a_0a_1a_3$	$+11a_0a_1a_4$	$-8a_0a_2a_4$	$-40a_0a_3a_4$	$-16a_0a_4^2$	$+8a_1a_3a_5$	$-11a_1a_4a_5$	$-a_2a_4a_5$	$+3a_3a_4a_5$
$+2a_1^3$	$-12a_0a_2^2$	$-34a_0a_2a_3$	$-34a_0a_3^2$	$+16a_1^2a_5$	$+40a_1a_2a_5$	$-29a_1a_4^2$	$+34a_2a_3a_5$	$+12a_3^2a_5$	$-2a_4^3$
	$+9a_1^2a_2$	$+16a_1^2a_3$	$+29a_1^2a_4$	$+47a_1a_2a_4$	$-47a_1a_3a_4$	$+34a_2^2a_5$	$-16a_2a_4^2$	$-9a_3a_4^2$	
		$+6a_1a_2^2$	$-2a_1a_2a_3$	$-44a_1a_3^2$	$+44a_2^2a_4$	$+2a_2a_3a_4$	$-6a_3^2a_4$		
			$+8a_2^3$	$+16a_2^2a_3$	$-16a_2a_3^2$	$-8a_3^3$			

Nr. 7.

$\varphi_{0,4} = A = J_4 = -[i, i]$.

Siehe die Tabelle pag. 316.

Nr. 8.

$\varphi_{4,4} = -\frac{1}{15}[i, H] + \frac{2}{5} i^2$. (mit der quadratischen Invariante J_4^2).

x^4	$x^3 y$	$x^2 y^2$	$x y^3$	y^4
$+ a_0^2 a_3 a_5$	$+ 2 a_0^2 a_4 a_5$	$+ a_0^2 a_5^2$	$+ 2 a_0 a_1 a_5^2$	$+ a_0 a_2 a_5^2$
$- 3 a_0 a_1 a_2 a_5$	$- 4 a_0 a_1 a_3 a_5$	$- 4 a_0 a_1 a_4 a_5$	$- 4 a_0 a_2 a_4 a_5$	$- 3 a_0 a_3 a_4 a_5$
$- 5 a_0 a_1 a_3 a_4$	$- 10 a_0 a_1 a_4^2$	$- 2 a_0 a_2 a_3 a_5$	$- 2 a_0 a_3^2 a_5$	$+ 2 a_0 a_4^3$
$+ 10 a_0 a_2^2 a_4$	$- 2 a_0 a_2^2 a_5$	$+ 4 a_0 a_2 a_4^2$	$+ 4 a_0 a_3 a_4^2$	$- 5 a_1 a_2 a_4 a_5$
$- 4 a_0 a_2 a_3^2$	$+ 24 a_0 a_2 a_3 a_4$	$+ 4 a_1^2 a_3 a_5$	$- 10 a_1^2 a_4 a_5$	$+ 10 a_1 a_3^2 a_5$
$+ 2 a_1^3 a_5$	$- 12 a_0 a_3^3$	$- 9 a_1^2 a_4^2$	$+ 24 a_1 a_2 a_3 a_5$	$- 5 a_1 a_3 a_4^2$
$- 5 a_1^2 a_2 a_4$	$+ 4 a_1^2 a_2 a_5$	$+ 50 a_1 a_2 a_3 a_4$	$+ 16 a_1 a_2 a_4^2$	$- 4 a_2^2 a_3 a_5$
$+ 14 a_1^2 a_3^2$	$+ 16 a_1^2 a_3 a_4$	$- 36 a_1 a_3^3$	$- 22 a_1 a_3^2 a_4$	$+ 14 a_2^2 a_4^2$
$- 16 a_1 a_2^2 a_3$	$- 22 a_1 a_2^2 a_4$	$- 36 a_2^3 a_4$	$- 12 a_2^3 a_5$	$- 16 a_2 a_3^2 a_4$
$+ 6 a_2^4$	$- 4 a_1 a_2 a_3^2$	$+ 28 a_2^2 a_3^2$	$- 4 a_2^2 a_3 a_4$	$+ 6 a_3^4$
	$+ 8 a_2^3 a_3$		$+ 8 a_2 a_3^3$	

Nr. 9.

$\varphi_{6,4} = \frac{1}{6}(H, i)$.

x^6	x^5y	x^4y^2	x^3y^3	x^2y^4	xy^5	y^6
$+a_0^2a_2a_5$	$+2a_0^2a_3a_5$	$+2a_0a_1a_3a_5$	$-20a_0a_2a_4^2$	$-2a_0a_2a_4a_5$	$-2a_0a_2a_5^2$	$-a_0a_3a_5^2$
$-a_0^2a_3a_4$	$-2a_0^2a_4^2$	$-2a_0a_1a_4^2$	$+20a_0a_3^2a_4$	$+a_0a_3^2a_5$	$+2a_0a_4^3$	$+a_0a_4^2a_5$
$-a_0a_1^2a_5$	$-10a_0a_1a_2a_5$	$-a_0a_2^2a_5$	$+20a_1^2a_3a_5$	$+a_0a_3a_4^2$	$+2a_1^2a_5^2$	$+a_1a_2a_5^2$
$-2a_0a_1a_2a_4$	$+10a_0a_1a_3a_4$	$-2a_0a_2a_3a_4$	$-20a_1a_2^2a_5$	$+2a_1^2a_4a_5$	$+10a_1a_3^2a_5$	$+2a_1a_3a_4a_5$
$+4a_0a_1a_3^2$	$-2a_1^3a_5$	$+3a_0a_3^3$	$-20a_1a_3^3$	$+2a_1a_2a_3a_5$	$-14a_1a_3a_4^2$	$-3a_1a_4^3$
$-a_0a_2^2a_3$	$+14a_1^2a_2a_4$	$-a_1^2a_2a_5$	$+20a_2^3a_4$	$-5a_1a_2a_4^2$	$-10a_2^2a_3a_5$	$-4a_2^2a_4a_5$
$+3a_1^3a_4$	$+2a_1^2a_3^2$	$+5a_1^2a_3a_4$		$-a_1a_3^2a_4$	$-2a_2^2a_4^2$	$+a_2a_3^2a_5$
$-6a_1^2a_2a_3$	$-26a_1a_2^2a_3$	$+a_1a_2^2a_4$		$-3a_2^3a_5$	$+26a_2a_3^2a_4$	$+6a_2a_3a_4^2$
$+3a_1a_2^3$	$+12a_2^4$	$-9a_1a_2a_3^2$		$+9a_2^2a_3a_4$	$-12a_3^4$	$-3a_3^3a_4$
		$+4a_2^3a_3$		$-4a_2a_3^3$		

Nr. 10.

$\varphi_{1,5} = -\frac{1}{2}[i,j] = Px + Qy$ (§ 22, 5).

x	x	y	y
$+a_0^2a_2a_5^2$	$+9a_0a_3^4$	$+a_0^2a_3a_5^2$	$-2a_1^2a_2a_4a_5$
$-2a_0^2a_3a_4a_5$	$+6a_1^3a_4a_5$	$-a_0^2a_4^2a_5$	$+14a_1^2a_3^2a_5$
$+a_0^2a_4^3$	$-12a_1^2a_2a_3a_5$	$-2a_0a_1a_2a_5^2$	$-15a_1^2a_3a_4^2$
$-a_0a_1^2a_5^2$	$-15a_1^2a_2a_4^2$	$-4a_0a_1a_3a_4a_5$	$-22a_1a_2^2a_3a_5$
$-4a_0a_1a_2a_4a_5$	$+10a_1^2a_3^2a_4$	$+6a_0a_1a_4^3$	$+10a_1a_2^2a_4^2$
$+8a_0a_1a_3^2a_5$	$+6a_1a_2^3a_5$	$+8a_0a_2^2a_4a_5$	$+30a_1a_2a_3^2a_4$
$-2a_0a_1a_3a_4^2$	$+30a_1a_2^2a_3a_4$	$-2a_0a_2a_3^2a_5$	$-15a_1a_3^4$
$-2a_0a_2^2a_3a_5$	$-20a_1a_2a_3^3$	$-12a_0a_2a_3a_4^2$	$+9a_2^4a_5$
$+14a_0a_2^2a_4^2$	$-15a_2^4a_4$	$+6a_0a_3^3a_4$	$-20a_2^3a_3a_4$
$-22a_0a_2a_3^2a_4$	$+10a_2^3a_3^2$	$+a_1^3a_5^2$	$+10a_2^2a_3^3$

Nr. 11.

$\varphi_{3,5} = -(i,j)$.

x^3	x^2y	xy^2	y^3
$+a_0^2a_2a_4a_5$	$+a_0^2a_2a_5^2$	$-a_0^2a_3a_5^2$	$-a_0a_1a_3a_5^2$
$-3a_0^2a_3^2a_5$	$-5a_0^2a_3a_4a_5$	$+a_0^2a_4^2a_5$	$+a_0a_1a_4^2a_5$
$+2a_0^2a_3a_4^2$	$+4a_0^2a_4^3$	$+5a_0a_1a_2a_5^2$	$+3a_0a_2^2a_5^2$
$-a_0a_1^2a_4a_5$	$-a_0a_1^2a_5^2$	$-8a_0a_1a_3a_4a_5$	$-14a_0a_2a_3a_4a_5$
$+14a_0a_1a_2a_3a_5$	$+8a_0a_1a_2a_4a_5$	$+3a_0a_1a_4^3$	$+8a_0a_2a_4^3$
$-11a_0a_1a_2a_4^2$	$+11a_0a_1a_3^2a_5$	$-11a_0a_2^2a_4a_5$	$+9a_0a_3^3a_5$
$-a_0a_1a_3^2a_4$	$-17a_0a_1a_3a_4^2$	$+11a_0a_2a_3^2a_5$	$-6a_0a_3^2a_4^2$
$-9a_0a_2^3a_5$	$-11a_0a_2^2a_3a_5$	$+6a_0a_2a_3a_4^2$	$-2a_1^2a_2a_5^2$
$+14a_0a_2^2a_3a_4$	$-16a_0a_2^2a_4^2$	$-6a_0a_3^3a_4$	$+11a_1^2a_3a_4a_5$
$-6a_0a_2a_3^3$	$+44a_0a_2a_3^2a_4$	$-4a_1^3a_5^2$	$-9a_1^2a_4^3$
$-8a_1^3a_3a_5$	$-18a_0a_3^4$	$+17a_1^2a_2a_4a_5$	$+a_1a_2^2a_4a_5$
$+9a_1^3a_4^2$	$-3a_1^3a_4a_5$	$+16a_1^2a_3^2a_5$	$-14a_1a_2a_3^2a_5$
$+6a_1^2a_2^2a_5$	$-6a_1^2a_2a_3a_5$	$-21a_1^2a_3a_4^2$	$+16a_1a_2a_3a_4^2$
$-16a_1^2a_2a_3a_4$	$+21a_1^2a_2a_4^2$	$-44a_1a_2^2a_3a_5$	$-3a_1a_3^3a_4$
$+8a_1^2a_3^3$	$-5a_1^2a_3^2a_4$	$+5a_1a_2^2a_4^2$	$+6a_2^3a_3a_5$
$+3a_1a_2^3a_4$	$+6a_1a_2^3a_5$	$+39a_1a_2a_3^2a_4$	$-8a_2^3a_4^2$
$-2a_1a_2^2a_3^2$	$-39a_1a_2^2a_3a_4$	$-12a_1a_3^4$	$+2a_2^2a_3^2a_4$
	$+22a_1a_2a_3^3$	$+18a_2^4a_5$	
	$+12a_2^4a_4$	$-22a_2^3a_3a_4$	
	$-8a_2^3a_3^2$	$+8a_2^2a_3^3$	

Nr. 12.

$\varphi_{7,5} = -\frac{1}{8}(j, H)$.

x^7	x^6y	x^5y^2	x^4y^3	x^3y^4	x^2y^5	xy^6	y^7
$+2a_0^2a_2^2a_5$	$+7a_0^2a_2a_3a_5$	$-3a_0^2a_2a_4a_5$	$-a_0^2a_2a_5^2$	$+a_0^2a_3a_5^2$	$+3a_0a_1a_3a_5^2$	$-7a_0a_2a_3a_5^2$	$-2a_0a_3^2a_5^2$
$-5a_0^2a_2a_3a_4$	$-10a_0^2a_2a_4^2$	$+12a_0^2a_3^2a_5$	$+7a_0^2a_3a_4a_5$	$-a_0^2a_4^2a_5$	$-3a_0a_1a_4^2a_5$	$+7a_0a_2a_4^2a_5$	$+4a_0a_3a_4^2a_5$
$+3a_0^2a_3^3$	$+3a_0^2a_3^2a_4$	$-9a_0^2a_3a_4^2$	$-6a_0^2a_4^3$	$-7a_0a_1a_2a_5^2$	$-12a_0a_2^2a_5^2$	$+7a_0a_2^2a_4a_5$	$-2a_0a_4^4$
$-4a_0a_1^2a_2a_5$	$-7a_0a_1^2a_3a_5$	$+3a_0a_1^2a_4a_5$	$+a_0a_1^2a_5^2$	$+26a_0a_1a_3a_4a_5$	$+18a_0a_2a_3a_4a_5$	$-7a_0a_3a_4^3$	$+5a_1a_2a_3a_5^2$
$+5a_0a_1^2a_3a_4$	$+10a_0a_1^2a_4^2$	$-18a_0a_1a_2a_3a_5$	$-26a_0a_1a_2a_4a_5$	$-19a_0a_1a_4^3$	$+6a_0a_2a_4^3$	$+10a_1^2a_3a_5^2$	$-5a_1a_2a_4^2a_5$
$+5a_0a_1a_2^2a_4$	$-7a_0a_1a_2^2a_5$	$-18a_0a_1a_2a_4^2$	$+32a_0a_1a_3^2a_5$	$-32a_0a_2^2a_4a_5$	$+3a_0a_3^3a_5$	$-10a_1^2a_4^2a_5$	$-5a_1a_3^2a_4a_5$
$-7a_0a_1a_2a_3^2$	$-8a_0a_1a_2a_3a_4$	$+30a_0a_1a_3^2a_4$	$-8a_0a_1a_3a_4^2$	$+18a_0a_2a_3^2a_5$	$-15a_0a_3^2a_4^2$	$-3a_1a_2^2a_5^2$	$+5a_1a_3a_4^3$
$+a_0a_2^3a_3$	$+9a_0a_1a_3^3$	$-3a_0a_2^3a_5$	$-18a_0a_2^2a_3a_5$	$+53a_0a_2a_3a_4^2$	$+9a_1^2a_2a_5^2$	$+8a_1a_2a_3a_4a_5$	$-3a_2^3a_5^2$
$+2a_1^4a_5$	$+22a_0a_2^3a_4$	$+45a_0a_2^2a_3a_4$	$+6a_0a_2^2a_4^2$	$-39a_0a_3^3a_4$	$+18a_1^2a_3a_4a_5$	$-2a_1a_2a_4^3$	$+7a_2^2a_3a_4a_5$
$-5a_1^3a_2a_4$	$-19a_0a_2^2a_3^2$	$-39a_0a_2a_3^3$	$+52a_0a_2a_3^2a_4$	$+6a_1^3a_5^2$	$-27a_1^2a_4^3$	$-22a_1a_3^3a_5$	$+2a_2^2a_4^3$
$-2a_1^3a_3^2$	$+7a_1^3a_2a_5$	$-6a_1^3a_3a_5$	$-39a_0a_3^4$	$+8a_1^2a_2a_4a_5$	$-30a_1a_2^2a_4a_5$	$+19a_1a_3^2a_4^2$	$-a_2a_3^3a_5$
$+8a_1^2a_2^2a_3$	$+2a_1^3a_3a_4$	$+27a_1^3a_4^2$	$+19a_1^3a_4a_5$	$-6a_1^2a_3^2a_5$	$-45a_1a_2a_3^2a_5$	$-9a_2^3a_4a_5$	$-8a_2a_3^2a_4^2$
$-3a_1a_2^4$	$-19a_1^2a_2^2a_4$	$+15a_1^2a_2^2a_5$	$-53a_1^2a_2a_3a_5$	$-20a_1^2a_3a_4^2$	$+87a_1a_2a_3a_4^2$	$+19a_2^2a_3^2a_5$	$+3a_3^4a_4$
	$-11a_1^2a_2a_3^2$	$-87a_1^2a_2a_3a_4$	$+20a_1^2a_2a_4^2$	$+45a_1a_2^2a_3a_5$	$-12a_1a_3^3a_4$	$+11a_2^2a_3a_4^2$	
	$+33a_1a_2^3a_3$	$+6a_1^2a_3^3$	$-25a_1^2a_3^2a_4$	$+25a_1a_2^2a_4^2$	$+39a_2^3a_3a_5$	$-33a_2a_3^3a_4$	
	$-12a_2^5$	$+12a_1a_2^3a_4$	$+39a_1a_2^3a_5$	$-52a_1a_2a_3^2a_4$	$-6a_2^3a_4^2$	$+12a_3^5$	
		$+57a_1a_2^2a_3^2$	$-45a_1a_2^2a_3a_4$	$+39a_2^4a_5$	$-57a_2^2a_3^2a_4$		
		$-24a_2^4a_3$	$+65a_1a_2a_3^3$	$-65a_2^3a_3a_4$	$+24a_2a_3^4$		
			$-20a_2^3a_3^2$	$+20a_2^2a_3^3$			

Nr. 13.

$\varphi_{2,6}$ = Hessesche Form von j.

x^2	xy	y^2
$-a_0^2a_2^2a_5^2$	$-a_0^2a_2a_3a_5^2$	$-a_0^2a_3^2a_5^2$
$+5a_0^2a_2a_3a_4a_5$	$+a_0^2a_2a_4^2a_5$	$+2a_0^2a_3a_4^2a_5$
$-3a_0^2a_2a_4^3$	$+a_0^2a_3^2a_4a_5$	$-a_0^2a_4^4$
$-3a_0^2a_3^3a_5$	$-a_0^2a_3a_4^3$	$+5a_0a_1a_2a_3a_5^2$
$+2a_0^2a_3^2a_4^2$	$+a_0a_1^2a_3a_5^2$	$-5a_0a_1a_2a_4^2a_5$
$+2a_0a_1^2a_2a_5^2$	$-a_0a_1^2a_4^2a_5$	$-5a_0a_1a_3^2a_4a_5$
$-5a_0a_1^2a_3a_4a_5$	$+a_0a_1a_2^2a_5^2$	$+5a_0a_1a_3a_4^3$
$+3a_0a_1^2a_4^3$	$+6a_0a_1a_2a_3a_4a_5$	$-3a_0a_2^3a_5^2$
$-5a_0a_1a_2^2a_4a_5$	$-8a_0a_1a_2a_4^3$	$+7a_0a_2^2a_3a_4a_5$
$+7a_0a_1a_2a_3^2a_5$	$-10a_0a_1a_3^3a_5$	$+2a_0a_2^2a_4^3$
$-a_0a_1a_2a_3a_4^2$	$+11a_0a_1a_3^2a_4^2$	$-a_0a_2a_3^3a_5$
$-a_0a_1a_3^3a_4$	$-10a_0a_2^3a_4a_5$	$-8a_0a_2a_3^2a_4^2$
$-a_0a_2^3a_3a_5$	$+11a_0a_2^2a_3^2a_5$	$+3a_0a_3^4a_4$
$+6a_0a_2^3a_4^2$	$+18a_0a_2^2a_3a_4^2$	$-3a_1^3a_3a_5^2$
$-8a_0a_2^2a_3^2a_4$	$-28a_0a_2a_3^3a_4$	$+3a_1^3a_4^2a_5$
$+3a_0a_2a_3^4$	$+9a_0a_3^5$	$+2a_1^2a_2^2a_5^2$
$-a_1^4a_5^2$	$-a_1^3a_2a_5^2$	$-a_1^2a_2a_3a_4a_5$
$+5a_1^3a_2a_4a_5$	$-8a_1^3a_3a_4a_5$	$-3a_1^2a_2a_4^3$
$+2a_1^3a_3^2a_5$	$+9a_1^3a_4^3$	$+6a_1^2a_3^3a_5$
$-3a_1^3a_3a_4^2$	$+11a_1^2a_2^2a_4a_5$	$-4a_1^2a_3^2a_4^2$
$-8a_1^2a_2^2a_3a_5$	$+18a_1^2a_2a_3^2a_5$	$-a_1a_2^3a_4a_5$
$-4a_1^2a_2^2a_4^2$	$-37a_1^2a_2a_3a_4^2$	$-8a_1a_2^2a_3^2a_5$
$+7a_1^2a_2a_3^2a_4$	$+8a_1^2a_3^3a_4$	$+7a_1a_2^2a_3a_4^2$
$-a_1^2a_3^4$	$-28a_1a_2^3a_3a_5$	$+5a_1a_2a_3^3a_4$
$+3a_1a_2^4a_5$	$+8a_1a_2^3a_4^2$	$-3a_1a_3^5$
$+5a_1a_2^3a_3a_4$	$+37a_1a_2^2a_3^2a_4$	$+3a_2^4a_3a_5$
$-4a_1a_2^2a_3^3$	$-17a_1a_2a_3^4$	$-a_2^4a_4^2$
$-3a_2^5a_4$	$+9a_2^5a_5$	$-4a_2^3a_3^2a_4$
$+2a_2^4a_3^2$	$-17a_2^4a_3a_4$	$+2a_2^2a_3^4$
	$+8a_2^3a_3^3$	

Nr. 14.

$\varphi_{4,6} = \frac{1}{4}(i, \varphi_{4,4})$.

x^4	x^3y	x^2y^2	xy^3	y^4
$-a_0^3a_3a_5^2$	$-4a_0^2a_1a_3a_5^2$	$+6a_0^2a_2a_4^2a_5$	$+4a_0^2a_2a_4a_5^2$	$+a_0^2a_2a_5^3$
$+a_0^3a_4^2a_5$	$+4a_0^2a_1a_4^2a_5$	$-12a_0^2a_3^2a_4a_5$	$-4a_0^2a_3^2a_5^2$	$-3a_0^2a_3a_4a_5^2$
$+3a_0^2a_1a_2a_5^2$	$+4a_0^2a_2^2a_5^2$	$+6a_0^2a_3a_4^3$	$-4a_0^2a_3a_4^2a_5$	$+2a_0^2a_4^3a_5$
$+2a_0^2a_1a_3a_4a_5$	$-8a_0^2a_2a_3a_4a_5$	$-6a_0a_1^2a_3a_5^2$	$+4a_0^2a_4^4$	$-a_0a_1^2a_5^3$
$-5a_0^2a_1a_4^3$	$+4a_0^2a_3a_4^3$	$+12a_0a_1a_2^2a_5^2$	$-4a_0a_1^2a_4a_5^2$	$-2a_0a_1a_2a_4a_5^2$
$-8a_0^2a_2^2a_4a_5$	$+4a_0a_1^2a_2a_5^2$	$-36a_0a_1a_2a_4^3$	$+8a_0a_1a_2a_3a_5^2$	$+8a_0a_1a_3^2a_5^2$
$+2a_0^2a_2a_3^2a_5$	$+16a_0a_1^2a_3a_4a_5$	$+48a_0a_1a_3^3a_5$	$-16a_0a_1a_2a_4^2a_5$	$+2a_0a_1a_3a_4^2a_5$
$+12a_0^2a_2a_3a_4^2$	$-24a_0a_1^2a_4^3$	$-12a_0a_1a_3^2a_4^2$	$+48a_0a_1a_3^2a_4a_5$	$-6a_0a_1a_4^4$
$-6a_0^2a_3^3a_4$	$-48a_0a_1a_2^2a_4a_5$	$-48a_0a_2^3a_4a_5$	$-32a_0a_1a_3a_4^3$	$-2a_0a_2^2a_3a_5^2$
$-2a_0a_1^3a_5^2$	$+40a_0a_1a_2a_3^2a_5$	$+156a_0a_2^2a_3a_4^2$	$-40a_0a_2^2a_3a_4a_5$	$+6a_0a_2^2a_4^2a_5$
$-2a_0a_1^2a_2a_4a_5$	$+40a_0a_1a_2a_3a_4^2$	$-168a_0a_2a_3^3a_4$	$+56a_0a_2^2a_4^3$	$-20a_0a_2a_3^2a_4a_5$
$-6a_0a_1^2a_3^2a_5$	$-24a_0a_1a_3^3a_4$	$+54a_0a_3^5$	$+8a_0a_2a_3^3a_5$	$+12a_0a_2a_3a_4^3$
$+13a_0a_1^2a_3a_4^2$	$-8a_0a_2^3a_3a_5$	$-6a_1^3a_2a_5^2$	$-40a_0a_2a_3^2a_4^2$	$+9a_0a_3^4a_5$
$+20a_0a_1a_2^2a_3a_5$	$+56a_0a_2^3a_4^2$	$+36a_1^3a_3a_4a_5$	$+12a_0a_3^4a_4$	$-6a_0a_3^3a_4^2$
$+4a_0a_1a_2^2a_4^2$	$-88a_0a_2^2a_3^2a_4$	$+12a_1^2a_2^2a_4a_5$	$-4a_1^3a_3a_5^2$	$+5a_1^3a_4a_5^2$
$-52a_0a_1a_2a_3^2a_4$	$+36a_0a_2a_3^4$	$-156a_1^2a_2a_3^2a_5$	$+24a_1^3a_4^2a_5$	$-12a_1^2a_2a_3a_5^2$
$+24a_0a_1a_3^4$	$-4a_1^4a_5^2$	$+60a_1^2a_3^3a_4$	$-40a_1^2a_2a_3a_4a_5$	$-13a_1^2a_2a_4^2a_5$
$-9a_0a_2^4a_5$	$+32a_1^3a_2a_4a_5$	$+168a_1a_2^3a_3a_5$	$-60a_1^2a_2a_4^3$	$-4a_1^2a_3^2a_4a_5$
$+20a_0a_2^3a_3a_4$	$-56a_1^3a_3^2a_5$	$-60a_1a_2^3a_4^2$	$-56a_1^2a_3^3a_5$	$+15a_1^2a_3a_4^3$
$-10a_0a_2^2a_3^3$	$+60a_1^3a_3a_4^2$	$-30a_1a_2a_3^4$	$+100a_1^2a_3^2a_4^2$	$+6a_1a_2^3a_5^2$
$+6a_1^4a_4a_5$	$+40a_1^2a_2^2a_3a_5$	$-54a_2^5a_5$	$+24a_1a_2^3a_4a_5$	$+52a_1a_2^2a_3a_4a_5$
$-12a_1^3a_2a_3a_5$	$-100a_1^2a_2^2a_4^2$	$+30a_2^4a_3a_4$	$+88a_1a_2^2a_3^2a_5$	$-10a_1a_2^2a_4^3$
$-15a_1^3a_2a_4^2$	$-80a_1^2a_2a_3^2a_4$		$+80a_1a_2^2a_3a_4^2$	$-20a_1a_2a_3^3a_5$
$+10a_1^3a_3^2a_4$	$+60a_1^2a_3^4$		$-200a_1a_2a_3^3a_4$	$-30a_1a_2a_3^2a_4^2$
$+6a_1^2a_2^3a_5$	$-12a_1a_2^4a_5$		$+60a_1a_3^5$	$+15a_1a_3^4a_4$
$+30a_1^2a_2^2a_3a_4$	$+200a_1a_2^3a_3a_4$		$-36a_2^4a_3a_5$	$-24a_2^4a_4a_5$
$-20a_1^2a_2a_3^3$	$-120a_1a_2^2a_3^3$		$-60a_2^4a_4^2$	$+10a_2^3a_3^2a_5$
$-15a_1a_2^4a_4$	$-60a_2^5a_4$		$+120a_2^3a_3^2a_4$	$+20a_2^3a_3a_4^2$
$+10a_1a_2^3a_3^2$	$+40a_2^4a_3^2$		$-40a_2^2a_3^4$	$-10a_2^2a_3^3a_4$

Nr. 15.

$$\varphi_{1,7} = -(i, \varphi_{1,5}) = -(P'x + Q'y). \quad [\S\ 22, 5].$$

x	x	y	y
$+a_0^3 a_2 a_5^3$	$-81 a_0 a_2^4 a_4 a_5$	$-a_0^3 a_3 a_5^3$	$-18 a_0 a_2^2 a_3^3 a_5$
$-4 a_0^3 a_3 a_4 a_5^2$	$+18 a_0 a_2^3 a_3^2 a_5$	$+a_0^3 a_4^2 a_5^2$	$+284 a_0 a_2^2 a_3^2 a_4^2$
$+3 a_0^3 a_4^3 a_5$	$+140 a_0 a_2^3 a_3 a_4^2$	$+4 a_0^2 a_1 a_2 a_5^3$	$-216 a_0 a_2 a_3^4 a_4$
$-a_0^2 a_1^2 a_5^3$	$-100 a_0 a_2^2 a_3^3 a_4$	$+3 a_0^2 a_1 a_3 a_4 a_5^2$	$+54 a_0 a_3^6$
$-3 a_0^2 a_1 a_2 a_4 a_5^2$	$+18 a_0 a_2 a_3^5$	$-7 a_0^2 a_1 a_4^3 a_5$	$+15 a_1^4 a_4 a_5^2$
$+16 a_0^2 a_1 a_3^2 a_5^2$	$+8 a_1^4 a_3 a_5^2$	$-16 a_0^2 a_2^2 a_4 a_5^2$	$-26 a_1^3 a_2 a_3 a_5^2$
$+4 a_0^2 a_1 a_3 a_4^2 a_5$	$-18 a_1^4 a_4^2 a_5$	$+6 a_0^2 a_2 a_3^2 a_5^2$	$-84 a_1^3 a_2 a_4^2 a_5$
$-15 a_0^2 a_1 a_4^4$	$-6 a_1^3 a_2^2 a_5^2$	$+30 a_0^2 a_2 a_3 a_4^2 a_5$	$+98 a_1^3 a_3^2 a_4 a_5$
$-6 a_0^2 a_2^2 a_3 a_5^2$	$+32 a_1^3 a_2 a_3 a_4 a_5$	$-8 a_0^2 a_2 a_4^4$	$-45 a_1^3 a_3 a_4^3$
$+4 a_0^2 a_2^2 a_4^2 a_5$	$+45 a_1^3 a_2 a_4^3$	$-18 a_0^2 a_3^3 a_4 a_5$	$+12 a_1^2 a_2^3 a_5^2$
$-22 a_0^2 a_2 a_3^2 a_4 a_5$	$+112 a_1^3 a_3^3 a_5$	$+6 a_0^2 a_3^2 a_4^3$	$+94 a_1^2 a_2^2 a_3 a_4 a_5$
$+26 a_0^2 a_2 a_3 a_4^3$	$-150 a_1^3 a_3^2 a_4^2$	$-3 a_0 a_1^3 a_5^3$	$+150 a_1^2 a_2^2 a_4^3$
$+9 a_0^2 a_3^4 a_5$	$-6 a_1^2 a_2^3 a_4 a_5$	$-4 a_0 a_1^2 a_2 a_4 a_5^2$	$-140 a_1^2 a_2 a_3^3 a_5$
$-12 a_0^2 a_3^3 a_4^2$	$-284 a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_5$	$-4 a_0 a_1^2 a_3^2 a_5^2$	$-50 a_1^2 a_2 a_3^2 a_4^2$
$+7 a_0 a_1^3 a_4 a_5^2$	$+50 a_1^2 a_2^2 a_3 a_4^2$	$-a_0 a_1^2 a_3 a_4^2 a_5$	$+15 a_1^2 a_3^4 a_4$
$-30 a_0 a_1^2 a_2 a_3 a_5^2$	$+320 a_1^2 a_2 a_3^3 a_4$	$+18 a_0 a_1^2 a_4^4$	$-51 a_1 a_2^4 a_4 a_5$
$+a_0 a_1^2 a_2 a_4^2 a_5$	$-120 a_1^2 a_3^5$	$+22 a_0 a_1 a_2^2 a_3 a_5^2$	$+100 a_1 a_2^3 a_3^2 a_5$
$-74 a_0 a_1^2 a_3^2 a_4 a_5$	$+216 a_1 a_2^4 a_3 a_5$	$+74 a_0 a_1 a_2^2 a_4^2 a_5$	$-320 a_1 a_2^3 a_3 a_4^2$
$+84 a_0 a_1^2 a_3 a_4^3$	$-15 a_1 a_2^4 a_4^2$	$-160 a_0 a_1 a_2 a_3^2 a_4 a_5$	$+310 a_1 a_2^2 a_3^3 a_4$
$+18 a_0 a_1 a_2^3 a_5^2$	$-310 a_1 a_2^3 a_3^2 a_4$	$-32 a_0 a_1 a_2 a_3 a_4^3$	$-90 a_1 a_2 a_3^5$
$+160 a_0 a_1 a_2^2 a_3 a_4 a_5$	$+130 a_1 a_2^2 a_3^4$	$+81 a_0 a_1 a_3^4 a_5$	$-18 a_2^5 a_3 a_5$
$-98 a_0 a_1 a_2^2 a_4^3$	$-54 a_2^6 a_5$	$+6 a_0 a_1 a_3^3 a_4^2$	$+120 a_2^5 a_4^2$
$-20 a_0 a_1 a_2 a_3^3 a_5$	$+90 a_2^5 a_3 a_4$	$-9 a_0 a_2^4 a_5^2$	$-130 a_2^4 a_3^2 a_4$
$-94 a_0 a_1 a_2 a_3^2 a_4^2$	$-40 a_2^4 a_3^3$	$+20 a_0 a_2^3 a_3 a_4 a_5$	$+40 a_2^3 a_3^4$
$+51 a_0 a_1 a_3^4 a_4$		$-112 a_0 a_2^3 a_4^3$	

Nr. 16.

$\varphi_{5,7} = \frac{1}{5}(f, \varphi_{2,6})$.

x^5	x^4y	x^3y^2	x^2y^3	xy^4	y^5
$-a_0^3a_2a_3a_5^2$	$-2a_0^3a_3^2a_5^2$	$-8a_0^2a_1a_3^2a_5^2$	$+8a_0^2a_2^2a_4a_5^2$	$+2a_0^2a_2^2a_5^3$	$+a_0^2a_2a_3a_5^3$
$+a_0^3a_2a_4^2a_5$	$+4a_0^3a_3a_4^2a_5$	$+16a_0^2a_1a_3a_4^2a_5$	$-10a_0^2a_2a_3^2a_5^2$	$-7a_0^2a_2a_3a_4a_5^2$	$-a_0^2a_2a_4^2a_5^2$
$+a_0^3a_3^2a_4a_5$	$-2a_0^3a_4^4$	$-8a_0^2a_1a_4^4$	$-18a_0^2a_2a_3a_4^2a_5$	$+3a_0^2a_2a_4^3a_5$	$-3a_0^2a_3^2a_4a_5^2$
$-a_0^3a_3a_4^3$	$+7a_0^2a_1a_2a_3a_5^2$	$+10a_0^2a_2^2a_3a_5^2$	$+12a_0^2a_2a_4^4$	$-2a_0^2a_3^3a_5^2$	$+5a_0^2a_3a_4^3a_5$
$+a_0^2a_1^2a_3a_5^2$	$-7a_0^2a_1a_2a_4^2a_5$	$+2a_0^2a_2^2a_4^2a_5$	$+22a_0^2a_3^3a_4a_5$	$+9a_0^2a_3^2a_4^2a_5$	$-2a_0^2a_4^5$
$-a_0^2a_1^2a_4^2a_5$	$-7a_0^2a_1a_3^2a_4a_5$	$-58a_0^2a_2a_3^2a_4a_5$	$-14a_0^2a_3^2a_4^3$	$-5a_0^2a_3a_4^4$	$-a_0a_1^2a_3a_5^3$
$+3a_0^2a_1a_2^2a_5^2$	$+7a_0^2a_1a_3a_4^3$	$+34a_0^2a_2a_3a_4^3$	$-16a_0a_1^2a_2a_4a_5^2$	$-4a_0a_1^2a_2a_5^3$	$+a_0a_1^2a_4^2a_5^2$
$-4a_0^2a_1a_2a_3a_4a_5$	$+2a_0^2a_2^3a_5^2$	$+36a_0^2a_3^4a_5$	$-2a_0a_1^2a_3^2a_5^2$	$+7a_0a_1^2a_3a_4a_5^2$	$-a_0a_1a_2^2a_5^3$
$-2a_0^2a_1a_2a_4^3$	$-26a_0^2a_2^2a_3a_4a_5$	$-24a_0^2a_3^3a_4^2$	$+42a_0a_1^2a_3a_4^2a_5$	$-3a_0a_1^2a_4^3a_5$	$+4a_0a_1a_2a_3a_4a_5^2$
$-4a_0^2a_1a_3^3a_5$	$+28a_0^2a_2^2a_4^3$	$+18a_0a_1^2a_2a_3a_5^2$	$-24a_0a_1^2a_4^4$	$+7a_0a_1a_2^2a_4a_5^2$	$-2a_0a_1a_2a_4^3a_5$
$+7a_0^2a_1a_3^2a_4^2$	$+22a_0^2a_2a_3^3a_5$	$-42a_0a_1^2a_2a_4^2a_5$	$+58a_0a_1a_2^2a_3a_5^2$	$+26a_0a_1a_2a_3^2a_5^2$	$+10a_0a_1a_3^3a_5^2$
$-10a_0^2a_2^3a_4a_5$	$-32a_0^2a_2a_3^2a_4^2$	$+20a_0a_1^2a_3^2a_4a_5$	$-20a_0a_1a_2^2a_4^2a_5$	$-56a_0a_1a_2a_3a_4^2a_5$	$-21a_0a_1a_3^2a_4^2a_5$
$+11a_0^2a_2^2a_3^2a_5$	$+6a_0^2a_3^4a_4$	$+4a_0a_1^2a_3a_4^3$	$-128a_0a_1a_2a_3^2a_4a_5$	$+24a_0a_1a_2a_4^4$	$+10a_0a_1a_3a_4^4$.
$+18a_0^2a_2^2a_3a_4^2$	$-3a_0a_1^3a_3a_5^2$	$-22a_0a_1a_2^3a_5^2$	$+84a_0a_1a_2a_3a_4^3$	$-8a_0a_1a_3^3a_4a_5$	$+4a_0a_2^3a_4a_5^2$
$-28a_0^2a_2a_3^3a_4$	$+3a_0a_1^3a_4^2a_5$	$+128a_0a_1a_2^2a_3a_4a_5$	$+20a_0a_1a_3^4a_5$	$+7a_0a_1a_3^2a_4^3$	$-11a_0a_2^2a_3^2a_5^2$
$+9a_0^2a_3^5$	$-9a_0a_1^2a_2^2a_5^2$	$-112a_0a_1a_2a_3^3a_5$	$-14a_0a_1a_3^3a_4^2$	$-22a_0a_2^3a_3a_5^2$	$-4a_0a_2^2a_3a_4^2a_5$
$-5a_0a_1^3a_2a_5^2$	$+56a_0a_1^2a_2a_3a_4a_5$	$-30a_0a_1a_2a_3^2a_4^2$	$-36a_0a_2^4a_5^2$	$+18a_0a_2^3a_4^2a_5$	$+4a_0a_2^2a_4^4$
$+2a_0a_1^3a_3a_4a_5$	$-54a_0a_1^2a_2a_4^3$	$+36a_0a_1a_3^4a_4$	$+112a_0a_2^3a_3a_4a_5$	$+39a_0a_2^2a_3^2a_4a_5$	$+26a_0a_2a_3^3a_4a_5$
$+3a_0a_1^3a_4^3$	$-18a_0a_1^2a_3^3a_5$	$-20a_0a_2^4a_4a_5$	$-24a_0a_2^3a_4^3$	$-38a_0a_2^2a_3a_4^3$	$-16a_0a_2a_3^2a_4^3$
$+21a_0a_1^2a_2^2a_4a_5$	$+25a_0a_1^2a_3^2a_4^2$	$+34a_0a_2^3a_3^2a_5$	$-34a_0a_2^2a_3^3a_5$	$-14a_0a_2a_3^4a_5$	$-9a_0a_3^5a_5$
$+4a_0a_1^2a_2a_3^2a_5$	$+8a_0a_1a_2^3a_4a_5$	$-36a_0a_2^3a_3a_4^2$	$-68a_0a_2^2a_3^2a_4^2$	$+20a_0a_2a_3^3a_4^2$	$+6a_0a_3^4a_4^2$
$-35a_0a_1^2a_2a_3a_4^2$	$-39a_0a_1a_2^2a_3^2a_5$	$+40a_0a_2^2a_3^3a_4$	$+68a_0a_2a_3^4a_4$	$-3a_0a_3^5a_4$	$+a_1^3a_2a_5^3$

x^5	x^4y	x^3y^2	x^2y^3	xy^4	y^5
$+10a_0a_1^2a_3^3a_4$	$+76a_0a_1a_2^2a_3a_4^2$	$-18a_0a_2a_3^5$	$-18a_0a_3^6$	$+2a_1^4a_5^3$	$+2a_1^3a_3a_4a_5^2$
$-26a_0a_1a_2^3a_3a_5$	$-66a_0a_1a_2a_3^3a_4$	$-12a_1^4a_3a_5^2$	$+8a_1^4a_4a_5^2$	$-7a_1^3a_2a_4a_5^2$	$-3a_1^3a_4^3a_5$
$-4a_0a_1a_2^3a_4^2$	$+21a_0a_1a_3^5$	$+24a_1^4a_4^2a_5$	$-34a_1^3a_2a_3a_5^2$	$-28a_1^3a_3^2a_5^2$	$-7a_1^2a_2^2a_4a_5^2$
$+53a_0a_1a_2^2a_3^2a_4$	$+14a_0a_2^4a_3a_5$	$+14a_1^3a_2^2a_5^2$	$-4a_1^3a_2a_4^2a_5$	$+54a_1^3a_3a_4^2a_5$	$-18a_1^2a_2a_3^2a_5^2$
$-23a_0a_1a_2a_3^4$	$-50a_0a_2^4a_4^2$	$-84a_1^3a_2a_3a_4a_5$	$+6a_1^3a_3a_4^3$	$-27a_1^3a_4^4$	$+35a_1^2a_2a_3a_4^2a_5$
$+9a_0a_2^5a_5$	$+56a_0a_2^3a_3^2a_4$	$-6a_1^3a_2a_4^3$	$+24a_1^2a_2^3a_5^2$	$+32a_1^2a_2^2a_3a_5^2$	$-6a_1^2a_2a_4^4$
$-17a_0a_2^4a_3a_4$	$-20a_0a_2^2a_3^4$	$+24a_1^3a_3^3a_5$	$+30a_1^2a_2^2a_3a_4a_5$	$-25a_1^2a_2^2a_4^2a_5$	$+4a_1^2a_3^3a_4a_5$
$+8a_0a_2^3a_3^3$	$+5a_1^4a_2a_5^2$	$+4a_1^3a_3^2a_4^2$	$-4a_1^2a_2^2a_4^3$	$-76a_1^2a_2a_3^2a_4a_5$	$-8a_1^2a_3^2a_4^3$
$+2a_1^5a_5^2$	$-24a_1^4a_3a_4a_5$	$+14a_1^2a_2^3a_4a_5$	$+36a_1^2a_2a_3^3a_5$	$+87a_1^2a_2a_3a_4^3$	$+28a_1a_2^3a_3a_5^2$
$-10a_1^4a_2a_4a_5$	$+27a_1^4a_4^3$	$+68a_1^2a_2^2a_3^2a_5$	$-30a_1^2a_2a_3^2a_4^2$	$+50a_1^2a_3^4a_5$	$-10a_1a_2^3a_4^2a_5$
$-4a_1^4a_3^2a_5$	$-7a_1^3a_2^2a_4a_5$	$+30a_1^2a_2^2a_3a_4^2$	$-8a_1^2a_3^4a_4$	$-56a_1^2a_3^3a_4^2$	$-53a_1a_2^2a_3^2a_4a_5$
$+6a_1^4a_3a_4^2$	$+38a_1^3a_2a_3^2a_5$	$-28a_1^2a_2a_3^3a_4$	$-36a_1a_2^4a_4a_5$	$-6a_1a_2^4a_5^2$	$+14a_1a_2^2a_3a_4^3$
$+16a_1^3a_2^2a_3a_5$	$-87a_1^3a_2a_3a_4^2$	$-12a_1^2a_3^5$	$-40a_1a_2^3a_3^2a_5$	$+66a_1a_2^3a_3a_4a_5$	$+17a_1a_2a_3^4a_5$
$+8a_1^3a_2^2a_4^2$	$+24a_1^3a_3^3a_4$	$-68a_1a_2^4a_3a_5$	$+28a_1a_2^3a_3a_4^2$	$-24a_1a_2^3a_4^3$	$+10a_1a_2a_3^3a_4^2$
$-14a_1^3a_2a_3^2a_4$	$-20a_1^2a_2^3a_3a_5$	$+8a_1a_2^4a_4^2$	$+18a_1a_2^2a_3^3a_4$	$-56a_1a_2^2a_3^3a_5$	$-6a_1a_3^5a_4$
$+2a_1^3a_3^4$	$+56a_1^2a_2^3a_4^2$	$-18a_1a_2^3a_3^2a_4$	$-2a_1a_2a_3^5$	$-55a_1a_2^2a_3^2a_4^2$	$-9a_2^5a_5^2$
$-6a_1^2a_2^4a_5$	$+55a_1^2a_2^2a_3^2a_4$	$+30a_1a_2^2a_3^4$	$+18a_2^5a_3a_5$	$+91a_1a_2a_3^4a_4$	$+23a_2^4a_3a_4a_5$
$-10a_1^2a_2^3a_3a_4$	$-43a_1^2a_2a_3^4$	$+18a_2^6a_5$	$+12a_2^5a_4^2$	$-24a_1a_3^6$	$-2a_2^4a_4^3$
$+8a_1^2a_2^2a_3^3$	$+3a_1a_2^5a_5$	$+2a_2^5a_3a_4$	$-30a_2^4a_3^2a_4$	$-21a_2^5a_4a_5$	$-8a_2^3a_3^3a_5$
$+6a_1a_2^5a_4$	$-91a_1a_2^4a_3a_4$	$-8a_2^4a_3^3$	$+8a_2^3a_3^4$	$+20a_2^4a_3^2a_5$	$-8a_2^3a_3^2a_4^2$
$-4a_1a_2^4a_3^2$	$+56a_1a_2^3a_3^3$			$+43a_2^4a_3a_4^2$	$+4a_2^2a_3^4a_4$
	$+24a_2^6a_4$			$-56a_2^3a_3^3a_4$	
	$-16a_2^5a_3^2$			$+16a_2^2a_3^5$	

Nr. 17.

$\varphi_{0,8} = J_8 = [i, \varphi_{2,6}]$.

Siehe die Tabelle pag. 316.

Nr. 18.

$\varphi_{2,8} = \frac{1}{2}(i, \varphi_{2,6})$.

x^2	xy	y^2
$+a_0^3a_2^2a_5^3$	$-2a_0^3a_3^2a_4a_5^2$	$-a_0^3a_3^2a_5^3$
$-6a_0^3a_2a_3a_4a_5^2$	$+4a_0^3a_3a_4^3a_5$	$+2a_0^3a_3a_4^2a_5^2$
$+4a_0^3a_2a_4^3a_5$	$-2a_0^3a_4^5$	$-a_0^3a_4^4a_5$
$+3a_0^3a_3^3a_5^2$	$+20a_0^2a_1a_2^2a_5^3$	$+6a_0^2a_1a_2a_3a_5^3$
$-a_0^3a_3^2a_4^2a_5$	$-4a_0^2a_1a_2a_4^3a_5$	$-6a_0^2a_1a_2a_4^2a_5^2$
$-a_0^3a_3a_4^4$	$+14a_0^2a_1a_3^3a_5^2$	$-3a_0^2a_1a_3^2a_4a_5^2$
$-2a_0^2a_1^2a_2a_5^3$	$-30a_0^2a_1a_3^2a_4^2a_5$	$+3a_0^2a_1a_4^5$
$+6a_0^2a_1^2a_3a_4a_5^2$	$+18a_0^2a_1a_3a_4^4$	$-3a_0^2a_2^3a_5^3$
$-4a_0^2a_1^2a_4^3a_5$	$-14a_0^2a_2^3a_4a_5^2$	$+3a_0^2a_2^2a_3a_4a_5^2$
$+3a_0^2a_1a_2^2a_4a_5^2$	$+66a_0^2a_2^2a_3a_4^2a_5$	$+6a_0^2a_2^2a_4^3a_5$
$-3a_0^2a_1a_2a_3^2a_5^2$	$-26a_0^2a_2^2a_4^4$	$-3a_0^2a_2a_3^2a_4^2a_5$
$+18a_0^2a_1a_2a_3a_4^2a_5$	$-56a_0^2a_2a_3^3a_4a_5$	$-6a_0^2a_2a_3a_4^4$
$-17a_0^2a_1a_2a_4^4$	$+18a_0^2a_2a_3^2a_4^3$	$+3a_0^2a_3^3a_4^3$
$-22a_0^2a_1a_3^3a_4a_5$	$+18a_0^2a_3^5a_5$	$-4a_0a_1^3a_3a_5^3$
$+21a_0^2a_1a_3^2a_4^3$	$-6a_0^2a_3^4a_4^2$	$+4a_0a_1^3a_4^2a_5^2$
$-13a_0^2a_2^3a_4^2a_5$	$-4a_0a_1^3a_2a_5^3$	$+a_0a_1^2a_2^2a_5^3$
$+12a_0^2a_2^2a_3^2a_4a_5$	$+4a_0a_1^3a_3a_4a_5^2$	$-18a_0a_1^2a_2a_3a_4a_5^2$
$+21a_0^2a_2^2a_3a_4^3$	$+30a_0a_1^2a_2^2a_4a_5^2$	$+16a_0a_1^2a_2a_4^3a_5$
$+3a_0^2a_2a_3^4a_5$	$-66a_0a_1^2a_2a_3^2a_5^2$	$+13a_0a_1^2a_3^3a_5^2$
$-32a_0^2a_2a_3^3a_4^2$	$+18a_0a_1^2a_2a_4^4$	$+3a_0a_1^2a_3^2a_4^2a_5$
$+9a_0^2a_3^5a_4$	$+84a_0a_1^2a_3^3a_4a_5$	$-15a_0a_1^2a_3a_4^4$
$+a_0a_1^4a_5^3$	$-66a_0a_1^2a_3^2a_4^3$	$+22a_0a_1a_2^3a_4a_5^2$
$-6a_0a_1^3a_3^2a_5^2$	$+56a_0a_1a_2^3a_3a_5^2$	$-12a_0a_1a_2^2a_3^2a_5^2$
$-16a_0a_1^3a_3a_4^2a_5$	$-84a_0a_1a_2^3a_4^2a_5$	$-18a_0a_1a_2^2a_3a_4^2a_5$
$+18a_0a_1^3a_4^4$	$+20a_0a_1a_2^2a_3a_4^3$	$-38a_0a_1a_2^2a_4^4$
$-3a_0a_1^2a_2^2a_4^2a_5$	$-40a_0a_1a_2a_3^4a_5$	$-32a_0a_1a_2a_3^3a_4a_5$
$+18a_0a_1^2a_2a_3^2a_4a_5$	$+72a_0a_1a_2a_3^3a_4^2$	$+102a_0a_1a_2a_3^2a_4^3$
$-14a_0a_1^2a_2a_3a_4^3$	$-24a_0a_1a_3^5a_4$	$+18a_0a_1a_3^5a_5$
$-39a_0a_1^2a_3^3a_4^2$	$-18a_0a_2^5a_5^2$	$-42a_0a_1a_3^4a_4^2$

x^2	xy	y^2
$+3a_0a_1^2a_2^2a_3a_5^2$	$+40a_0a_2^4a_3a_4a_5$	$-3a_0a_2^4a_3a_5^2$
$+41a_0a_1^2a_3^4a_5$	$+58a_0a_2^4a_4^3$	$-41a_0a_2^4a_4^2a_5$
$+32a_0a_1a_2^3a_3a_4a_5$	$-156a_0a_2^3a_3^2a_4^2$	$+84a_0a_2^3a_3^2a_4a_5$
$+2a_0a_1a_2^3a_4^3$	$+94a_0a_2^2a_3^4a_4$	$+76a_0a_2^3a_3a_4^3$
$-84a_0a_1a_2^2a_3^3a_5$	$-18a_0a_2a_3^6$	$-33a_0a_2^2a_3^4a_5$
$-24a_0a_1a_2^2a_3^2a_4^2$	$+2a_1^5a_5^3$	$-182a_0a_2^2a_3^3a_4^2$
$+106a_0a_1a_2a_3^4a_4$	$-18a_1^4a_2a_4a_5^2$	$+126a_0a_2a_3^5a_4$
$-36a_0a_1a_3^6$	$+26a_1^4a_3^2a_5^2$	$-27a_0a_3^7$
$-18a_0a_2^5a_4a_5$	$-18a_1^4a_3a_4^2a_5$	$+a_1^4a_2a_5^3$
$+33a_0a_2^4a_3^2a_5$	$-18a_1^3a_2^2a_3a_5^2$	$+17a_1^4a_3a_4a_5^2$
$+25a_0a_2^4a_3a_4^2$	$+66a_1^3a_2^2a_4^2a_5$	$-18a_1^4a_4^3a_5$
$-60a_0a_2^3a_3^3a_4$	$-20a_1^3a_2a_3^2a_4a_5$	$-21a_1^3a_2^2a_4a_5^2$
$+21a_0a_2^2a_3^5$	$-58a_1^3a_3^4a_5$	$-21a_1^3a_2a_3^2a_5^2$
$-3a_1^5a_4a_5^2$	$+50a_1^3a_3^3a_4^2$	$+14a_1^3a_2a_3a_4^2a_5$
$+6a_1^4a_2a_3a_5^2$	$+6a_1^2a_2^4a_5^2$	$+45a_1^3a_2a_4^4$
$+15a_1^4a_2a_4^2a_5$	$-72a_1^2a_2^3a_3a_4a_5$	$-2a_1^3a_3^3a_4a_5$
$+38a_1^4a_3^2a_4a_5$	$-50a_1^2a_2^3a_4^3$	$-15a_1^3a_3^2a_4^3$
$-45a_1^4a_3a_4^3$	$+156a_1^2a_2^2a_3^3a_5$	$+32a_1^2a_2^3a_3a_5^2$
$-3a_1^3a_2^3a_5^2$	$-90a_1^2a_2a_3^4a_4$	$+39a_1^2a_2^3a_4^2a_5$
$-102a_1^3a_2^2a_3a_4a_5$	$+30a_1^2a_3^6$	$+24a_1^2a_2^2a_3^2a_4a_5$
$+15a_1^3a_2^2a_4^3$	$+24a_1a_2^5a_4a_5$	$-175a_1^2a_2^2a_3a_4^3$
$-76a_1^3a_2a_3^3a_5$	$-94a_1a_2^4a_3^2a_5$	$-25a_1^2a_2a_3^4a_5$
$+175a_1^3a_2a_3^2a_4^2$	$+90a_1a_2^4a_3a_4^2$	$+120a_1^2a_2a_3^3a_4^2$
$-35a_1^3a_3^4a_4$	$-10a_1a_2^2a_3^5$	$-15a_1^2a_3^5a_4$
$+42a_1^2a_2^4a_4a_5$	$+18a_2^6a_3a_5$	$-9a_1a_2^5a_5^2$
$+182a_1^2a_2^3a_3^2a_5$	$-30a_2^6a_4^2$	$-106a_1a_2^4a_3a_4a_5$
$-120a_1^2a_2^3a_3a_4^2$	$+10a_2^5a_3^2a_4$	$+35a_1a_2^4a_4^3$
$-150a_1^2a_2^2a_3^3a_4$		$+60a_1a_2^3a_3^3a_5$
$+70a_1^2a_2a_3^5$		$+150a_1a_2^3a_3^2a_4^2$
$-126a_1a_2^5a_3a_5$		$-175a_1a_2^2a_3^4a_4$
$+15a_1a_2^5a_4^2$		$+45a_1a_2a_3^6$
$+175a_1a_2^4a_3^2a_4$		$+36a_2^6a_4a_5$
$-75a_1a_2^3a_3^4$		$-21a_2^5a_3^2a_5$
$+27a_2^7a_5$		$-70a_2^5a_3a_4^2$
$-45a_2^6a_3a_4$		$+75a_2^4a_3^3a_4$
$+20a_2^5a_3^3$		$-20a_2^3a_3^5$

Nr. 19.

$\varphi_{3,9} = (j, \varphi_{2,6})$.

x^3	x^2y	xy^2	y^3
$+2a_0^3a_2^3a_5^3$	$+3a_0^3a_2^2a_3a_5^3$	$-3a_0^3a_2a_3^2a_5^3$	$-2a_0^3a_3^3a_5^3$
$-15a_0^3a_2^2a_3a_4a_5^2$	$-3a_0^3a_2^2a_4^2a_5^2$	$+6a_0^3a_2a_3a_4^2a_5^2$	$+6a_0^3a_3^2a_4^2a_5^2$
$+9a_0^3a_2^2a_4^3a_5$	$-24a_0^3a_2a_3^2a_4a_5^2$	$-3a_0^3a_2a_4^4a_5$	$-6a_0^3a_3a_4^4a_5$
$+9a_0^3a_2a_3^3a_5^2$	$+42a_0^3a_2a_3a_4^3a_5$	$+3a_0^3a_3^3a_4a_5^2$	$+2a_0^3a_4^6$
$+6a_0^3a_2a_3^2a_4^2a_5$	$-18a_0^3a_2a_4^5$	$-6a_0^3a_3^2a_4^3a_5$	$+15a_0^2a_1a_2a_3^2a_5^3$
$-9a_0^3a_2a_3a_4^4$	$+18a_0^3a_3^4a_5^2$	$+3a_0^3a_3a_4^5$	$-30a_0^2a_1a_2a_3a_4^2a_5^2$
$-9a_0^3a_3^4a_4a_5$	$-33a_0^3a_3^3a_4^2a_5$	$+3a_0^2a_1^2a_3^2a_5^3$	$+15a_0^2a_1a_2a_4^4a_5$
$+7a_0^3a_3^3a_4^3$	$+15a_0^3a_3^2a_4^4$	$-6a_0^2a_1^2a_3a_4^2a_5^2$	$-15a_0^2a_1a_3^3a_4a_5^2$
$-6a_0^2a_1^2a_2^2a_5^3$	$-6a_0^2a_1^2a_2a_3a_5^3$	$+3a_0^2a_1^2a_4^4a_5$	$+30a_0^2a_1a_3^2a_4^3a_5$
$+30a_0^2a_1^2a_2a_3a_4a_5^2$	$+6a_0^2a_1^2a_2a_4^2a_5^2$	$+24a_0^2a_1a_2^2a_3a_5^3$	$-15a_0^2a_1a_3a_4^5$
$-18a_0^2a_1^2a_2a_4^3a_5$	$+24a_0^2a_1^2a_3^2a_4a_5^2$	$-24a_0^2a_1a_2^2a_4^2a_5^2$	$-9a_0^2a_2^3a_3a_5^3$
$-9a_0^2a_1^2a_3^3a_5^2$	$-42a_0^2a_1^2a_3a_4^3a_5$	$-78a_0^2a_1a_2a_3^2a_4a_5^2$	$+9a_0^2a_2^3a_4^2a_5^2$
$-6a_0^2a_1^2a_3^2a_4^2a_5$	$+18a_0^2a_1^2a_4^5$	$+108a_0^2a_1a_2a_3a_4^3a_5$	$+21a_0^2a_2^2a_3^2a_4a_5^2$
$+9a_0^2a_1^2a_3a_4^4$	$-3a_0^2a_1a_2^3a_5^3$	$-30a_0^2a_1a_2a_4^5$	$-15a_0^2a_2^2a_3a_4^3a_5$
$+15a_0^2a_1a_2^3a_4a_5^2$	$+78a_0^2a_1a_2^2a_3a_4a_5^2$	$+24a_0^2a_1a_3^4a_5^2$	$-6a_0^2a_2^2a_4^5$
$-21a_0^2a_1a_2^2a_3^2a_5^2$	$-69a_0^2a_1a_2^2a_4^3a_5$	$-24a_0^2a_1a_3^3a_4^2a_5$	$-3a_0^2a_2a_3^4a_5^2$
$+6a_0^2a_1a_2^2a_3a_4^2a_5$	$-93a_0^2a_1a_2a_3^3a_5^2$	$-18a_0^2a_2^4a_5^3$	$-21a_0^2a_2a_3^3a_4^2a_5$
$-18a_0^2a_1a_2^2a_4^4$	$+51a_0^2a_1a_2a_3^2a_4^2a_5$	$+93a_0^2a_2^3a_3a_4a_5^2$	$+24a_0^2a_2a_3^2a_4^4$
$-30a_0^2a_1a_2a_3^3a_4a_5$	$+33a_0^2a_1a_2a_3a_4^4$	$-21a_0^2a_2^3a_4^3a_5$	$+9a_0^2a_3^5a_4a_5$
$+51a_0^2a_1a_2a_3^2a_4^3$	$+57a_0^2a_1a_3^4a_4a_5$	$-36a_0^2a_2^2a_3^3a_5^2$	$-9a_0^2a_3^4a_4^3$
$+36a_0^2a_1a_3^5a_5$	$-54a_0^2a_1a_3^3a_4^3$	$-123a_0^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5$	$-9a_0a_1^3a_3^2a_5^3$
$-39a_0^2a_1a_3^4a_4^2$	$-24a_0^2a_2^4a_4a_5^2$	$+51a_0^2a_2^2a_3a_4^4$	$+18a_0a_1^3a_3a_4^2a_5^2$

x^3	x^2y	xy^2	y^3
$+3a_0^2a_2^4a_3a_5^2$	$+36a_0^2a_2^3a_3^2a_5^2$	$+111a_0^2a_2a_3^4a_4a_5$	$-9a_0a_1^3a_4^4a_5$
$-45a_0^2a_2^4a_4^2a_5$	$+9a_0^2a_2^3a_3a_4^2a_5$	$-39a_0^2a_2a_3^3a_4^3$	$-6a_0a_1^2a_2^2a_3a_5^3$
$+84a_0^2a_2^3a_3^2a_4a_5$	$+54a_0^2a_2^3a_4^4$	$-27a_0^2a_3^6a_5$	$+6a_0a_1^2a_2^2a_4^2a_5^2$
$+63a_0^2a_2^3a_3a_4^3$	$-24a_0^2a_2^2a_3^3a_4a_5$	$+9a_0^2a_3^5a_4^2$	$-6a_0a_1^2a_2a_3^2a_4a_5^2$
$-45a_0^2a_2^2a_3^4a_5$	$-129a_0^2a_2^2a_3^2a_4^3$	$-42a_0a_1^3a_2a_3a_5^3$	$+24a_0a_1^2a_2a_3a_4^3a_5$
$-150a_0^2a_2^2a_3^3a_4^2$	$-9a_0^2a_2a_3^5a_5$	$+42a_0a_1^3a_2a_4^2a_5^2$	$-18a_0a_1^2a_2a_4^5$
$+117a_0^2a_2a_3^5a_4$	$+114a_0^2a_2a_3^4a_4^2$	$+69a_0a_1^3a_3^2a_4a_5^2$	$+45a_0a_1^2a_3^4a_5^2$
$-27a_0^2a_3^7$	$-27a_0^2a_3^6a_4$	$-96a_0a_1^3a_3a_4^3a_5$	$-96a_0a_1^2a_3^3a_4^2a_5$
$+6a_0a_1^4a_2a_5^3$	$+3a_0a_1^4a_3a_5^3$	$+27a_0a_1^3a_4^5$	$+51a_0a_1^2a_3^2a_4^4$
$-15a_0a_1^4a_3a_4a_5^2$	$-3a_0a_1^4a_4^2a_5^2$	$+33a_0a_1^2a_2^3a_5^3$	$+9a_0a_1a_2^4a_5^3$
$+9a_0a_1^4a_4^3a_5$	$+6a_0a_1^3a_2^2a_5^3$	$-51a_0a_1^2a_2^2a_3a_4a_5^2$	$+30a_0a_1a_2^3a_3a_4a_5^2$
$-30a_0a_1^3a_2^2a_4a_5^2$	$-108a_0a_1^3a_2a_3a_4a_5^2$	$-48a_0a_1^2a_2^2a_4^3a_5$	$-66a_0a_1a_2^3a_4^3a_5$
$+15a_0a_1^3a_2a_3^2a_5^2$	$+96a_0a_1^3a_2a_4^3a_5$	$-9a_0a_1^2a_2a_3^3a_5^2$	$-84a_0a_1a_2^2a_3^3a_5^2$
$-24a_0a_1^3a_2a_3a_4^2a_5$	$+21a_0a_1^3a_3^3a_5^2$	$+147a_0a_1^2a_2a_3^2a_4^2a_5$	$+36a_0a_1a_2^2a_3^2a_4^2a_5$
$+45a_0a_1^3a_2a_4^4$	$+48a_0a_1^3a_3^2a_4^2a_5$	$-39a_0a_1^2a_2a_3a_4^4$	$+102a_0a_1a_2^2a_3a_4^4$
$+66a_0a_1^3a_3^3a_4a_5$	$-63a_0a_1^3a_3a_4^4$	$-78a_0a_1^2a_3^4a_4a_5$	$+174a_0a_1a_2a_3^4a_4a_5$
$-72a_0a_1^3a_3^2a_4^3$	$+24a_0a_1^2a_2^3a_4a_5^2$	$+45a_0a_1^2a_3^3a_4^3$	$-210a_0a_1a_2a_3^3a_4^3$
$+21a_0a_1^2a_2^3a_3a_5^2$	$+123a_0a_1^2a_2^2a_3^2a_5^2$	$+24a_0a_1a_2^3a_3^2a_5^2$	$-63a_0a_1a_3^6a_5$
$+96a_0a_1^2a_2^3a_4^2a_5$	$-147a_0a_1^2a_2^2a_3a_4^2a_5$	$+78a_0a_1a_2^3a_3a_4^2a_5$	$+72a_0a_1a_3^5a_4^2$
$-36a_0a_1^2a_2^2a_3^2a_4a_5$	$-66a_0a_4^2a_2^2a_4^4$	$-36a_0a_1a_2^2a_3^3a_4a_5$	$-36a_0a_2^5a_4a_5^2$
$-213a_0a_1^2a_2^2a_3a_4^3$	$-78a_0a_1^2a_2a_3^3a_4a_5$	$-108a_0a_1a_2^2a_3^2a_4^3$	$+45a_0a_2^4a_3^2a_5^2$
$-120a_0a_1^2a_2a_3^4a_5$	$+186a_0a_1^2a_2a_3^2a_4^3$	$+24a_0a_1a_2a_3^5a_5$	$+120a_0a_2^4a_3a_4^2a_5$
$+303a_0a_1^2a_2a_3^3a_4^2$	$-51a_0a_1^2a_3^5a_5$	$+6a_0a_1a_2a_3^4a_4^2$	$+6a_0a_2^4a_4^4$
$-51a_0a_1^2a_3^5a_4$	$+9a_0a_1^2a_3^4a_4^2$	$+9a_0a_1a_3^6a_4$	$-204a_0a_2^3a_3^3a_4a_5$

x^3	x^2y	xy^2	y^3
$-9a_0a_1a_2^5a_5^2$	$-111a_0a_1a_2^4a_3a_5^2$	$-57a_0a_1a_2^4a_4a_5^2$	$-120a_0a_2^3a_3^2a_4^3$
$-174a_0a_1a_2^4a_3a_4a_5$	$+78a_0a_1a_2^4a_4^2a_5$	$+60a_0a_1a_2^3a_4^4$	$+66a_0a_2^2a_3^5a_5$
$+36a_0a_1a_2^4a_4^3$	$+36a_0a_1a_2^3a_3^2a_4a_5$	$+9a_0a_2^5a_3a_5^2$	$+240a_0a_2^2a_3^4a_4^2$
$+204a_0a_1a_2^3a_3^3a_5$	$+54a_0a_1a_2^3a_3a_4^3$	$+51a_0a_2^5a_4^2a_5$	$-144a_0a_2a_3^6a_4$
$+174a_0a_1a_2^3a_3^2a_4^2$	$+96a_0a_1a_2^2a_3^4a_5$	$-96a_0a_2^4a_3^2a_4a_5$	$+27a_0a_3^8$
$-330a_0a_1a_2^2a_3^4a_4$	$-150a_0a_1a_2^2a_3^3a_4^2$	$-111a_0a_2^4a_3a_4^3$	$+9a_1^4a_2a_3a_5^3$
$+99a_0a_1a_2a_3^6$	$-30a_0a_1a_2a_3^5a_4$	$+27a_0a_2^3a_3^4a_5$	$-9a_1^4a_2a_4^2a_5^2$
$+63a_0a_2^6a_4a_5$	$+27a_0a_1a_3^7$	$+234a_0a_2^3a_3^3a_4^2$	$+18a_1^4a_3^2a_4a_5^2$
$-66a_0a_2^5a_3^2a_5$	$+27a_0a_2^6a_5^2$	$-141a_0a_2^2a_3^5a_4$	$-45a_1^4a_3a_4^3a_5$
$-99a_0a_2^5a_3a_4^2$	$-24a_0a_2^5a_3a_4a_5$	$+27a_0a_2a_3^7$	$+27a_1^4a_4^5$
$+147a_0a_2^4a_3^3a_4$	$-54a_0a_2^5a_4^3$	$+18a_1^5a_3a_5^3$	$-7a_1^3a_2^3a_5^3$
$-45a_0a_2^3a_3^5$	$-27a_0a_2^4a_3^3a_5$	$-18a_1^5a_4^2a_5^2$	$-51a_1^3a_2^2a_3a_4a_5^2$
$-2a_1^6a_5^3$	$+93a_0a_2^4a_3^2a_4^2$	$-15a_1^4a_2^2a_5^3$	$+72a_1^3a_2^2a_4^3a_5$
$+15a_1^5a_2a_4a_5^2$	$-6a_0a_2^3a_3^4a_4$	$-33a_1^4a_2a_3a_4a_5^2$	$-63a_1^3a_2a_3^3a_5^2$
$+6a_1^5a_3^2a_5^2$	$-9a_0a_2^2a_3^6$	$+63a_1^4a_2a_4^3a_5$	$+213a_1^3a_2a_3^2a_4^2a_5$
$+18a_1^5a_3a_4^2a_5$	$-3a_1^5a_2a_5^3$	$-54a_1^4a_3^3a_5^2$	$-171a_1^3a_2a_3a_4^4$
$-27a_1^5a_4^4$	$+30a_1^5a_3a_4a_5^2$	$+66a_1^4a_3^2a_4^2a_5$	$-36a_1^3a_3^4a_4a_5$
$-24a_1^4a_2^2a_3a_5^2$	$-27a_1^5a_4^3a_5$	$-27a_1^4a_3a_4^4$	$+43a_1^3a_3^3a_4^3$
$-51a_1^4a_2^2a_4^2a_5$	$-51a_1^4a_2a_3^2a_5^2$	$+54a_1^3a_2^3a_4a_5^2$	$+39a_1^2a_2^4a_4a_5^2$
$-102a_1^4a_2a_3^2a_4a_5$	$+39a_1^4a_2a_3a_4^2a_5$	$+129a_1^3a_2^2a_3^2a_5^2$	$+150a_1^2a_2^3a_3^2a_5^2$
$+171a_1^4a_2a_3a_4^3$	$+27a_1^4a_2a_4^4$	$-186a_1^3a_2^2a_3a_4^2a_5$	$-303a_1^2a_2^3a_3a_4^2a_5$
$-6a_1^4a_3^4a_5$	$-60a_1^4a_3^3a_4a_5$	$-45a_1^3a_2^2a_4^4$	$+18a_1^2a_2^3a_4^4$
$-18a_1^4a_3^3a_4^2$	$+45a_1^4a_3^2a_4^3$	$-54a_1^3a_2a_3^3a_4a_5$	$-174a_1^2a_2^2a_3^3a_4a_5$
$+210a_1^3a_2^3a_3a_4a_5$	$+39a_1^3a_2^3a_3a_5^2$	$+96a_1^3a_2a_3^2a_4^3$	$+345a_1^2a_2^2a_3^2a_4^3$

x^3	x^2y	xy^2	y^3
$+9a_1^3a_2^4a_5^2$	$-45a_1^3a_2^3a_4^2a_5$	$+54a_1^3a_3^5a_5$	$+99a_1^2a_2a_3^5a_5$
$-43a_1^3a_2^3a_4^3$	$+108a_1^3a_2^2a_3^2a_4a_5$	$-48a_1^3a_3^4a_4^2$	$-192a_1^2a_2a_3^4a_4^2$
$+120a_1^3a_2^2a_3^3a_5$	$-96a_1^3a_2^2a_3a_4^3$	$-114a_1^2a_2^4a_3a_5^2$	$+18a_1^2a_3^6a_4$
$-345a_1^3a_2^2a_3^2a_4^2$	$+111a_1^3a_2a_3^4a_5$	$-9a_1^2a_2^4a_4^2a_5$	$-117a_1a_2^5a_3a_5^2$
$+87a_1^3a_2a_3^4a_4$	$-147a_1^3a_2a_3^3a_4^2$	$+150a_1^2a_2^3a_3^2a_4a_5$	$+51a_1a_2^5a_4^2a_5$
$+2a_1^3a_3^6$	$+30a_1^3a_3^5a_4$	$+147a_1^2a_2^3a_3a_4^3$	$+330a_1a_2^4a_3^2a_4a_5$
$-72a_1^2a_2^5a_4a_5$	$-9a_1^2a_2^5a_5^2$	$-93a_1^2a_2^2a_3^4a_5$	$-87a_1a_2^4a_3a_4^3$
$+192a_1^2a_2^4a_3a_4^2$	$-6a_1^2a_2^4a_3a_4a_5$	$-150a_1^2a_2^2a_3^3a_4^2$	$-147a_1a_2^3a_3^4a_5$
$-240a_1^2a_2^4a_3^2a_5$	$+48a_1^2a_2^4a_4^3$	$+87a_1^2a_2a_3^5a_4$	$-186a_1a_2^3a_3^3a_4^2$
$+186a_1^2a_2^3a_3^3a_4$	$-234a_1^2a_2^3a_3^3a_5$	$-18a_1^2a_3^7$	$+201a_1a_2^2a_3^5a_4$
$-96a_1^2a_2^2a_3^5$	$+150a_1^2a_2^3a_3^2a_4^2$	$+27a_1a_2^6a_5^2$	$-45a_1a_2a_3^7$
$+144a_1a_2^6a_3a_5$	$+108a_1^2a_2^2a_3^4a_4$	$+30a_1a_2^5a_3a_4a_5$	$+27a_2^7a_5^2$
$-18a_1a_2^6a_4^2$	$-57a_1^2a_2a_3^6$	$-30a_1a_2^5a_4^3$	$-99a_2^6a_3a_4a_5$
$-201a_1a_2^5a_3^2a_4$	$-9a_1a_2^6a_4a_5$	$+6a_1a_2^4a_3^3a_5$	$-2a_2^6a_4^3$
$+87a_1a_2^4a_3^4$	$+141a_1a_2^5a_3^2a_5$	$-108a_1a_2^4a_3^2a_4^2$	$+45a_2^5a_3^3a_5$
$-27a_2^8a_5$	$-87a_1a_2^5a_3a_4^2$	$+96a_1a_2^3a_3^4a_4$	$+96a_2^5a_3^2a_4^2$
$+45a_2^7a_3a_4$	$-96a_1a_2^4a_3^3a_4$	$-21a_1a_2^2a_3^6$	$-87a_2^4a_3^4a_4$
$-20a_2^6a_3^3$	$+51a_1a_2^3a_3^5$	$-27a_2^7a_4a_5$	$+20a_2^3a_3^6$
	$-27a_2^7a_3a_5$	$+9a_2^6a_3^2a_5$	
	$+18a_2^7a_4^2$	$+57a_2^6a_3a_4^2$	
	$+21a_2^6a_3^2a_4$	$-51a_2^5a_3^3a_4$	
	$-12a_2^5a_3^4$	$+12a_2^4a_3^5$	

Nr. 20.

$\varphi_{1,\,11} = (\varphi_{2,\,6},\ \varphi_{1,\,5})$.

x	x	y	y
$-a_0^4 a_2^2 a_3 a_5^4$	$+27 a_0^2 a_1^3 a_4^6$	$+a_0^4 a_2 a_3^2 a_5^4$	$-18 a_0^2 a_1^2 a_2 a_3^2 a_4^2 a_5^2$
$+a_0^4 a_2^2 a_4^2 a_5^3$	$+39 a_0^2 a_1^2 a_2^3 a_4 a_5^3$	$-2 a_0^4 a_2 a_3 a_4^2 a_5^3$	$+198 a_0^2 a_1^2 a_3^4 a_4 a_5^2$
$+7 a_0^4 a_2 a_3^2 a_4 a_5^3$	$-105 a_0^2 a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_5^3$	$+a_0^4 a_2 a_4^4 a_5^2$	$+129 a_0^2 a_1^2 a_3^2 a_4^5$
$-12 a_0^4 a_2 a_3 a_4^3 a_5^2$	$+18 a_0^2 a_1^2 a_2^2 a_3 a_4^2 a_5^2$	$-3 a_0^4 a_3^3 a_4 a_5^3$	$+6 a_0^2 a_1 a_2^4 a_4 a_5^3$
$+5 a_0^4 a_2 a_4^5 a_5$	$-6 a_0^2 a_1^2 a_2^2 a_4^4 a_5$	$+8 a_0^4 a_3^2 a_4^3 a_5^2$	$+66 a_0^2 a_1 a_2^3 a_3^2 a_5^3$
$-6 a_0^4 a_3^4 a_5^3$	$+114 a_0^2 a_1^2 a_2 a_3^3 a_4 a_5^2$	$-7 a_0^4 a_3 a_4^5 a_5$	$-114 a_0^2 a_1 a_2^3 a_3 a_4^2 a_5^2$
$+12 a_0^4 a_3^3 a_4^2 a_5^2$	$-57 a_0^2 a_1^2 a_2 a_3^2 a_4^3 a_5$	$+2 a_0^4 a_4^7$	$+48 a_0^2 a_1 a_2^3 a_4^4 a_5$
$-7 a_0^4 a_3^2 a_4^4 a_5$	$+12 a_0^2 a_1^2 a_2 a_3 a_4^5$	$-a_0^3 a_1^2 a_3^2 a_5^4$	$+9 a_0^2 a_1 a_2^2 a_3^3 a_4 a_5^2$
$+a_0^4 a_3 a_4^6$	$-6 a_0^2 a_1^2 a_3^5 a_5^2$	$+2 a_0^3 a_1^2 a_3 a_4^2 a_5^3$	$-153 a_0^2 a_1 a_2^2 a_3^2 a_4^3 a_5$
$+2 a_0^3 a_1^2 a_2 a_3 a_5^4$	$+3 a_0^2 a_1^2 a_3^4 a_4^2 a_5$	$-a_0^3 a_1^2 a_4^4 a_5^2$	$+108 a_0^2 a_1 a_2^2 a_3 a_4^5$
$-2 a_0^3 a_1^2 a_2 a_4^2 a_5^3$	$-12 a_0^2 a_1^2 a_3^3 a_4^4$	$-7 a_0^3 a_1 a_2^2 a_3 a_5^4$	$-108 a_0^2 a_1 a_2 a_3^5 a_5^2$
$-7 a_0^3 a_1^2 a_3^2 a_4 a_5^3$	$+90 a_0^2 a_1 a_2^4 a_3 a_5^3$	$+7 a_0^3 a_1 a_2^2 a_4^2 a_5^3$	$+396 a_0^2 a_1 a_2 a_3^4 a_4^2 a_5$
$+12 a_0^3 a_1^2 a_3 a_4^3 a_5^2$	$-198 a_0^2 a_1 a_2^4 a_4^2 a_5^2$	$+30 a_0^3 a_1 a_2 a_3^2 a_4 a_5^3$	$-240 a_0^2 a_1 a_2 a_3^3 a_4^4$
$-5 a_0^3 a_1^2 a_4^5 a_5$	$-9 a_0^2 a_1 a_2^3 a_3^2 a_4 a_5^2$	$-46 a_0^3 a_1 a_2 a_3 a_4^3 a_5^2$	$-81 a_0^2 a_1 a_3^6 a_4 a_5$
$+3 a_0^3 a_1 a_2^3 a_5^4$	$+238 a_0^2 a_1 a_2^3 a_3 a_4^3 a_5$	$+16 a_0^3 a_1 a_2 a_4^5 a_5$	$+63 a_0^2 a_1 a_3^5 a_4^3$
$-30 a_0^3 a_1 a_2^2 a_3 a_4 a_5^3$	$+116 a_0^2 a_1 a_2^3 a_4^5$	$+6 a_0^3 a_1 a_3^4 a_5^3$	$-18 a_0^2 a_2^5 a_3 a_5^3$
$+21 a_0^3 a_1 a_2^2 a_4^3 a_5^2$	$-6 a_0^2 a_1 a_2^2 a_3^4 a_5^2$	$-39 a_0^3 a_1 a_3^3 a_4^2 a_5^2$	$+6 a_0^2 a_2^5 a_4^2 a_5^2$
$+44 a_0^3 a_1 a_2 a_3^3 a_5^3$	$+108 a_0^2 a_1 a_2^2 a_3^3 a_4^2 a_5$	$+53 a_0^3 a_1 a_3^2 a_4^4 a_5$	$+6 a_0^2 a_2^4 a_3^2 a_4 a_5^2$
$-69 a_0^3 a_1 a_2 a_3^2 a_4^2 a_5^2$	$-513 a_0^2 a_1 a_2^2 a_3^2 a_4^4$	$-20 a_0^3 a_1 a_3 a_4^6$	$+114 a_0^2 a_2^4 a_3 a_4^3 a_5$
$+62 a_0^3 a_1 a_2 a_3 a_4^4 a_5$	$-294 a_0^2 a_1 a_2 a_3^5 a_4 a_5$	$+6 a_0^3 a_2^4 a_5^4$	$-84 a_0^2 a_2^4 a_4^5$
$-28 a_0^3 a_1 a_2 a_4^6$	$+513 a_0^2 a_1 a_2 a_3^4 a_4^3$	$-44 a_0^3 a_2^3 a_3 a_4 a_5^3$	$+42 a_0^2 a_2^3 a_3^4 a_5^2$

x	x	y	y
$-6a_0^3a_1a_3^4a_4a_5^2$	$+108a_0^2a_1a_3^7a_5$	$+20a_0^3a_2^3a_4^3a_5^2$	$-222a_0^2a_2^3a_3^3a_4^2a_5$
$-8a_0^3a_1a_3^3a_4^3a_5$	$-153a_0^2a_1a_3^6a_4^2$	$+11a_0^3a_2^2a_3^3a_5^3$	$+144a_0^2a_2^3a_3^2a_4^4$
$+11a_0^3a_1a_3^2a_4^5$	$-27a_0^2a_2^6a_5^3$	$+105a_0^3a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2$	$+54a_0^2a_2^2a_3^5a_4a_5$
$-6a_0^3a_2^4a_4a_5^3$	$+108a_0^2a_2^5a_3a_4a_5^2$	$-104a_0^3a_2^2a_3a_4^4a_5$	$-42a_0^2a_2^2a_3^4a_4^3$
$-11a_0^3a_2^3a_3^2a_5^3$	$+194a_0^2a_2^5a_4^3a_5$	$+24a_0^3a_2^2a_4^6$	$-5a_0a_1^5a_3a_5^4$
$+96a_0^3a_2^3a_3a_4^2a_5^2$	$-42a_0^2a_2^4a_3^3a_5^2$	$-90a_0^3a_2a_3^4a_4a_5^2$	$+5a_0a_1^5a_4^2a_5^3$
$-64a_0^3a_2^3a_4^4a_5$	$-663a_0^2a_2^4a_3^2a_4^2a_5$	$+82a_0^3a_2a_3^3a_4^3a_5$	$+7a_0a_1^4a_2^2a_5^4$
$-66a_0^3a_2^2a_3^3a_4a_5^2$	$-274a_0^2a_2^4a_3a_4^4$	$-16a_0^3a_2a_3^2a_4^5$	$-62a_0a_1^4a_2a_3a_4a_5^3$
$-29a_0^3a_2^2a_3^2a_4^3a_5$	$+570a_0^2a_2^3a_3^4a_4a_5$	$+27a_0^3a_3^6a_5^2$	$+48a_0a_1^4a_2a_4^3a_5^2$
$+68a_0^3a_2^2a_3a_4^5$	$+914a_0^2a_2^3a_3^3a_4^3$	$-27a_0^3a_3^5a_4^2a_5$	$+64a_0a_1^4a_3^3a_5^3$
$+18a_0^3a_2a_3^5a_5^2$	$-153a_0^2a_2^2a_3^6a_5$	$+6a_0^3a_3^4a_4^4$	$+6a_0a_1^4a_3^2a_4^2a_5^2$
$+75a_0^3a_2a_3^4a_4^2a_5$	$-1032a_0^2a_2^2a_3^5a_4^2$	$+12a_0^2a_1^3a_2a_3a_5^4$	$-117a_0a_1^4a_3a_4^4a_5$
$-78a_0^3a_2a_3^3a_4^4$	$+486a_0^2a_2a_3^7a_4$	$-12a_0^2a_1^3a_2a_4^2a_5^3$	$+54a_0a_1^4a_4^6$
$-27a_0^3a_3^6a_4a_5$	$-81a_0^2a_3^9$	$-21a_0^2a_1^3a_3^2a_4a_5^3$	$+8a_0a_1^3a_2^3a_4a_5^3$
$+24a_0^3a_3^5a_4^3$	$+9a_0a_1^5a_4^3a_5^2$	$+30a_0^2a_1^3a_3a_4^3a_5^2$	$+29a_0a_1^3a_2^2a_3^2a_5^3$
$-a_0^2a_1^4a_3a_5^4$	$+7a_0a_1^5a_2a_5^4$	$-9a_0^2a_1^3a_4^5a_5$	$+57a_0a_1^3a_2^2a_3a_4^2a_5^2$
$+a_0^2a_1^4a_4^2a_5^3$	$-16a_0a_1^5a_3a_4a_5^3$	$-12a_0^2a_1^2a_2^3a_5^4$	$-138a_0a_1^3a_2^2a_4^4a_5$
$-8a_0^2a_1^3a_2^2a_5^4$	$-53a_0a_1^4a_2^2a_4a_5^3$	$+69a_0^2a_1^2a_2^2a_3a_4a_5^3$	$-238a_0a_1^3a_2a_3^3a_4a_5^2$
$+46a_0^2a_1^3a_2a_3a_4a_5^3$	$-150a_0a_1^4a_2a_3a_4^2a_5^2$	$-33a_0^2a_1^2a_2^2a_4^3a_5^2$	$+390a_0a_1^3a_2a_3^2a_4^3a_5$
$-30a_0^2a_1^3a_2a_4^3a_5^2$	$+104a_0a_1^4a_2a_3^2a_5^3$	$-96a_0^2a_1^2a_2a_3^3a_5^3$	$-72a_0a_1^3a_2a_3a_4^5$
$-20a_0^2a_1^3a_3^3a_5^3$	$+117a_0a_1^4a_2a_4^4a_5$	$+150a_0^2a_1^2a_2a_3a_4^4a_5$	$-194a_0a_1^3a_3^5a_5^2$
$+33a_0^2a_1^3a_3^2a_4^2a_5^2$	$-48a_0a_1^4a_3^3a_4a_5^2$	$-72a_0^2a_1^2a_2a_4^6$	$+337a_0a_1^3a_3^4a_4^2a_5$
$-48a_0^2a_1^3a_3a_4^4a_5$	$+138a_0a_1^4a_3^2a_4^3a_5$	$-315a_0^2a_1^2a_3^3a_1^3a_5$	$-179a_0a_1^3a_3^3a_4^4$

x	x	y	y
$-108a_0a_1^4a_3a_4^5$	$+16a_1^5a_2^2a_3a_5^3$	$-75a_0a_1^2a_2^4a_3a_5^3$	$+12a_1^4a_2^3a_4^2a_5^2$
$-82a_0a_1^3a_2^3a_3a_5^3$	$-108a_1^5a_2a_3^2a_4a_5^2$	$-3a_0a_1^2a_2^4a_4^2a_5^2$	$+513a_1^4a_2^2a_3^2a_4a_5^2$
$+315a_0a_1^3a_2^3a_4^2a_5^2$	$+72a_1^5a_2a_3a_4^3a_5$	$-108a_0a_1^2a_2^3a_3^2a_4a_5^2$	$+274a_1^4a_2a_3^4a_5^2$
$+153a_0a_1^3a_2^2a_3^2a_4a_5^2$	$+135a_1^5a_2a_4^5$	$+308a_0a_1^2a_2^3a_3a_4^3a_5$	$-735a_1^4a_2^2a_3a_4^3a_5$
$-390a_0a_1^3a_2^2a_3a_4^3a_5$	$+84a_1^5a_3^4a_5^2$	$+663a_0a_1^2a_2^2a_3^4a_5^2$	$+148a_1^4a_3^5a_4a_5$
$-234a_0a_1^3a_2^2a_4^5$	$-112a_1^5a_3^3a_4^2a_5$	$-783a_0a_1^2a_2^2a_3^3a_4^2a_5$	$+765a_1^4a_2a_3^2a_4^4$
$-114a_0a_1^3a_2a_3^4a_5^2$	$-6a_1^4a_2^4a_5^3$	$+112a_0a_1^2a_2^3a_4^5$	$-175a_1^4a_3^4a_4^3$
$-308a_0a_1^3a_2a_3^3a_4^2a_5$	$+240a_1^4a_2^3a_3a_4a_5^2$	$-306a_0a_1^2a_2^2a_3^2a_4^4$	$-880a_1^4a_2a_3^3a_4^2a_5$
$+735a_0a_1^3a_2a_3^2a_4^4$	$+179a_1^4a_2^3a_4^3a_5$	$-570a_0a_1^2a_2a_3^5a_4a_5$	$-24a_1^3a_2^5a_5^3$
$+208a_0a_1^3a_3^5a_4a_5$	$+306a_1^4a_2^2a_3^2a_4^2a_5$	$+798a_0a_1^2a_2a_3^4a_4^3$	$-513a_1^3a_2^4a_3a_4a_5^2$
$-283a_0a_1^3a_3^4a_4^3$	$-144a_1^4a_2^2a_3^3a_5^2$	$+216a_0a_1^2a_3^7a_5$	$-914a_1^3a_2^3a_3^3a_5^2$
$+27a_0a_1^2a_2^5a_5^3$	$-765a_1^4a_2^2a_3a_4^4$	$-252a_0a_1^2a_3^6a_4^2$	$+283a_1^3a_2^4a_4^3a_5$
$-396a_0a_1^2a_2^4a_3a_4a_5^2$	$+28a_1^4a_2a_3^4a_4a_5$	$+27a_0a_1a_2^6a_5^3$	$+1986a_1^3a_2^3a_3^2a_4^2a_5$
$-337a_0a_1^2a_2^4a_4^3a_5$	$+280a_1^4a_2a_3^3a_4^3$	$+294a_0a_1a_2^5a_3a_4a_5^2$	$-280a_1^3a_2^3a_3a_4^4$
$+222a_0a_1^2a_2^3a_3^3a_5^2$	$-88a_1^4a_3^6a_5$	$-208a_0a_1a_2^5a_4^3a_5$	$+527a_1^3a_2^2a_3^4a_4a_5$
$+783a_0a_1^2a_2^3a_3^2a_4^2a_5$	$+40a_1^4a_3^5a_4^2$	$-93a_0a_1a_2^4a_3^2a_4^2a_5$	$-1365a_1^3a_2^2a_3^3a_4^3$
$+880a_0a_1^2a_2^3a_3a_4^4$	$-63a_1^3a_2^5a_4a_5^2$	$-570a_0a_1a_2^4a_3^3a_5^2$	$-340a_1^3a_2a_3^6a_5$
$+93a_0a_1^2a_2^2a_3^4a_4a_5$	$-798a_1^3a_2^4a_3a_4^2a_5$	$-28a_0a_1a_2^4a_3a_4^4$	$+700a_1^3a_2a_3^5a_4^2$
$-1986a_0a_1^2a_2^2a_3^3a_4^3$	$+42a_1^3a_2^4a_3^2a_5^2$	$+1116a_0a_1a_2^3a_3^4a_4a_5$	$-60a_1^3a_3^7a_4$
$-240a_0a_1^2a_2a_3^6a_5$	$+175a_1^3a_2^4a_4^4$	$+224a_0a_1a_2^3a_3^3a_4^3$	$+153a_1^2a_2^6a_4a_5^2$
$+1098a_0a_1^2a_2a_3^5a_4^2$	$-224a_1^3a_2^3a_3^3a_4a_5$	$-369a_0a_1a_2^2a_3^6a_5$	$+1032a_1^2a_2^5a_3^2a_5^2$
$-144a_0a_1^2a_3^7a_4$	$+1365a_1^3a_2^3a_3^2a_4^3$	$-798a_0a_1a_2^2a_3^5a_4^2$	$-1098a_1^2a_2^5a_3a_4^2a_5$
$+81a_0a_1a_2^6a_4a_5^2$	$+368a_1^3a_2^2a_3^5a_5$	$+486a_0a_1a_2a_3^7a_4$	$-40a_1^2a_2^5a_4^4$

x	x	y	y
$-54a_0a_1a_2^5a_3^2a_5^2$	$-1025a_1^3a_2^2a_3^4a_4^2$	$-81a_0a_1a_3^9$	$-1662a_1^2a_2^4a_3^3a_4a_5$
$+570a_0a_1a_2^5a_3a_4^2a_5$	$+60a_1^3a_2a_3^6a_4$	$-108a_0a_2^7a_4a_5^2$	$+1025a_1^2a_2^4a_3^2a_4^3$
$-148a_0a_1a_2^5a_4^4$	$+30a_1^3a_3^8$	$+153a_0a_2^6a_3^2a_5^2$	$+730a_1^2a_2^3a_3^5a_5$
$-1116a_0a_1a_2^4a_3^3a_4a_5$	$+252a_1^2a_2^6a_4^2a_5$	$+240a_0a_2^6a_3a_4^2a_5$	$+370a_1^2a_2^3a_3^4a_4^2$
$-527a_0a_1a_2^4a_3^2a_4^3$	$+798a_1^2a_2^5a_3^2a_4a_5$	$+88a_0a_2^6a_4^4$	$-645a_1^2a_2^2a_3^6a_4$
$+474a_0a_1a_2^3a_3^5a_5$	$-700a_1^2a_2^5a_3a_4^3$	$-474a_0a_2^5a_3^3a_4a_5$	$+135a_1^2a_2a_3^8$
$+1662a_0a_1a_2^3a_3^4a_4^2$	$-578a_1^2a_2^4a_3^4a_5$	$-368a_0a_2^5a_3^2a_4^3$	$-486a_1a_2^7a_3a_5^2$
$-1185a_0a_1a_2^2a_3^6a_4$	$-370a_1^2a_2^4a_3^3a_4^2$	$+149a_0a_2^4a_3^5a_5$	$+144a_1a_2^7a_4^2a_5$
$+243a_0a_1a_2a_3^8$	$+880a_1^2a_2^3a_3^5a_4$	$+578a_0a_2^4a_3^4a_4^2$	$+1185a_1a_2^6a_3^2a_4a_5$
$-216a_0a_2^7a_4^2a_5$	$-240a_1^2a_2^2a_3^7$	$-312a_0a_2^3a_3^6a_4$	$-60a_1a_2^6a_3a_4^3$
$+369a_0a_2^6a_3^2a_4a_5$	$-486a_1a_2^7a_3a_4a_5$	$+54a_0a_2^2a_3^8$	$-488a_1a_2^5a_3^4a_5$
$+340a_0a_2^6a_3a_4^3$	$+60a_1a_2^7a_4^3$	$-a_1^6a_2a_5^4$	$-880a_1a_2^5a_3^3a_4^2$
$-149a_0a_2^5a_3^4a_5$	$+312a_1a_2^6a_3^3a_5$	$+28a_1^6a_3a_4a_5^3$	$+735a_1a_2^4a_3^5a_4$
$-730a_0a_2^5a_3^3a_4^2$	$+645a_1a_2^6a_3^2a_4^2$	$-27a_1^6a_4^3a_5^2$	$-150a_1a_2^3a_3^7$
$+488a_0a_2^4a_3^5a_4$	$-735a_1a_2^5a_3^4a_4$	$-11a_1^5a_2^2a_4a_5^3$	$+81a_2^9a_5^2$
$-102a_0a_2^3a_3^7$	$+190a_1a_2^4a_3^6$	$-68a_1^5a_2a_3^2a_5^3$	$-243a_2^8a_3a_4a_5$
$-2a_1^7a_5^4$	$+81a_2^9a_4a_5$	$-12a_1^5a_2a_3a_4^2a_5^2$	$-30a_2^8a_4^3$
$+20a_1^6a_3a_4a_5^3$	$-54a_2^8a_3^2a_5$	$-116a_1^5a_3^3a_4a_5^2$	$+102a_2^7a_3^3a_5$
$-24a_1^6a_3^2a_5^3$	$-135a_2^8a_3a_4^2$	$+108a_1^5a_2a_4^4a_5$	$+240a_2^7a_3^2a_4^2$
$+72a_1^6a_3a_4^2a_5^2$	$+150a_2^7a_3^3a_4$	$+234a_1^5a_3^2a_4^3a_5$	$-190a_2^6a_3^4a_4$
$-54a_1^6a_4^4a_5$	$-40a_2^6a_3^5$	$-135a_1^5a_3a_4^5$	$+40a_2^5a_3^6$
$-129a_1^5a_2^2a_4^2a_5^2$		$+78a_1^4a_2^3a_3a_5^3$	

Nr. 21.

$\varphi_{0,12} = J'_{12}$ = Diskriminante von j.

Siehe die Tabelle pag. 318.

Nr. 22.

$\varphi_{1,13} = (\varphi_{1,5},\ \varphi_{2,8})$.

x	x	x
$-2a_0^5a_2^2a_3a_5^5$	$-160a_0^4a_2^2a_3^3a_4a_5^3$	$-72a_0^3a_1^2a_3^5a_5^3$
$+2a_0^5a_2^2a_4^2a_5^4$	$-280a_0^4a_2^2a_3^2a_4^3a_5^2$	$+304a_0^3a_1a_2^3a_4^5a_5$
$+10a_0^5a_2a_3^2a_4a_5^4$	$+332a_0^4a_2^2a_3a_4^5a_5$	$-120a_0^3a_1a_2^4a_4^2a_5^3$
$-16a_0^5a_2a_3a_4^3a_5^3$	$-54a_0^4a_2^2a_4^7$	$+96a_0^3a_1a_2^4a_3a_5^4$
$+6a_0^5a_2a_4^5a_5^2$	$+24a_0^4a_2a_3^5a_5^3$	$-560a_0^3a_1a_2^3a_3^2a_4a_5^3$
$-6a_0^5a_3^4a_5^4$	$+360a_0^4a_2a_3^4a_4^2a_5^2$	$+160a_0^3a_1a_2^3a_3a_4^3a_5^2$
$+12a_0^5a_3^3a_4^2a_5^3$	$-320a_0^4a_2a_3^3a_4^4a_5$	$+280a_0^3a_1a_2^2a_3^4a_5^3$
$-10a_0^5a_3^2a_4^4a_5^2$	$+38a_0^4a_2a_3^2a_4^6$	$+1440a_0^3a_1a_2^2a_3^3a_4^2a_5^2$
$+6a_0^5a_3a_4^6a_5$	$-108a_0^4a_3^6a_4a_5^2$	$-960a_0^3a_1a_2^2a_3^2a_4^4a_5$
$-2a_0^5a_4^8$	$+96a_0^4a_3^5a_4^3a_5$	$-376a_0^3a_1a_2^2a_3a_4^6$
$+4a_0^4a_1^2a_2a_3a_5^5$	$-12a_0^4a_3^4a_4^5$	$-1296a_0^3a_1a_2a_3^5a_4a_5^2$
$-4a_0^4a_1^2a_2a_4^2a_5^4$	$-2a_0^3a_1^4a_3a_5^5$	$+80a_0^3a_1a_2a_3^4a_4^3a_5$
$-10a_0^4a_1^2a_3^2a_4a_5^4$	$+2a_0^3a_1^4a_4^2a_5^4$	$+832a_0^3a_1a_2a_3^3a_4^5$
$+16a_0^4a_1^2a_3a_4^3a_5^3$	$-16a_0^3a_1^3a_2^2a_5^5$	$-240a_0^3a_1a_3^5a_4^4$
$-6a_0^4a_1^2a_4^5a_5^2$	$+32a_0^3a_1^3a_2a_3a_4a_5^4$	$+432a_0^3a_1a_3^7a_5^2$
$+6a_0^4a_1a_2^3a_5^5$	$-8a_0^3a_1^3a_3^3a_5^4$	$-72a_0^3a_1a_3^6a_4^2a_5$
$-26a_0^4a_1a_2^2a_3a_4a_5^4$	$+80a_0^3a_1^3a_3^2a_4^2a_5^3$	$-36a_0^3a_2^6a_5^4$
$+8a_0^4a_1a_2^2a_4^3a_5^3$	$-160a_0^3a_1^3a_3a_4^4a_5^2$	$+288a_0^3a_2^5a_3a_4a_5^3$
$+32a_0^4a_1a_2a_3^3a_5^4$	$+72a_0^3a_1^3a_4^6a_5$	$-56a_0^3a_2^5a_4^3a_5^2$
$-116a_0^4a_1a_2a_3^2a_4^2a_5^3$	$+84a_0^3a_1^2a_2^3a_4a_5^4$	$-140a_0^3a_2^4a_3^3a_5^3$
$+180a_0^4a_1a_2a_3a_4^4a_5^2$	$-104a_0^3a_1^2a_2^2a_3^2a_5^4$	$-480a_0^3a_2^4a_3^2a_4^2a_5^2$
$-78a_0^4a_1a_2a_4^6a_5$	$-160a_0^3a_1^2a_2^2a_3a_4^2a_5^3$	$+420a_0^3a_2^4a_3a_4^4a_5$
$+24a_0^4a_1a_3^4a_4a_5^3$	$+60a_0^3a_1^2a_2^2a_4^4a_5^2$	$-276a_0^3a_2^4a_4^6$
$-20a_0^4a_1a_3^3a_4^3a_5^2$	$+320a_0^3a_1^2a_2a_3^3a_4a_5^3$	$+420a_0^3a_2^3a_3^4a_4a_5^2$
$-44a_0^4a_1a_3^2a_4^5a_5$	$+80a_0^3a_1^2a_2a_3^2a_4^3a_5^2$	$-1120a_0^3a_2^3a_3^3a_4^3a_5$
$+34a_0^4a_1a_3a_4^7$	$-496a_0^3a_1^2a_2a_3a_4^5a_5$	$+1112a_0^3a_2^3a_3^2a_4^5$
$-30a_0^4a_2^4a_4a_5^4$	$+252a_0^3a_1^2a_2a_4^7$	$-144a_0^3a_2^2a_3^6a_5^2$
$+4a_0^4a_2^3a_3^2a_5^4$	$-420a_0^3a_1^2a_3^4a_4^2a_5^2$	$+1620a_0^3a_2^2a_3^5a_4^2a_5$
$+240a_0^4a_2^3a_3a_4^2a_5^3$	$+860a_0^3a_1^2a_3^3a_4^4a_5$	$-1620a_0^3a_2^2a_3^4a_4^4$
$-130a_0^4a_2^3a_4^4a_5^2$	$-404a_0^3a_1^2a_3^2a_4^6$	$-864a_0^3a_2a_3^7a_4a_5$

x	x	x
$+876a_0^3a_2a_3^6a_4^3$	$-3480a_0^2a_1^2a_2a_3^4a_4^4$	$-192a_0a_1^5a_2a_3a_4^3a_5^2$
$+162a_0^3a_3^9a_5$	$+1224a_0^2a_1^2a_3^6a_4^3$	$+400a_0a_1^5a_3^4a_5^3$
$-162a_0^3a_3^8a_4^2$	$-144a_0^2a_1a_2^6a_4a_5^3$	$+984a_0a_1^5a_3^3a_4^2a_5^2$
$+14a_0^2a_1^5a_2a_5^5$	$-768a_0^2a_1a_2^5a_3a_4^2a_5^2$	$-2160a_0a_1^5a_3^2a_4^4a_5$
$-6a_0^2a_1^5a_3a_4a_5^4$	$-700a_0^2a_1a_2^5a_4^4a_5$	$+1080a_0a_1^5a_3a_4^6$
$-8a_0^2a_1^5a_4^3a_5^3$	$+108a_0^2a_1a_2^5a_3^2a_5^3$	$-60a_0a_1^4a_2^4a_5^4$
$-50a_0^2a_1^4a_2^2a_4a_5^4$	$+900a_0^2a_1a_2^4a_3^3a_4a_5^2$	$-480a_0a_1^4a_2^3a_3a_4a_5^3$
$+216a_0^2a_1^4a_3a_4^5a_5$	$+8160a_0^2a_1a_2^4a_3^2a_4^3a_5$	$-1580a_0a_1^4a_2^3a_4^3a_5^2$
$-120a_0^2a_1^4a_2a_3a_4^2a_5^3$	$-2148a_0^2a_1a_2^4a_3a_4^5$	$+40a_0a_1^4a_2^2a_3^3a_5^3$
$+90a_0^2a_1^4a_2a_3^2a_5^4$	$+912a_0^2a_1a_2^3a_3^5a_5^2$	$+2040a_0a_1^4a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2$
$+60a_0^2a_1^4a_2a_4^4a_5^2$	$-15060a_0^2a_1a_2^3a_3^4a_4^2a_5$	$+2910a_0a_1^4a_2^2a_3a_4^4a_5$
$-216a_0^2a_1^4a_3^3a_4a_5^3$	$+2800a_0^2a_1a_2^3a_3^3a_4^4$	$-810a_0a_1^4a_2^2a_4^6$
$-280a_0^2a_1^4a_3^3a_4a_5^3$	$+6624a_0^2a_1a_2^2a_3^6a_4a_5$	$-3420a_0a_1^4a_2a_3^4a_4a_5^2$
$+300a_0^2a_1^4a_3^2a_4^3a_5^2$	$+2052a_0^2a_1a_2^2a_3^5a_4^3$	$+4800a_0a_1^4a_2a_3^3a_4^3a_5$
$-160a_0^2a_1^3a_2^3a_3a_5^4$	$-918a_0^2a_1a_2a_3^8a_5$	$-3510a_0a_1^4a_2a_3^2a_4^5$
$-80a_0^2a_1^3a_2^3a_4^2a_5^3$	$-2304a_0^2a_1a_2a_3^7a_4^2$	$-1516a_0a_1^4a_3^6a_5^2$
$-312a_0^2a_1^3a_2^2a_4^5a_5$	$+486a_0^2a_1a_3^9a_4$	$+2156a_0a_1^4a_3^5a_4^2a_5$
$+1280a_0^2a_1^3a_2^2a_3^2a_4a_5^3$	$+504a_0^2a_2^7a_4^2a_5^2$	$-430a_0a_1^4a_3^4a_4^4$
$-2160a_0^2a_1^3a_2a_3^3a_4^2a_5^2$	$-576a_0^2a_2^6a_3^2a_4a_5^2$	$+336a_0a_1^3a_2^5a_4a_5^3$
$-216a_0^2a_1^3a_2a_3a_4^6$	$-2288a_0^2a_2^6a_3a_4^3a_5$	$-40a_0a_1^3a_2^4a_3^2a_5^3$
$-440a_0^2a_1^3a_2a_3^4a_5^3$	$+1172a_0^2a_2^6a_4^5$	$+2640a_0a_1^3a_2^4a_4^2a_5^2$
$+1740a_0^2a_1^3a_2a_3^2a_4^4a_5$	$-124a_0^2a_2^5a_3^4a_5^2$	$+1840a_0a_1^3a_2^4a_4^4a_5$
$+2344a_0^2a_1^3a_3^5a_4a_5^2$	$+4336a_0^2a_2^5a_3^3a_4^2a_5$	$-1280a_0a_1^3a_2^3a_3^3a_4a_5^2$
$-3240a_0^2a_1^3a_3^4a_4^3a_5$	$-2540a_0^2a_2^5a_3^2a_4^4$	$-13360a_0a_1^3a_2^3a_3^2a_4^3a_5$
$+1244a_0^2a_1^3a_3^3a_4^5$	$-1912a_0^2a_2^4a_3^5a_4a_5$	$+3200a_0a_1^3a_2^3a_3a_4^5$
$+72a_0^2a_1^2a_2^5a_5^4$	$+2100a_0^2a_2^4a_3^4a_4^3$	$+7312a_0a_1^3a_2^2a_3^3a_5^2$
$-240a_0^2a_1^2a_2^4a_3a_4a_5^3$	$+240a_0^2a_2^3a_3^7a_5$	$-2360a_0a_1^3a_2^2a_3^4a_4^2a_5$
$+940a_0^2a_1^2a_2^4a_4^3a_5^2$	$-1560a_0^2a_2^3a_3^6a_4^2$	$+3840a_0a_1^3a_2^2a_3^3a_4^4$
$-1320a_0^2a_1^2a_2^3a_3^2a_4^2a_5^2$	$+810a_0^2a_2^2a_3^8a_4$	$-5344a_0a_1^3a_2a_3^6a_4a_5$
$-2640a_0^2a_1^2a_2^3a_3a_4^4a_5$	$-162a_0^2a_2a_3^{10}$	$+2800a_0a_1^3a_2a_3^5a_4^3$
$+908a_0^2a_1^2a_2^3a_4^6$	$-4a_0a_1^7a_5^5$	$+1956a_0a_1^3a_3^8a_5$
$+600a_0^2a_1^2a_2^2a_3^4a_4a_5^2$	$-22a_0a_1^6a_2a_4a_5^4$	$-1680a_0a_1^3a_3^7a_4^2$
$+3360a_0^2a_1^2a_2^2a_3^3a_4^3a_5$	$-26a_0a_1^6a_3^2a_5^4$	$-36a_0a_1^2a_2^6a_3a_5^3$
$-168a_0^2a_1^2a_2^2a_3^2a_4^5$	$+76a_0a_1^6a_3a_4^2a_5^3$	$-1296a_0a_1^2a_2^6a_4^2a_5^2$
$-1656a_0^2a_1^2a_2a_3^6a_5^2$	$+124a_0a_1^5a_2^2a_3a_5^4$	$+1668a_0a_1^2a_2^5a_3^2a_4a_5^2$
$+3408a_0^2a_1^2a_2a_3^5a_4^2a_5$	$+368a_0a_1^5a_2^2a_4^2a_5^3$	$-1312a_0a_1^2a_2^5a_3a_4^3a_5$
$-1008a_0^2a_1^2a_3^7a_4a_5$	$-688a_0a_1^5a_2a_3^2a_4a_5^3$	$-2060a_0a_1^2a_2^5a_4^5$

x	x	x
$-8020a_0a_1^2a_2^4a_3^4a_5^2$	$+264a_1^6a_2^2a_3a_4a_5^3$	$-2880a_1^3a_2^6a_4^3a_5$
$+15220a_0a_1^2a_2^4a_3^3a_4^2a_5$	$+756a_1^6a_2^2a_4^3a_5^2$	$+14688a_1^3a_2^5a_3^3a_5^2$
$+1180a_0a_1^2a_2^4a_3^2a_4^4$	$-368a_1^6a_2a_3^3a_5^3$	$-22740a_1^3a_2^5a_3^2a_4^2a_5$
$+3712a_0a_1^2a_2^3a_3^5a_4a_5$	$-732a_1^6a_2a_3^2a_4^2a_5^2$	$+600a_1^3a_2^5a_3a_4^4$
$-8540a_0a_1^2a_2^3a_3^4a_4^3$	$+540a_1^6a_2a_3a_4^4a_5$	$-16520a_1^3a_2^4a_3^4a_4a_5$
$-2952a_0a_1^2a_2^2a_3^7a_5$	$-1172a_1^6a_3^4a_4a_5^2$	$+23300a_1^3a_2^4a_3^3a_4^3$
$+3330a_0a_1^2a_2a_3^8a_4$	$+2520a_1^6a_3^3a_4^3a_5$	$+8760a_1^3a_2^3a_3^6a_5$
$-810a_0a_1^2a_3^{10}$	$-1350a_1^6a_3^2a_4^5$	$-5200a_1^3a_2^3a_3^5a_4^2$
$-576a_0a_1a_2^7a_3a_4a_5^2$	$-144a_1^5a_2^4a_4a_5^3$	$-5400a_1^3a_2^2a_3^7a_4$
$+1824a_0a_1a_2^7a_4^3a_5$	$+376a_1^5a_2^3a_3^2a_5^3$	$+1500a_1^3a_2a_3^9$
$+3792a_0a_1a_2^6a_3^3a_5^2$	$-1440a_1^5a_2^3a_3a_4^2a_5^2$	$-594a_1^2a_2^8a_4a_5^2$
$-5808a_0a_1a_2^6a_3^2a_4^2a_5$	$-1530a_1^5a_2^3a_4^4a_5$	$-10296a_1^2a_2^7a_3^2a_5^2$
$+3240a_0a_1a_2^6a_3a_4^4$	$+6360a_1^5a_2^2a_3^3a_4a_5^2$	$+10080a_1^2a_2^7a_3a_4^2a_5$
$-4768a_0a_1a_2^5a_3^4a_4a_5$	$-6000a_1^5a_2^2a_3^2a_4^3a_5$	$+900a_1^2a_2^7a_4^4$
$-6240a_0a_1a_2^5a_3^3a_4^3$	$+1350a_1^5a_2^2a_3a_4^5$	$+19440a_1^2a_2^6a_3^3a_4a_5$
$+2608a_0a_1a_2^4a_3^6a_5$	$+2344a_1^5a_2a_3^5a_5^2$	$-8800a_1^2a_2^6a_3^2a_4^3$
$+12440a_0a_1a_2^4a_3^5a_4^2$	$-9260a_1^5a_2a_3^4a_4^2a_5$	$-9160a_1^2a_2^5a_3^5a_5$
$-8160a_0a_1a_2^3a_3^7a_4$	$+7200a_1^5a_2a_3^3a_4^4$	$-11900a_1^2a_2^5a_3^4a_4^2$
$+1620a_0a_1a_2^2a_3^9$	$+1720a_1^5a_3^6a_4a_5$	$+13900a_1^2a_2^4a_3^6a_4$
$+162a_0a_2^9a_4a_5^2$	$-1900a_1^5a_3^5a_4^3$	$-3150a_1^2a_2^3a_3^8$
$-702a_0a_2^8a_3^2a_5^2$	$-168a_1^4a_2^5a_3a_5^3$	$+3564a_1a_2^9a_3a_5^2$
$-90a_0a_2^8a_3a_4^2a_5$	$+648a_1^4a_2^5a_4^2a_5^2$	$-1350a_1a_2^9a_4^2a_5$
$-1290a_0a_2^8a_4^4$	$-6420a_1^4a_2^4a_3^2a_4a_5^2$	$-9540a_1a_2^8a_3^2a_4a_5$
$+1920a_0a_2^7a_3^3a_4a_5$	$+9360a_1^4a_2^4a_3a_4^3a_5$	$-750a_1a_2^8a_3a_4^3$
$+3640a_0a_2^7a_3^2a_4^3$	$+450a_1^4a_2^4a_4^5$	$+4260a_1a_2^7a_3^4a_5$
$-796a_0a_2^6a_3^5a_5$	$-10100a_1^4a_2^3a_3^4a_5^2$	$+10800a_1a_2^7a_3^3a_4^2$
$-5340a_0a_2^6a_3^4a_4^2$	$+19920a_1^4a_2^3a_3^3a_4^2a_5$	$-9100a_1a_2^6a_3^5a_4$
$+3100a_0a_2^5a_3^6a_4$	$-10300a_1^4a_2^3a_3^2a_4^4$	$+2000a_1a_2^5a_3^7$
$-600a_0a_2^4a_3^8$	$+4920a_1^4a_2^2a_3^5a_4a_5$	$-486a_2^{11}a_5^2$
$+18a_1^8a_4a_5^4$	$-10100a_1^4a_2^2a_3^4a_4^3$	$+1620a_2^{10}a_3a_4a_5$
$-36a_1^7a_2a_3a_5^4$	$-3440a_1^4a_2a_3^7a_5$	$+450a_2^{10}a_4^3$
$-180a_1^7a_2a_4^2a_5^3$	$+7100a_1^4a_2a_3^6a_4^2$	$-720a_2^9a_3^3a_5$
$+184a_1^7a_3^2a_4a_5^3$	$-750a_1^4a_3^8a_4$	$-2250a_2^9a_3^2a_4^2$
$-108a_1^7a_3a_4^3a_5^2$	$+36a_1^3a_2^7a_5^3$	$+1800a_2^8a_3^4a_4$
$+18a_1^6a_2^3a_5^4$	$+2988a_1^3a_2^6a_3a_4a_5^2$	$-400a_2^7a_3^6$

y	y	y
$-2a_0^5a_2a_3^2a_5^5$	$+8a_0^3a_1^3a_3^2a_4a_5^4$	$-40a_0^3a_2^2a_3^4a_4^3a_5$
$+4a_0^5a_2a_3a_4^2a_5^4$	$-8a_0^3a_1^3a_4^5a_5^2$	$+376a_0^3a_2^2a_3^3a_4^5$
$-2a_0^5a_2a_4^4a_5^3$	$+12a_0^3a_1^2a_2^3a_5^5$	$-36a_0^3a_2a_3^6a_4^2a_5$
$+6a_0^5a_3^3a_4a_5^4$	$-116a_0^3a_1^2a_2^2a_3a_4a_5^4$	$-168a_0^3a_2a_3^5a_4^4$
$-16a_0^5a_3^2a_4^3a_5^3$	$+80a_0^3a_1^2a_2^2a_4^3a_5^3$	$+36a_0^3a_3^7a_4^3$
$+14a_0^5a_3a_4^5a_5^2$	$+240a_0^3a_1^2a_2a_3^3a_5^4$	$+6a_0^2a_1^5a_3a_5^5$
$-4a_0^5a_4^7a_5$	$-160a_0^3a_1^2a_2a_3^2a_4^2a_5^3$	$-6a_0^2a_1^5a_4^2a_5^4$
$+2a_0^4a_1^2a_3^2a_5^5$	$-120a_0^3a_1^2a_2a_3a_4^4a_5^2$	$-10a_0^2a_1^4a_2^2a_5^5$
$-4a_0^4a_1^2a_3a_4^2a_5^4$	$+76a_0^3a_1^2a_2a_4^6a_5$	$+180a_0^2a_1^4a_2a_3a_4a_5^4$
$+2a_0^4a_1^2a_4^4a_5^3$	$-120a_0^3a_1^2a_3^4a_4a_5^3$	$-160a_0^2a_1^4a_2a_4^3a_5^3$
$+10a_0^4a_1a_2^2a_3a_5^5$	$-80a_0^3a_1^2a_3^3a_4^3a_5^2$	$-130a_0^2a_1^4a_3^3a_5^4$
$-10a_0^4a_1a_2^2a_4^2a_5^4$	$+368a_0^3a_1^2a_3^2a_4^5a_5$	$+60a_0^2a_1^4a_3^2a_4^2a_5^3$
$-26a_0^4a_1a_2a_3^2a_4a_5^4$	$-180a_0^3a_1^2a_3a_4^7$	$+60a_0^2a_1^4a_3a_4^4a_5^2$
$+32a_0^4a_1a_2a_3a_4^3a_5^3$	$+24a_0^3a_1a_2^4a_4a_5^4$	$-20a_0^2a_1^3a_3^3a_4a_5^4$
$-6a_0^4a_1a_2a_4^5a_5^2$	$-160a_0^3a_1a_2^3a_3^2a_5^4$	$-280a_0^2a_1^3a_2^2a_3^2a_5^4$
$-30a_0^4a_1a_3^4a_5^4$	$+320a_0^3a_1a_2^3a_3a_4^2a_5^3$	$+80a_0^2a_1^3a_2^2a_3a_4^2a_5^3$
$+84a_0^4a_1a_3^3a_4^2a_5^3$	$-280a_0^3a_1a_2^3a_4^4a_5^2$	$+300a_0^2a_1^3a_2^2a_4^4a_5^2$
$-50a_0^4a_1a_3^2a_4^4a_5^2$	$-560a_0^3a_1a_2^2a_3^3a_4a_5^3$	$+160a_0^2a_1^3a_2a_3^3a_4a_5^3$
$-22a_0^4a_1a_3a_4^6a_5$	$+1280a_0^3a_1a_2^2a_3^2a_4^3a_5^2$	$-192a_0^2a_1^3a_2a_3a_4^5a_5$
$+18a_0^4a_1a_4^8$	$-688a_0^3a_1a_2^2a_3a_4^5a_5$	$-108a_0^2a_1^3a_2a_4^7$
$-6a_0^4a_2^4a_5^5$	$+184a_0^3a_1a_2^2a_4^7$	$-56a_0^2a_1^3a_3^5a_5^3$
$+32a_0^4a_2^3a_3a_4a_5^4$	$+288a_0^3a_1a_2a_3^5a_5^3$	$+940a_0^2a_1^3a_3^4a_4^2a_5^2$
$-8a_0^4a_2^3a_4^3a_5^3$	$-240a_0^3a_1a_2a_3^4a_4^2a_5^2$	$-1580a_0^2a_1^3a_3^3a_4^4a_5$
$+4a_0^4a_2^2a_3^3a_5^4$	$-480a_0^3a_1a_2a_3^3a_4^4a_5$	$+756a_0^2a_1^3a_3^2a_4^6$
$-104a_0^4a_2^2a_3^2a_4^2a_5^3$	$+264a_0^3a_1a_2a_3^2a_4^6$	$+360a_0^2a_1^2a_2^4a_3a_5^4$
$+90a_0^4a_2^2a_3a_4^4a_5^2$	$-144a_0^3a_1a_3^6a_4a_5^2$	$-420a_0^2a_1^2a_2^4a_4^2a_5^3$
$-26a_0^4a_2^2a_4^6a_5$	$+336a_0^3a_1a_3^5a_4^3a_5$	$+1440a_0^2a_1^2a_2^3a_3^2a_4a_5^3$
$+96a_0^4a_2a_3^4a_4a_5^3$	$-144a_0^3a_1a_3^4a_4^5$	$-2160a_0^2a_1^2a_2^3a_3a_4^3a_5^2$
$-160a_0^4a_2a_3^3a_4^3a_5^2$	$+24a_0^3a_2^5a_3a_5^4$	$+948a_0^2a_1^2a_2^3a_4^5a_5$
$+124a_0^4a_2a_3^2a_4^5a_5$	$-72a_0^3a_2^5a_4^2a_5^3$	$-480a_0^2a_1^2a_2^2a_3^4a_5^3$
$-36a_0^4a_2a_3a_4^7$	$+280a_0^3a_2^4a_3^2a_4a_5^3$	$-1320a_0^2a_1^2a_2^2a_3^3a_4^2a_5^2$
$-36a_0^4a_3^6a_5^3$	$-440a_0^3a_2^4a_3a_4^3a_5^2$	$+2040a_0^2a_1^2a_2^2a_3^2a_4^4a_5$
$+72a_0^4a_3^5a_4^2a_5^2$	$+400a_0^3a_3^4a_4^5a_5$	$-732a_0^2a_1^2a_2^2a_3a_4^6$
$-60a_0^4a_3^4a_4^4a_5$	$-140a_0^3a_2^3a_3^4a_5^3$	$-768a_0^2a_1^2a_2a_3^5a_4a_5^2$
$+18a_0^4a_3^3a_4^6$	$+40a_0^3a_2^3a_3^2a_4^4a_5$	$+2640a_0^2a_1^2a_2a_3^4a_4^3a_5$
$-16a_0^3a_1^3a_2a_3a_5^5$	$-368a_0^3a_3^3a_3a_4^6$	$-1440a_0^2a_1^2a_2a_3^3a_4^5$
$+16a_0^3a_1^3a_2a_4^2a_5^4$	$+108a_0^3a_2^2a_3^5a_4a_5^2$	$+504a_0^2a_1^2a_3^7a_5^2$

y	y	y
$-1296a_0^2a_1^2a_3^6a_4^2a_5$	$+72a_0a_1^6a_4^3a_5^3$	$+2156a_0a_1^2a_2^5a_4^4a_5$
$+648a_0^2a_1^2a_3^5a_4^4$	$-44a_0a_1^5a_2^2a_4a_5^4$	$-15060a_0a_1^2a_2^4a_3^3a_4a_5^2$
$-108a_0^2a_1a_2^6a_5^4$	$+332a_0a_1^5a_2a_3^2a_5^4$	$-2360a_0a_1^2a_2^4a_3^2a_4^3a_5$
$-1296a_0^2a_1a_2^5a_3a_4a_5^3$	$-496a_0a_1^5a_2a_3a_4^2a_5^3$	$-9260a_0a_1^2a_2^4a_3a_4^5$
$+2344a_0^2a_1a_2^5a_4^3a_5^2$	$+216a_0a_1^5a_2a_4^4a_5^2$	$+4336a_0a_1^2a_2^3a_3^5a_5^2$
$+420a_0^2a_1a_2^4a_3^3a_5^3$	$+304a_0a_1^5a_3^3a_4a_5^3$	$+15220a_0a_1^2a_2^3a_3^4a_4^2a_5$
$+600a_0^2a_1a_2^4a_3^2a_4^2a_5^2$	$-312a_0a_1^5a_3^2a_4^3a_5^2$	$+19920a_0a_1^2a_2^3a_3^3a_4^4$
$-3420a_0^2a_1a_2^4a_3a_4^4a_5$	$-320a_0a_1^4a_2^3a_3a_5^4$	$-5808a_0a_1^2a_2^2a_3^6a_4a_5$
$-1172a_0^2a_1a_2^4a_4^6$	$+860a_0a_1^4a_2^3a_4^2a_5^3$	$-22740a_0a_1^2a_2^2a_3^5a_4^3$
$+900a_0^2a_1a_2^3a_3^4a_4a_5^2$	$-960a_0a_1^4a_2^2a_3^2a_4a_5^3$	$-90a_0a_1^2a_2a_3^8a_5$
$-1280a_0^2a_1a_2^3a_3^3a_4^3a_5$	$+1740a_0a_1^4a_2^2a_3a_4^3a_5^2$	$+1080a_0a_1^2a_2a_3^7a_4^2$
$+6360a_0^2a_1a_2^3a_3^2a_4^5$	$-2160a_0a_1^4a_2^2a_4^5a_5$	$-864a_0a_1a_2^7a_3a_5^3$
$-576a_0^2a_1a_2a_3^7a_4a_5$	$+420a_0a_1^4a_2a_3^4a_5^3$	$-1008a_0a_1a_2^7a_4^2a_5^2$
$+1668a_0^2a_1a_2^2a_3^5a_4^2a_5$	$-2640a_0a_1^4a_2a_3^3a_4^2a_5^2$	$+6624a_0a_1a_2^6a_3^2a_4a_5^2$
$-6420a_0^2a_1a_2^2a_3^4a_4^4$	$+2910a_0a_1^4a_2a_3^2a_4^4a_5$	$-5344a_0a_1a_2^6a_3a_4^3a_5$
$-576a_0^2a_1a_2^2a_3^6a_5^2$	$+540a_0a_1^4a_2a_3a_4^6$	$+1720a_0a_1a_2^6a_4^5$
$+2988a_0^2a_1a_2a_3^6a_4^3$	$-700a_0a_1^4a_3^5a_4a_5^2$	$-1912a_0a_1a_2^5a_3^4a_5^2$
$+162a_0^2a_1a_3^9a_5$	$+1840a_0a_1^4a_3^4a_4^3a_5$	$+3712a_0a_1a_2^5a_3^3a_4^2a_5$
$-594a_0^2a_1a_3^8a_4^2$	$-1530a_0a_1^4a_3^3a_4^5$	$+4920a_0a_1a_2^5a_3^2a_4^4$
$+432a_0^2a_2^7a_4a_5^3$	$+96a_0a_1^3a_2^5a_5^4$	$-4768a_0a_1a_2^4a_3^5a_4a_5$
$-144a_0^2a_2^6a_3^2a_5^3$	$+80a_0a_1^3a_2^4a_3a_4a_5^3$	$-16520a_0a_1a_2^4a_3^4a_4^3$
$-1656a_0^2a_2^6a_3a_4^2a_5^2$	$-3240a_0a_1^3a_2^4a_4^3a_5^2$	$+1920a_0a_1a_2^3a_3^7a_5$
$-1516a_0^2a_2^6a_4^4a_5$	$-1120a_0a_1^3a_2^3a_3^3a_5^3$	$+19440a_0a_1a_2^3a_3^6a_4^2$
$+912a_0^2a_2^5a_3^3a_4a_5^2$	$+3360a_0a_1^3a_2^3a_3^2a_4^2a_5^2$	$-9540a_0a_1a_2^2a_3^8a_4$
$+7312a_0^2a_2^5a_3^2a_4^3a_5$	$+4800a_0a_1^3a_2^3a_3a_4^4a_5$	$+1620a_0a_1a_2a_3^{10}$
$+2344a_0^2a_2^5a_3a_4^5$	$+2520a_0a_1^3a_2^3a_4^6$	$+162a_0a_2^9a_5^3$
$-124a_0^2a_2^4a_3^5a_5^2$	$+8160a_0a_1^3a_2^2a_3^4a_4a_5^2$	$-918a_0a_2^8a_3a_4a_5^2$
$-8020a_0^2a_2^4a_3^4a_4^2a_5$	$-13360a_0a_1^3a_2^2a_3^3a_4^3a_5$	$+1956a_0a_2^8a_4^3a_5$
$-10100a_0^2a_2^4a_3^3a_4^4$	$-6000a_0a_1^3a_2^2a_3^2a_4^5$	$+240a_0a_2^7a_3^3a_5^2$
$+3792a_0^2a_2^3a_3^6a_4a_5$	$-2288a_0a_1^3a_2a_3^6a_5^2$	$-2952a_0a_2^7a_3^2a_4^2a_5$
$+14688a_0^2a_2^3a_3^5a_4^3$	$-1312a_0a_1^3a_2a_3^5a_4^2a^5$	$-3440a_0a_2^7a_3a_4^4$
$-702a_0^2a_2^2a_3^8a_5$	$+9360a_0a_1^3a_2a_3^4a_4^4$	$+2608a_0a_2^6a_3^4a_4a_5$
$-10296a_0^2a_2^2a_3^7a_4^2$	$+1824a_0a_1^3a_3^7a_4a_5$	$+8760a_0a_2^6a_3^3a_4^3$
$+3564a_0^2a_2a_3^9a_4$	$-2880a_0a_1^3a_3^6a_4^3$	$-796a_0a_2^5a_3^6a_5$
$-486a_0^2a_3^{11}$	$-72a_0a_1^2a_2^6a_4a_5^3$	$-9160a_0a_2^5a_3^5a_4^2$
$+6a_0a_1^6a_2a_5^5$	$+1620a_0a_1^2a_2^5a_3^2a_5^3$	$+4260a_0a_2^4a_3^7a_4$
$-78a_0a_1^6a_3a_4a_5^4$	$+3408a_0a_1^2a_2^5a_3a_4^2a_5^2$	$-720a_0a_2^3a_3^9$

y	y	y
$-1350a_0a_2^2a_3^9a_4$	$-1620a_1^4a_2^4a_3^2a_5^3$	$-2304a_1^3a_2^7a_3a_4a_5^2$
$-2a_1^8a_5^5$	$-3480a_1^4a_2^4a_3a_4^2a_5^2$	$-1680a_1^2a_2^7a_1^3a_5$
$+34a_1^7a_2a_4a_5^4$	$-430a_1^4a_2^4a_4^4a_5$	$-1560a_1^2a_2^6a_3^3a_5^2$
$-54a_1^7a_3^2a_5^4$	$+2800a_1^4a_2^3a_3^3a_4a_5^2$	$+7100a_1^2a_2^6a_3a_4^4$
$+252a_1^7a_3a_4^2a_5^3$	$+3840a_1^4a_2^3a_3^2a_4^3a_5$	$+12440a_1^2a_2^5a_3^4a_1a_5$
$-216a_1^7a_4^4a_5^2$	$+7200a_1^4a_2^3a_3a_1^5$	$-5200a_1^2a_2^5a_3^3a_4^3$
$+38a_1^6a_2^2a_3a_5^4$	$-2540a_1^4a_2^2a_3^5a_5^2$	$-5340a_1^2a_2^4a_3^6a_5$
$-404a_1^6a_2^2a_4^2a_5^3$	$+1180a_1^4a_2^2a_3^4a_1^2a_5$	$-11900a_1^2a_2^4a_3^5a_4^2$
$-376a_1^6a_2a_3^2a_1a_5^3$	$-10300a_1^4a_2^2a_3^3a_4^4$	$+10800a_1^2a_2^3a_3^7a_4$
$-216a_1^6a_2a_3a_4^3a_5^2$	$+3240a_1^4a_2a_3^6a_4a_5$	$-2250a_1^2a_2^2a_3^9$
$+1080a_1^6a_2a_4^5a_5$	$+600a_1^4a_2a_3^5a_4^3$	$+486a_1a_2^9a_4a_5^2$
$-276a_1^6a_3^4a_5^3$	$-1290a_1^4a_3^8a_5$	$+810a_1a_2^8a_3^2a_5^2$
$+908a_1^6a_3^3a_4^2a_5^2$	$+900a_1^4a_3^7a_4^2$	$+3330a_1a_2^8a_3a_4^2a_5$
$-810a_1^6a_3^2a_4^4a_5$	$+876a_1^3a_2^6a_3a_5^3$	$-750a_1a_2^8a_4^4$
$-12a_1^5a_2^4a_5^4$	$+1224a_1^3a_2^6a_4^2a_5^2$	$-8160a_1a_2^7a_3^3a_4a_5$
$+832a_1^5a_2^3a_3a_1a_5^3$	$+2052a_1^3a_2^5a_3^2a_4a_5^2$	$-5400a_1a_2^7a_3^2a_4^3$
$+1244a_1^5a_2^3a_4^3a_5^2$	$+2800a_1^3a_2^5a_3a_4^3a_5$	$+3100a_1a_2^6a_3^5a_5$
$+1112a_1^5a_2^2a_3^3a_5^3$	$-1900a_1^3a_2^5a_4^5$	$+13900a_1a_2^6a_3^4a_4^2$
$-168a_1^5a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2$	$+2100a_1^3a_2^4a_3^4a_5^2$	$-9100a_1a_2^5a_3^6a_4$
$-3510a_1^5a_2^2a_3a_4^4a_5$	$-8540a_1^3a_2^4a_3^3a_4^2a_5$	$+1800a_1a_2^4a_3^8$
$-1350a_1^5a_2^2a_4^6$	$-10100a_1^3a_2^4a_3^2a_4^4$	$-162a_2^{10}a_3a_5^2$
$-2148a_1^5a_2a_3^4a_4a_5^2$	$-6240a_1^3a_2^3a_3^5a_4a_5$	$-810a_2^{10}a_4^2a_5$
$+3200a_1^5a_2a_3^3a_4^3a_5$	$+23300a_1^3a_2^3a_3^4a_4^3$	$+1620a_2^9a_3^2a_4a_5$
$+1350a_1^5a_2a_3^2a_4^5$	$+3640a_1^3a_2^2a_3^7a_5$	$+1500a_2^9a_3a_4^3$
$+1172a_1^5a_3^6a_5^2$	$-8800a_1^3a_2^2a_3^6a_4^2$	$-600a_2^8a_3^4a_5$
$-2060a_1^5a_3^5a_4^2a_5$	$-750a_1^3a_2a_3^8a_4$	$-3150a_2^8a_3^3a_4^2$
$+450a_1^5a_3^4a_4^4$	$+450a_1^3a_3^{10}$	$+2000a_2^7a_3^5a_4$
$-240a_1^4a_2^5a_4a_5^3$	$-162a_1^2a_2^8a_5^3$	$-400a_2^6a_3^7$

Nr. 23.

$\varphi_{0,18} = J_{18}$ = kubische Invariante von $\varphi_{4,6}$ oder $[\varphi_{2,3}, \varphi_{1,5}^2]$
oder Resultante von f und j.

Siehe die Tabelle pag. 320.

V.

Die Systeme simultaner Kovarianten

der

Formen erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung.

(In der Reihenfolge der Tabellen pag. 208, 209, 210.)

I. Simultane Kovarianten zweier Formen erster Ordnung:

$$\varphi = a_0 x + a_1 y,$$
$$\psi = b_0 x + b_1 y.$$

1. $a_0 b_1 - a_1 b_0$.
2. φ.
3. ψ.

II. Simultane Kovarianten zweier Formen zweiter Ordnung:

$$\varphi = a_0 x^2 + 2 a_1 xy + a_2 y^2,$$
$$\psi = b_0 x^2 + 2 b_1 xy + b_2 y^2.$$

1. $D = \frac{1}{4}(\varphi, \varphi)^2 = a_0 a_2 - a_1^2$.
2. $\Delta = \frac{1}{4}(\psi, \psi)^2 = b_0 b_2 - b_1^2$.
3. $\theta = \frac{1}{4}(\varphi, \psi)^2 = a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_2 b_0$.
4. φ.
5. ψ.
6. $\vartheta = \frac{1}{4}(\varphi, \psi) = (a_0 b_1 - a_1 b_0) x^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) xy + (a_1 b_2 - a_2 b_1) y^2 =$
$$= \begin{vmatrix} a_0 x + a_1 y & b_0 x + b_1 y \\ a_1 x + a_2 y & b_1 x + b_2 y \end{vmatrix}.$$

III. Simultane Kovarianten zweier Formen dritter Ordnung:

[Dabei ist zur Abkürzung $a_i b_k - a_k b_i = (ik)$ gesetzt.]

$$\varphi = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 xy^2 + a_3 y^3,$$
$$\psi = b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 y + 3 b_2 xy^2 + b_3 y^3.$$

Nr. 1.

R = Diskriminante von $\varphi = (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4 (a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2)$.

Nr. 2.

P = Diskriminante von $\psi = (b_0 b_3 - b_1 b_2)^2 - 4 (b_0 b_2 - b_1^2)(b_1 b_3 - b_2^2)$.

Nr. 3.

$$\tfrac{1}{36}(\varphi, \psi)^3 = a_0 b_3 - 3(a_1 b_2 - a_2 b_1) - a_3 b_0 = (03) - 3(12).$$

Nr. 4.

$$-\tfrac{1}{2}\theta(R) = 2(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 b_3 - 2 a_2 b_2 + a_3 b_1) + 2(a_1 a_3 - a_2^2) \cdot (a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_2 b_0) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)(a_0 b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0).$$

Nr. 5.

$$\tfrac{1}{2}(\Delta, \nabla)^2 = 2(a_0 a_2 - a_1^2)(b_1 b_3 - b_2^2) + 2(b_0 b_2 - b_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)(b_0 b_3 - b_1 b_2) = -\tfrac{1}{12}\theta^2(R) + \tfrac{1}{6}\{(03) - 3(12)\}^2.$$

Nr. 6.

$$-\tfrac{1}{12}\theta^3(R) = 2(b_0 b_2 - b_1^2)(a_1 b_3 - 2 a_2 b_2 + a_3 b_1) + 2(b_1 b_3 - b_2^2) \cdot (a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_2 b_0) - (b_0 b_3 - b_1 b_2)(a_0 b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0).$$

Nr. 7.

$$-12 \cdot \text{Kubische Invariante von } (\varphi, \psi) - \tfrac{1}{18}\{(03) - 3(12)\}^3 = 3(12)^3 + (03)^2(12) + 3(01)(13)^2 + 3(02)^2(23) - 2(01)(23)(03) - 6(01)(23)(12) - (02)(13)(03) - 3(02)(13)(12).$$

Nr. 8.

$$\tfrac{1}{12}(\Delta, \psi)^2. = \{a_3(10) + a_2(02) + a_1(21)\}x + \{a_0(23) + a_1(31) + a_2(12)\}y.$$

Nr. 9.

$$\tfrac{1}{12}(\nabla, \varphi)^2. = \{b_3(01) + b_1(12) + b_2(20)\}x + \{b_0(32) + b_2(21) + b_1(13)\}y.$$

Nr. 10.

$$\tfrac{1}{12}(\Delta, \mathsf{K})^2. = \left\{\begin{matrix} (a_0 a_2 - a_1^2)(-b_0 b_2 b_3 + 2 b_1^2 b_3 - b_1 b_2^2) \\ -(a_0 a_3 - a_1 a_2)(b_0 b_1 b_3 - 2 b_0 b_2^2 + b_1^2 b_2) \\ +(a_1 a_3 - a_2^2)(b_0^2 b_3 - 3 b_0 b_1 b_2 + 2 b_1^3) \end{matrix}\right\} x + \left\{\begin{matrix} (a_0 a_2 - a_1^2)(-b_0 b_3^2 + 3 b_1 b_2 b_3 - 2 b_2^3) \\ -(a_0 a_3 - a_1 a_2)(-b_0 b_2 b_3 + 2 b_1^2 b_3 - b_1 b_2^2) \\ +(a_1 a_3 - a_2^2)(b_1^2 b_2 + b_0 b_1 b_3 - 2 b_0 b_2^2) \end{matrix}\right\} y.$$

Nr. 11.

$$\tfrac{1}{12}(\nabla, Q)^2.$$

$$\left.\begin{matrix}(b_0b_2-b_1^2)(-a_0a_2a_3+2a_1^2a_3-a_1a_2^2)\\-(b_0b_3-b_1b_2)(a_0a_1a_3-2a_0a_2^2+a_1^2a_2)\\+(b_1b_3-b_2^2)(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)\end{matrix}\right\}x+$$

$$+\left\{\begin{matrix}(b_0b_2-b_1^2)(-a_0a_3^2+3a_1a_2a_3-2a_2^3)\\-(b_0b_3-b_1b_2)(-a_0a_2a_3+2a_1^2a_3-a_1a_2^2)\\+(b_1b_3-b_2^2)(a_1^2a_2+a_0a_1a_3-2a_0a_2^2\end{matrix}\right\}y.$$

Nr. 12.

$$\tfrac{1}{72}(\varphi, \nabla^2)^3.$$

$$\left\{\begin{matrix}a_0(b_0b_3-b_1b_2)(b_1b_3-b_2^2)-a_1[(b_0b_3+b_1b_2)^2+2(b_0b_2-b_1^2)(b_1b_3-b_2^2)]+\\+3a_2(b_0b_2-b_1^2)(b_0b_3-b_1b_2)-2a_3(b_0b_2-b_1^2)^2\end{matrix}\right\}x+$$

$$+\left\{\begin{matrix}2a_0(b_1b_3-b_2^2)^2-3a_1(b_0b_3-b_1b_3)(b_1b_3-b_2^2)+\\+a_2[(b_0b_3-b_1b_2)^2+2(b_0b_2-b_1^2)(b_1b_3-b_2^2)]-a_3(b_0b_2-b_1^2)(b_0b_3-b_1b_2)\end{matrix}\right\}y.$$

Nr. 13.

$$\tfrac{1}{72}(\psi, \Delta^2)^3.$$

$$\left\{\begin{matrix}b_0(a_0a_3-a_1a_2)(a_1a_3-a_2^2)-b_1[(a_0a_3-a_1a_2)^2+2(a_0a_2-a_1^2)(a_1a_3-a_2^2)]\\+3b_2(a_0a_2-a_1^2)(a_0a_3-a_1a_2)-2b_3(a_0a_2-a_1^2)^2\end{matrix}\right\}x+$$

$$+\left\{\begin{matrix}2b_0(a_1a_3-a_2^2)^2-3b_1(a_0a_3-a_1a_2)(a_1a_3-a_2^2)+\\+b_2[(a_0a_3-a_1a_2)^2+2(a_0a_2-a_1^2)(a_1a_3-a_2^2)]-b_3(a_0a_2-a_1^2)(a_0a_3-a_1a_2)\end{matrix}\right\}y.$$

Nr. 14.

Die reducible Form $[Q, \nabla^2]$. (Vergl. pag. 209.)

Nr. 15.

Die reducible Form $[K, \Delta^2]$. (Vergl. pag. 209.)

Nr. 16.

$\Delta =$ Hessesche Form von φ.

$$(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)xy+(a_1a_3-a_2^2)y^2.$$

Nr. 17.

$\nabla =$ Hessesche Form von ψ.

$$(b_0b_2-b_1^2)x^2+(b_0b_3-b_1b_2)xy+(b_1b_3-b_2^2)y^2.$$

Nr. 18.

$$H=\tfrac{1}{36}(\varphi, \psi)^2.$$

$$(a_0b_2-2a_1b_1+a_2b_0)x^2+(a_0b_3-a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0)xy+$$
$$+(a_1b_3-2a_2b_2+a_3b_1)y^2.$$

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Nr. 19.

$\frac{1}{2}(\Delta, \nabla)$.

x^2	$2xy$	y^2
$+ a_0a_2b_0b_3$	$+ a_0a_2b_1b_3$	$+ a_0a_3b_1b_3$
$- a_0a_2b_1b_2$	$- a_0a_2b_2^2$	$- a_0a_3b_2^2$
$- a_0a_3b_0b_2$	$- a_1^2b_1b_3$	$- a_1a_2b_1b_3$
$+ a_0a_3b_1^2$	$+ a_1^2b_2^2$	$+ a_1a_2b_2^2$
$- a_1^2b_0b_3$	$- a_1a_3b_0b_2$	$- a_1a_3b_0b_3$
$+ a_1^2b_1b_2$	$+ a_1a_3b_1^2$	$+ a_1a_3b_1b_2$
$+ a_1a_2b_0b_2$	$+ a_2^2b_0b_2$	$+ a_2^2b_0b_3$
$- a_1a_2b_1^2$	$- a_2^2b_1^2$	$- a_2^2b_1b_2$

Nr. 20.

$\frac{1}{2}(\Delta, H)$.

x^2	$2xy$	y^2
$+ a_0^2a_2b_3$	$+ a_0a_1a_2b_3$	$+ a_0a_2^2b_3$
$- a_0^2a_3b_2$	$- a_0a_1a_3b_2$	$- 2a_0a_2a_3b_2$
$- a_0a_1^2b_3$	$- a_0a_2^2b_2$	$+ a_0a_3^2b_1$
$+ 2a_0a_1a_3b_1$	$+ a_0a_2a_3b_1$	$- a_1^2a_2b_3$
$- a_0a_2^2b_1$	$- a_1^3b_3$	$+ a_1^2a_3b_2$
$+ a_1^3b_2$	$+ 2a_1^2a_2b_2$	$+ a_1a_2^2b_2$
$- a_1^2a_2b_1$	$+ a_1^2a_3b_1$	$- a_1a_3^2b_0$
$- a_1^2a_3b_0$	$- 2a_1a_2^2b_1$	$- a_2^3b_1$
$+ a_1a_2^2b_0$	$- a_1a_2a_3b_0$	$+ a_2^2a_3b_0$
	$+ a_2^3b_0$	

Nr. 21.

$\frac{1}{2}(\nabla, H)$.

x^2	$2xy$	y^2
$+a_0b_1b_2^2$	$+a_0b_2^3$	$+a_0b_2^2b_3$
$-a_0b_1^2b_3$	$-a_0b_1b_2b_3$	$-a_0b_1b_3^2$
$-a_1b_1^2b_2$	$-2a_1b_1b_2^2$	$-a_1b_2^3$
$-a_1b_0b_2^2$	$+a_1b_1^2b_3$	$+a_1b_0b_3^2$
$+2a_1b_0b_1b_3$	$+a_1b_0b_2b_3$	$+a_2b_1b_2^2$
$+a_2b_1^3$	$+2a_2b_1^2b_2$	$+a_2b_1^2b_3$
$-a_2b_0^2b_3$	$-a_2b_0b_2^2$	$-2a_2b_0b_2b_3$
$-a_3b_0b_1^2$	$-a_2b_0b_1b_3$	$-a_3b_1^2b_2$
$+a_3b_0^2b_2$	$-a_3b_1^3$	$+a_3b_0b_2^2$
	$+a_3b_0b_1b_2$	

Nr. 22.

Die Form φ.

Nr. 23.

Die Form ψ.

Nr. 24.

$Q = \frac{1}{3}(\varphi, \Delta)$.

x^3	x^2y	xy^2	y^3
$+a_0^2a_3$	$+3a_0a_1a_3$	$-3a_0a_2a_3$	$-a_0a_3^2$
$-3a_0a_1a_2$	$-6a_0a_2^2$	$+6a_1^2a_3$	$+3a_1a_2a_3$
$+2a_1^3$	$+3a_1^2a_2$	$-3a_1a_2^2$	$-2a_2^3$

Nr. 25.

$K = \frac{1}{3}(\psi, \nabla)$.

x^3	x^2y	xy^2	y^3
$+b_0^2b_3$	$+3b_0b_1b_3$	$-3b_0b_2b_3$	$-b_0b_3^2$
$-3b_0b_1b_2$	$-6b_0b_2^2$	$+6b_1^2b_3$	$+3b_1b_2b_3$
$+2b_1^3$	$+3b_1^2b_2$	$-3b_1b_2^2$	$-2b_2^3$

Nr. 26.

$\frac{1}{3}(\varphi, \nabla)$.

x^3	x^2y	xy^2	y^3
$+a_0b_0b_3$	$+2a_0b_1b_3$	$+4a_1b_1b_3$	$+2a_2b_1b_3$
$-a_0b_1b_2$	$-2a_0b_2^2$	$-4a_1b_2^2$	$-2a_2b_2^2$
$-2a_1b_0b_2$	$+a_1b_0b_3$	$-a_2b_0b_3$	$-a_3b_0b_3$
$+2a_1b_1^2$	$-a_1b_1b_2$	$+a_2b_1b_2$	$+a_3b_1b_2$
	$-4a_2b_0b_2$	$-2a_3b_0b_2$	
	$+4a_2b_1^2$	$+2a_3b_1^2$	

Nr. 27.

$\frac{1}{3}(\psi, \Delta)$.

x^3	x^2y	xy^2	y^3
$-2a_0a_2b_1$	$-4a_0a_2b_2$	$-2a_0a_2b_3$	$-a_0a_3b_3$
$+a_0a_3b_0$	$+a_0a_3b_1$	$-a_0a_3b_2$	$+a_1a_2b_3$
$+2a_1^2b_1$	$+4a_1^2b_2$	$+2a_1^2b_3$	$+2a_1a_3b_2$
$-a_1a_2b_0$	$-a_1a_2b_1$	$+a_1a_2b_2$	$-2a_2^2b_2$
	$+2a_1a_3b_0$	$+4a_1a_3b_1$	
	$-2a_2^2b_0$	$-4a_2^2b_1$	

Nr. 28.

$\frac{1}{9}(\varphi, \psi)$.

$$(01)x^4 + 2(02)x^3y + [(03) + 3(12)]x^2y^2 + 2(13)xy^3 + (23)y^4.$$

IV. Die irreduciebeln simultanen Invarianten und Kovarianten zweier Formen vierter Ordnung:

Nr. 1.

$$J_2 = J_2(\varphi) = \tfrac{1}{1152}(\varphi, \varphi)^4 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2.$$

Nr. 2.

$$J'_2 = J_2(\psi) = \tfrac{1}{1152}(\psi, \psi)^4 = b_0 b_4 - 4b_1 b_3 + 3b_2^2.$$

Nr. 3.

$$J_3 = J_3(\varphi) = \tfrac{1}{1728}(\varphi, \Delta)^4 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} =$$
$$= a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4.$$

Nr. 4.

$$J'_3 = J_3(\psi) = \tfrac{1}{1728}(\psi, \Delta')^4 = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} =$$
$$= b_0 b_2 b_4 + 2b_1 b_2 b_3 - b_2^3 - b_0 b_3^2 - b_1^2 b_4.$$

Nr. 5.

$$\tfrac{1}{96}(\Delta, \Delta')^4.$$

$$\begin{aligned} &a_0 a_4 b_0 b_4 + 2a_0 a_4 b_1 b_3 - 3a_0 a_4 b_2^2 - 6a_0 a_3 b_1 b_4 + \\ &+ 6a_0 a_3 b_2 b_3 + 6a_0 a_2 b_2 b_4 - 6a_0 a_2 b_3^2 - 6a_1^2 b_2 b_4 + 6a_1^2 b_3^2 + \\ &+ 6a_1 a_2 b_1 b_4 - 6a_1 a_2 b_2 b_3 + 2a_1 a_3 b_0 b_4 + 4a_1 a_3 b_1 b_3 - \\ &- 6a_1 a_3 b_2^2 - 6a_1 a_4 b_0 b_3 + 6a_1 a_4 b_1 b_2 - 3a_2^2 b_0 b_4 - \\ &- 6a_2^2 b_1 b_3 + 9a_2^2 b_2^2 + 6a_2 a_3 b_0 b_3 - 6a_2 a_3 b_1 b_2 + \\ &+ 6a_2 a_4 b_0 b_2 - 6a_2 a_4 b_1^2 - 6a_3^2 b_0 b_2 + 6a_3^2 b_1^2. \end{aligned}$$

Nr. 6.

$$\tfrac{1}{576}(\varphi, \psi)^4 = a_0 b_4 - 4a_1 b_3 + 6a_2 b_2 - 4a_3 b_1 + a_4 b_0.$$

Nr. 7.

$$\tfrac{1}{576}(\Delta, \psi)^4.$$

$$\begin{aligned} &a_0 a_2 b_4 - 2a_0 a_3 b_3 + a_0 a_4 b_2 - a_1^2 b_4 + 2a_1 a_2 b_3 + 2a_1 a_3 b_2 - \\ &- 2a_1 a_4 b_1 - 3a_2^2 b_2 + 2a_2 a_3 b_1 + a_2 a_4 b_0 - a_3^2 b_0. \end{aligned}$$

Nr. 8.

$\frac{1}{576}(\varphi, \Delta')^4$.

$$a_0b_2b_4 - a_0b_3^2 - 2a_1b_1b_4 + 2a_1b_2b_3 + a_2b_0b_4 + 2a_2b_1b_3 - \\ - 3a_2b_2^2 - 2a_3b_0b_3 + 2a_3b_1b_2 + a_4b_0b_2 - a_4b_1^2.$$

Nr. 9.

$\frac{1}{576}(\varphi, \psi)^3$.

x^2	xy	y^2
$+a_0b_3$	$+a_0b_4$	$+a_1b_4$
$-3a_1b_2$	$-2a_1b_3$	$-3a_2b_3$
$+3a_2b_1$	$+2a_3b_1$	$+3a_3b_2$
$-a_3b_0$	$-a_4b_0$	$-a_4b_1$

Nr. 10.

$\frac{1}{288}(\varphi, \Delta')^3$.

x^2	xy	y^2
$+a_0b_1b_4$	$+2a_0b_2b_4$	$+2a_1b_2b_4$
$-a_0b_2b_3$	$-2a_0b_3^2$	$-2a_1b_3^2$
$-a_1b_0b_4$	$-2a_1b_1b_4$	$-3a_2b_1b_4$
$-2a_1b_1b_3$	$+2a_1b_2b_3$	$+3a_2b_2b_3$
$+3a_1b_2^2$	$+2a_3b_0b_3$	$+a_3b_0b_4$
$+3a_2b_0b_3$	$-2a_3b_1b_2$	$+2a_3b_1b_3$
$-3a_2b_1b_2$	$-2a_4b_0b_2$	$-3a_3b_2^2$
$-2a_3b_0b_2$	$+2a_4b_1^2$	$-a_4b_0b_3$
$+2a_3b_1^2$		$+a_4b_1b_2$

Nr. 11.

$\frac{1}{288}(\Delta, \psi)^3$.

x^2	xy	y^2
$+2a_0a_2b_3$	$+2a_0a_2b_4$	$+a_0a_3b_4$
$-3a_0a_3b_2$	$-2a_0a_3b_3$	$-a_0a_4b_3$
$+a_0a_4b_1$	$-2a_1^2b_4$	$-a_1a_2b_4$
$-2a_1^2b_3$	$+2a_1a_2b_3$	$-2a_1a_3b_3$
$+3a_1a_2b_2$	$+2a_1a_4b_1$	$+3a_1a_4b_2$
$+2a_1a_3b_1$	$-2a_2a_3b_1$	$+3a_2^2b_3$
$-a_1a_4b_0$	$-2a_2a_4b_0$	$-3a_2a_3b_2$
$-3a_2^2b_1$	$+2a_3^2b_0$	$-2a_2a_4b_1$
$+a_2a_3b_0$		$+2a_3^2b_1$

Nr. 12.

$\frac{1}{144}(\Delta, \Delta')^3$.

x^2	xy	y^2
$+2a_0a_2b_1b_4$	$+4a_0a_2b_2b_4$	$+2a_0a_3b_2b_4$
$-2a_0a_2b_2b_3$	$-4a_0a_2b_3^2$	$-2a_0a_3b_3^2$
$+2a_0a_3b_0b_2$	$-2a_0a_3b_1b_4$	$-a_0a_4b_1b_4$
$-2a_0a_3b_1^2$	$+2a_0a_3b_2b_3$	$+a_0a_4b_2b_3$
$-a_0a_3b_0b_4$	$-4a_1^2b_2b_4$	$-2a_1a_2b_2b_4$
$-2a_0a_3b_1b_3$	$+4a_1^2b_3^2$	$+2a_1a_2b_3^2$
$+3a_0a_3b_2^2$	$+2a_1a_2b_1b_4$	$-2a_1a_3b_1b_4$
$+a_0a_4b_0b_3$	$-2a_1a_2b_2b_3$	$+2a_1a_3b_2b_3$
$-a_0a_4b_1b_2$	$+2a_1a_4b_0b_3$	$+a_1a_4b_0b_4$
$-2a_1^2b_1b_4$	$-2a_1a_4b_1b_2$	$+2a_1a_4b_1b_3$
$+2a_1^2b_2b_3$	$-2a_2a_3b_0b_3$	$-3a_1a_4b_2^2$
$+a_1a_2b_0b_4$	$+2a_2a_3b_1b_2$	$+3a_2^2b_1b_4$
$+2a_1a_2b_1b_3$	$-4a_2a_4b_0b_2$	$-3a_2^2b_2b_3$
$-3a_1a_2b_2^2$	$+4a_2a_4b_1^2$	$-a_2a_3b_0b_4$
$+2a_1a_3b_0b_3$	$+4a_3^2b_0b_2$	$-2a_2a_3b_1b_3$
$-2a_1a_3b_1b_2$	$-4a_3^2b_1^2$	$+3a_2a_3b_2^2$
$-2a_1a_4b_0b_2$		$-2a_2a_4b_0b_3$
$+2a_1a_4b_1^2$		$+2a_2a_4b_1b_2$
$-3a_2^2b_0b_3$		$+2a_3^2b_0b_3$
$+3a_2^2b_1b_2$		$-2a_3^2b_1b_2$

Nr. 13.

$\frac{1}{2880}(\Delta', t)^4 = \frac{1}{120}[\Delta', t]$.

x^2	xy	y^2
$+3a_0^2a_3b_2b_4$	$+a_0^2a_4b_2b_4$	$+a_0a_1a_4b_2b_4$
$-3a_0^2a_3b_3^2$	$-a_0^2a_4b_3^2$	$-a_0a_1a_4b_3^2$
$-a_0^2a_4b_1b_4$	$+2a_0a_1a_3b_2b_4$	$-3a_0a_2a_3b_2b_4$
$+a_0^2a_4b_2b_3$	$-2a_0a_1a_3b_3^2$	$+3a_0a_2a_3b_3^2$
$-9a_0a_1a_2b_2b_4$	$-4a_0a_1a_4b_1b_4$	$+3a_0a_3^2b_1b_4$
$+9a_0a_1a_2b_3^2$	$+4a_0a_1a_4b_2b_3$	$-3a_0a_3^2b_2b_3$
$-2a_0a_1a_3b_1b_4$	$+12a_0a_2a_3b_1b_4$	$-a_0a_3a_4b_0b_4$
$+2a_0a_1a_3b_2b_3$	$-12a_0a_2a_3b_2b_3$	$-2a_0a_3a_4b_1b_3$
$+a_0a_1a_4b_0b_4$	$-9a_0a_2^2b_2b_4$	$+3a_0a_3a_4b_2^2$
$+2a_0a_1a_4b_1b_3$	$+9a_0a_2^2b_3^2$	$+a_0a_4^2b_0b_3$
$-3a_0a_1a_4b_2^2$	$-3a_0a_3^2b_0b_4$	$-a_0a_4^2b_1b_2$
$+9a_0a_2^2b_1b_4$	$-6a_0a_3^2b_1b_3$	$+2a_1^2a_3b_2b_4$
$-9a_0a_2^2b_2b_3$	$+9a_0a_3^2b_2^2$	$-2a_1^2a_3b_3^2$
$-3a_0a_2a_3b_0b_4$	$+4a_0a_3a_4b_0b_3$	$-3a_1^2a_4b_1b_4$
$-6a_0a_2a_3b_1b_3$	$-4a_0a_3a_4b_1b_2$	$+3a_1^2a_4b_2b_3$
$+9a_0a_2a_3b_2^2$	$-a_0a_4^2b_0b_2$	$+3a_1a_2a_4b_0b_4$
$-a_0a_3a_4b_0b_2$	$+a_0a_4^2b_1^2$	$+6a_1a_2a_4b_1b_3$
$+a_0a_3a_4b_1^2$	$+6a_1^2a_3b_2b_4$	$-9a_1a_2a_4b_2^2$
$+3a_0a_3^2b_0b_3$	$-6a_1^2a_3b_3^2$	$-2a_1a_3^2b_0b_4$
$-3a_0a_3^2b_1b_2$	$-8a_1^2a_3b_1b_4$	$-4a_1a_3^2b_1b_3$
$+6a_1^3b_2b_4$	$+8a_1^2a_3b_2b_3$	$+6a_1a_3^2b_2^2$
$-6a_1^3b_3^2$	$+3a_1^2a_4b_0b_4$	$+2a_1a_3a_4b_0b_3$
$-6a_1^2a_2b_1b_4$	$+6a_1^2a_4b_1b_3$	$-2a_1a_3a_4b_1b_2$
$+6a_1^2a_2b_2b_3$	$-9a_1^2a_4b_2^2$	$-3a_1a_4^2b_0b_2$
$+2a_1^2a_3b_0b_4$	$-12a_1a_2a_4b_0b_3$	$+3a_1a_4^2b_1^2$
$+4a_1^2a_3b_1b_3$	$+12a_1a_2a_4b_1b_2$	$-9a_2^2a_4b_0b_3$
$-6a_1^2a_3b_2^2$	$+8a_1a_3^2b_0b_3$	$+9a_2^2a_4b_1b_2$
$-3a_1^2a_4b_0b_3$	$-8a_1a_3^2b_1b_2$	$+6a_2a_3^2b_0b_3$
$+3a_1^2a_4b_1b_2$	$-2a_1a_3a_4b_0b_2$	$-6a_2a_3^2b_1b_2$
$+3a_1a_2a_4b_0b_2$	$+2a_1a_3a_4b_1^2$	$+9a_2a_3a_4b_0b_2$
$-3a_1a_2a_4b_1^2$	$+9a_2^2a_4b_0b_2$	$-9a_2a_3a_4b_1^2$
$-2a_1a_3^2b_0b_2$	$-9a_2^2a_4b_1^2$	$-6a_3^3b_0b_2$
$+2a_1a_3^2b_1^2$	$-6a_2a_3^2b_0b_2$	$+6a_3^3b_1^2$
	$+6a_2a_3^2b_1^2$	

Nr. 14.

$$\tfrac{1}{2880}(\Delta, t')^4 = \tfrac{1}{120}[\Delta, t'].$$

x^2	xy	y^2
$-a_0a_2b_0b_3b_4$	$-a_0a_2b_0b_4^2$	$-3a_0a_2b_1b_4^2$
$+3a_0a_2b_1b_2b_4$	$-2a_0a_2b_1b_3b_4$	$+9a_0a_2b_2b_3b_4$
$-2a_0a_2b_1b_3^2$	$+9a_0a_2b_2^2b_4$	$-6a_0a_2b_3^3$
$+3a_0a_3b_0b_3^2$	$-6a_0a_2b_2b_3^2$	$+a_0a_3b_0b_4^2$
$-3a_0a_3b_1^2b_4$	$+4a_0a_3b_0b_3b_4$	$+2a_0a_3b_1b_3b_4$
$+a_0a_4b_0b_1b_4$	$-12a_0a_3b_1b_2b_4$	$-9a_0a_3b_2^2b_4$
$-3a_0a_4b_0b_2b_3$	$+8a_0a_3b_1b_3^2$	$+6a_0a_3b_2b_3^2$
$+2a_0a_4b_1^2b_3$	$-3a_0a_4b_0b_3^2$	$-a_0a_4b_0b_3b_4$
$+a_1^2b_0b_3b_4$	$+3a_0a_4b_1^2b_4$	$+3a_0a_4b_1b_2b_4$
$-3a_1^2b_1b_2b_4$	$+a_1^2b_0b_4^2$	$-2a_0a_4b_1b_3^2$
$+2a_1^2b_1b_3^2$	$-9a_1^2b_2^2b_4$	$+3a_1^2b_1b_4^2$
$-3a_1a_2b_0b_3^2$	$+6a_1^2b_2b_3^2$	$-9a_1^2b_2b_3b_4$
$+3a_1a_2b_1^2b_4$	$+2a_1^2b_1b_3b_4$	$+6a_1^2b_3^3$
$+2a_1a_3b_0b_1b_4$	$-4a_1a_2b_0b_3b_4$	$-a_1a_2b_0b_4^2$
$-6a_1a_3b_0b_2b_3$	$+12a_1a_2b_1b_2b_4$	$-2a_1a_2b_1b_3b_4$
$+4a_1a_3b_1^2b_3$	$-8a_1a_2b_1b_3^2$	$+9a_1a_2b_2^2b_4$
$-2a_1a_4b_0b_1b_3$	$-6a_1a_3b_0b_3^2$	$-6a_1a_2b_2b_3^2$
$-a_1a_4b_0^2b_4$	$+6a_1a_3b_1^2b_4$	$-2a_1a_3b_0b_3b_4$
$+9a_1a_4b_0b_2^2$	$-4a_1a_4b_0b_1b_4$	$+6a_1a_3b_1b_2b_4$
$-6a_1a_4b_1^2b_2$	$+12a_1a_4b_0b_2b_3$	$-4a_1a_3b_1b_3^2$
$-3a_2^2b_0b_1b_4$	$-8a_1a_4b_1^2b_3$	$+3a_1a_4b_0b_3^2$
$+9a_2^2b_0b_2b_3$	$+9a_2^2b_0b_3^2$	$-3a_1a_4b_1^2b_4$
$-6a_2^2b_1^2b_3$	$-9a_2^2b_1^2b_4$	$+3a_2^2b_0b_3b_4$
$+2a_2a_3b_0b_1b_3$	$+4a_2a_3b_0b_1b_4$	$-9a_2^2b_1b_2b_4$
$+a_2a_3b_0^2b_4$	$-12a_2a_3b_0b_2b_3$	$+6a_2^2b_1b_3^2$
$-9a_2a_3b_0b_2^2$	$+8a_2a_3b_1^2b_3$	$-3a_2a_3b_0b_3^2$
$+6a_2a_3b_1^2b_2$	$+a_2a_4b_0^2b_4$	$+3a_2a_3b_1^2b_4$
$-9a_2a_4b_0b_1b_2$	$+2a_2a_4b_0b_1b_3$	$-3a_2a_4b_0b_2b_3$
$+3a_2a_4b_0^2b_3$	$-9a_2a_4b_0b_2^2$	$+a_2a_4b_0b_1b_4$
$+6a_2a_4b_1^3$	$+6a_2a_4b_1^2b_2$	$+2a_2a_4b_1^2b_3$
$+9a_3^2b_0b_1b_2$	$-a_3^2b_0^2b_4$	$+3a_3^2b_0b_2b_3$
$-3a_3^2b_0^2b_3$	$-2a_3^2b_0b_1b_3$	$-a_3^2b_0b_1b_4$
$-6a_3^2b_1^3$	$+9a_3^2b_0b_2^2$	$-2a_3^2b_1^2b_3$
	$-6a_3^2b_1^2b_2$	

Nr. 15. $\frac{1}{120}[\varphi, t']$.

x^2	xy	y^2
$-a_0b_0b_3b_4$	$-a_0b_0b_4^2$	$-3a_0b_1b_4^2$
$+3a_0b_1b_2b_4$	$-2a_0b_1b_3b_4$	$+9a_0b_2b_3b_4$
$-2a_0b_1b_3^2$	$+9a_0b_2^2b_4$	$-6a_0b_3^3$
$+6a_1b_0b_3^2$	$-6a_0b_2b_3^2$	$+2a_1b_0b_4^2$
$-6a_1b_1^2b_4$	$+8a_1b_0b_3b_4$	$+4a_1b_1b_3b_4$
$+6a_2b_0b_1b_4$	$-24a_1b_1b_2b_4$	$-18a_1b_2^2b_4$
$-18a_2b_0b_2b_3$	$+16a_1b_1b_3^2$	$+12a_1b_2b_3^2$
$+12a_2b_1^2b_3$	$-18a_2b_0b_3^2$	$-6a_2b_0b_3b_4$
$-2a_3b_0^2b_4$	$+18a_2b_1^2b_4$	$+18a_2b_1b_2b_4$
$-4a_3b_0b_1b_3$	$-8a_3b_0b_1b_4$	$-12a_2b_1b_3^2$
$+18a_3b_0b_2^2$	$+24a_3b_0b_2b_3$	$+6a_3b_0b_3^2$
$-12a_3b_1^2b_2$	$-16a_3b_1^2b_3$	$-6a_3b_1^2b_4$
$+3a_4b_0^2b_3$	$+a_4b_0^2b_4$	$+a_4b_0b_1b_4$
$-9a_4b_0b_1b_2$	$+2a_4b_0b_1b_3$	$-3a_4b_0b_2b_3$
$+6a_4b_1^3$	$-9a_4b_0b_2^2$	$+2a_4b_1^2b_3$
	$+6a_4b_1^2b_2$	

Nr. 16. $\frac{1}{120}[\psi, t]$.

x^2	xy	y^2
$+3a_0^2a_3b_4$	$+a_0^2a_4b_4$	$+a_0a_1a_4b_4$
$-2a_0^2a_4b_3$	$+2a_0a_1a_3b_4$	$-3a_0a_2a_3b_4$
$-9a_0a_1a_2b_4$	$-8a_0a_1a_4b_3$	$+6a_0a_3^2b_3$
$-4a_0a_1a_3b_3$	$-9a_0a_2^2b_4$	$-6a_0a_3a_4b_2$
$+6a_0a_1a_4b_2$	$+24a_0a_2a_3b_3$	$+2a_0a_4^2b_1$
$+18a_0a_2^2b_3$	$-18a_0a_3^2b_2$	$+2a_1^2a_3b_4$
$-18a_0a_2a_3b_2$	$+8a_0a_3a_4b_1$	$-6a_1^2a_4b_3$
$+6a_0a_3^2b_1$	$-a_0a_4^2b_0$	$+18a_1a_2a_4b_2$
$-a_0a_3a_4b_0$	$+6a_1^2a_2b_4$	$+4a_1a_3a_4b_1$
$+6a_1^3b_4$	$-16a_1^2a_3b_3$	$-12a_1a_3^2b_2$
$-12a_1^2a_2b_3$	$+18a_1^2a_4b_2$	$-3a_1a_4^2b_0$
$+12a_1^2a_3b_2$	$-24a_1a_2a_4b_1$	$-18a_2^2a_4b_1$
$-6a_1^2a_4b_1$	$-2a_1a_3a_4b_0$	$+12a_2a_3^2b_1$
$+3a_1a_2a_4b_0$	$+16a_1a_3^2b_1$	$+9a_2a_3a_4b_0$
$-2a_1a_3^2b_0$	$+9a_0^2a_4b_0$	$-6a_3^3b_0$
	$-6a_2a_3^2b_0$	

Nr. 17.

φ.

$$\varphi = a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4.$$

Nr. 18.

ψ.

$$\psi = b_0x^4 + 4b_1x^3y + 6b_2x^2y^2 + 4b_3xy^3 + b_4y^4.$$

Nr. 19.

Δ.

$$\Delta = (a_0a_2 - a_1^2)x^4 + 2(a_0a_3 - a_1a_2)x^3y + (a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2)x^2y^2 + \\ + 2(a_1a_4 - a_2a_3)xy^3 + (a_2a_4 - a_3^2)y^4.$$

Nr. 20.

Δ'.

$$\Delta' = (b_0b_2 - b_1^2)x^4 + 2(b_0b_3 - b_1b_2)x^3y + (b_0b_4 + 2b_1b_3 - 3b_2^2)x^2y^2 + \\ + 2(b_1b_4 - b_2b_3)xy^3 + (b_2b_4 - b_3^2)y^4.$$

Nr. 21.

$\frac{1}{144}(\varphi, \psi)^2$.

x^4	x^3y	x^2y^2	xy^3	y^4
$+ a_0b_2$	$+ 2a_0b_3$	$+ a_0b_4$	$+ 2a_1b_4$	$+ a_2b_4$
$- 2a_1b_1$	$- 2a_1b_2$	$+ 2a_1b_3$	$- 2a_2b_3$	$- 2a_3b_3$
$+ a_2b_0$	$- 2a_2b_1$	$- 6a_2b_2$	$- 2a_3b_2$	$+ a_4b_2$
	$+ 2a_3b_0$	$+ 2a_3b_1$	$+ 2a_4b_1$	
		$+ a_4b_0$		

Nr. 22.

$\frac{1}{24}(\varphi, \Delta')^2$.

x^4	x^3y	x^2y^2	xy^3	y^4
$+ a_0b_0b_4$	$+ 6a_0b_1b_4$	$+ 6a_0b_2b_4$	$+ 12a_1b_2b_4$	$+ 6a_2b_2b_4$
$+ 2a_0b_1b_3$	$- 6a_0b_2b_3$	$- 6a_0b_3^2$	$- 12a_1b_3^2$	$- 6a_2b_3^2$
$- 3a_0b_2^2$	$- 2a_1b_0b_4$	$+ 6a_1b_1b_4$	$- 6a_2b_1b_4$	$- 6a_3b_1b_4$
$- 6a_1b_0b_3$	$- 4a_1b_1b_3$	$- 6a_1b_2b_3$	$+ 6a_2b_2b_3$	$+ 6a_3b_2b_3$
$+ 6a_1b_1b_2$	$+ 6a_1b_2^2$	$- 6a_2b_0b_4$	$- 2a_3b_0b_4$	$+ a_4b_0b_4$
$+ 6a_2b_0b_2$	$- 6a_2b_0b_3$	$- 12a_2b_1b_3$	$- 4a_3b_1b_3$	$+ 2a_4b_1b_3$
$- 6a_2b_1^2$	$+ 6a_2b_1b_2$	$+ 18a_2b_2^2$	$+ 6a_3b_2^2$	$- 3a_4b_2^2$
	$+ 12a_3b_0b_2$	$+ 6a_3b_0b_3$	$+ 6a_3b_0b_3$	
	$- 12a_3b_1^2$	$- 6a_3b_1b_2$	$- 6a_4b_1b_2$	
		$+ 6a_4b_0b_2$		
		$- 6a_4b_1^2$		

Nr. 23. $\frac{1}{24}(\psi, \Delta)^2$.

x^4	x^3y	x^2y^2	xy^3	y^4
$+6a_0a_2b_2$	$+12a_0a_2b_3$	$+6a_0a_2b_4$	$+6a_0a_3b_4$	$+a_0a_4b_4$
$-6a_0a_3b_1$	$-6a_0a_3b_2$	$+6a_0a_3b_3$	$-2a_0a_4b_3$	$+2a_1a_3b_4$
$+a_0a_4b_0$	$-2a_0a_4b_1$	$-6a_0a_4b_2$	$-6a_1a_2b_4$	$-6a_1a_4b_3$
$-6a_1^2b_2$	$-12a_1^2b_3$	$-6a_1^2b_4$	$-4a_1a_3b_3$	$-3a_2^2b_4$
$+6a_1a_2b_1$	$+6a_1a_2b_2$	$-6a_1a_2b_3$	$-6a_1a_4b_2$	$+6a_2a_3b_3$
$+2a_1a_3b_0$	$-4a_1a_3b_1$	$-12a_1a_3b_2$	$+6a_2^2b_3$	$+6a_2a_4b_2$
$-3a_2^2b_0$	$+6a_1a_4b_0$	$+6a_1a_4b_1$	$+6a_2a_3b_2$	$-6a_3^2b_2$
	$+6a_2^2b_1$	$+18a_2^2b_2$	$+12a_2a_4b_1$	
	$-6a_2a_3b_0$	$-6a_2a_3b_1$	$-12a_3^2b_1$	
		$+6a_2a_4b_0$		
		$-6a_3^2b_0$		

Nr. 24. $\frac{1}{24}(\Delta, \Delta')^2 = \frac{1}{2}\{J_2\Delta' + J'_2\Delta + \psi\,.\,(\text{Nr. 7}) + \varphi\,.\,(\text{Nr. 8}) - (\text{Nr. 6})\,(\text{Nr. 21}) + (\text{Nr. 9})^2\}$.

x^4	x^3y	x^2y^2	xy^3	y^4
$+a_0a_2b_0b_4$	$+6a_0a_2b_1b_4$	$+6a_0a_2b_2b_4$	$+6a_0a_3b_2b_4$	$+a_0a_4b_2b_4$
$+2a_0a_2b_1b_3$	$-6a_0a_2b_2b_3$	$-6a_0a_2b_3^2$	$-6a_0a_3b_3^2$	$-a_0a_4b_3^2$
$-3a_0a_2b_2^2$	$-a_0a_3b_0b_4$	$+3a_0a_3b_1b_4$	$-a_0a_4b_1b_4$	$+2a_1a_3b_2b_4$
$-3a_0a_3b_0b_3$	$-2a_0a_3b_1b_3$	$-3a_0a_3b_2b_3$	$+a_0a_4b_2b_3$	$-2a_1a_3b_3^2$
$+3a_0a_3b_1b_2$	$+3a_0a_3b_2^2$	$-a_0a_4b_0b_4$	$-6a_1a_2b_2b_4$	$-3a_1a_4b_1b_4$
$+a_0a_4b_0b_2$	$-a_0a_4b_0b_3$	$-2a_0a_4b_1b_3$	$+6a_1a_2b_3^2$	$+3a_1a_4b_2b_3$
$-a_0a_4b_1^2$	$+a_0a_4b_1b_2$	$+3a_0a_4b_2^2$	$-2a_1a_3b_1b_4$	$-3a_2^2b_2b_4$
$-a_1^2b_0b_4$	$-6a_1^2b_1b_4$	$-6a_1^2b_2b_4$	$+2a_1a_3b_2b_3$	$+3a_2^2b_3^2$
$-2a_1^2b_1b_3$	$+6a_1^2b_2b_3$	$+6a_1^2b_3^2$	$-a_1a_4b_0b_4$	$+3a_2a_3b_1b_4$
$+3a_1^2b_2^2$	$+a_1a_2b_0b_4$	$-3a_1a_2b_1b_4$	$-2a_1a_4b_1b_3$	$-3a_2a_3b_2b_3$
$+3a_1a_2b_0b_3$	$+2a_1a_2b_1b_3$	$+3a_1a_2b_2b_3$	$+3a_1a_4b_2^2$	$+a_2a_4b_0b_4$
$-3a_1a_2b_1b_2$	$-3a_1a_2b_2^2$	$-2a_1a_3b_0b_4$	$+3a_2^2b_1b_4$	$+2a_2a_4b_1b_3$
$+2a_1a_3b_0b_2$	$-2a_1a_3b_0b_3$	$-4a_1a_3b_1b_3$	$-3a_2^2b_2b_3$	$-3a_2a_4b_2^2$
$-2a_1a_3b_1^2$	$+2a_1a_3b_1b_2$	$+6a_1a_3b_2^2$	$+a_2a_3b_0b_4$	$-a_3^2b_0b_4$
$-3a_2^2b_0b_2$	$+6a_1a_4b_0b_2$	$+3a_1a_4b_0b_3$	$+2a_2a_3b_1b_3$	$-2a_3^2b_1b_3$
$+3a_2^2b_1^2$	$-6a_1a_4b_1^2$	$-3a_1a_4b_1b_2$	$-3a_2a_3b_2^2$	$+3a_3^2b_2^2$
	$+3a_2^2b_0b_3$	$+3a_2^2b_0b_4$	$+6a_2a_4b_0b_3$	
	$-3a_2^2b_1b_2$	$+6a_2^2b_1b_3$	$-6a_2a_4b_1b_2$	
	$-6a_2a_3b_0b_2$	$-9a_2^2b_2^2$	$-6a_3^2b_0b_3$	
	$+6a_2a_3b_1^2$	$-3a_2a_3b_0b_3$	$+6a_3^2b_1b_2$	
		$+3a_2a_3b_1b_2$		
		$+6a_2a_4b_0b_2$		
		$-6a_2a_4b_1^2$		
		$-6a_3^2b_0b_2$		
		$+6a_3^2b_1^2$		

Nr. 25.

$\frac{1}{8}(\varphi, \Delta) = t.$

x^6	x^5y	x^4y^2	x^3y^3	x^2y^4	xy^5	y^6
$+a_0^2a_3$ $-3a_0a_1a_2$ $+2a_1^3$	$+a_0^2a_4$ $+2a_0a_1a_3$ $-9a_0a_2^2$ $+6a_1^2a_2$	$+5a_0a_1a_4$ $-15a_0a_2a_3$ $+10a_1^2a_3$	$-10a_0a_3^2$ $+10a_1^2a_4$	$-5a_0a_3a_4$ $+15a_1a_2a_4$ $-10a_1a_3^2$	$-a_0a_4^2$ $-2a_1a_3a_4$ $+9a_2^2a_4$ $-6a_2a_3^2$	$-a_1a_4^2$ $+3a_2a_3a_4$ $-2a_3^3$

Nr. 26.

$\frac{1}{8}(\psi, \Delta') = t'.$

x^6	x^5y	x^4y^2	x^3y^3	x^2y^4	xy^5	y^6
$+b_0^2b_3$ $-3b_0b_1b_2$ $+2b_1^3$	$+b_0^2b_4$ $+2b_0b_1b_3$ $-9b_0b_2^2$ $+6b_1^2b_2$	$+5b_0b_1b_4$ $-15b_0b_2b_3$ $+10b_1^2b_3$	$-10b_0b_3^2$ $+10b_1^2b_4$	$-5b_0b_3b_4$ $+15b_1b_2b_4$ $-10b_1b_3^2$	$-b_0b_4^2$ $-2b_1b_3b_4$ $+9b_2^2b_4$ $-6b_2b_3^2$	$-b_1b_4^2$ $+3b_2b_3b_4$ $-2b_3^3$

Nr. 27.

$\frac{1}{8}(\varphi, \Delta')$.

x^6	x^5y	x^4y^2	x^3y^3	x^2y^4	xy^5	y^6
$+a_0b_0b_3$ $-a_0b_1b_2$ $-2a_1b_0b_2$ $+2a_1b_1^2$	$+a_0b_0b_4$ $+2a_0b_1b_3$ $-3a_0b_2^2$ $-6a_2b_0b_2$ $+6a_2b_1^2$	$+3a_0b_1b_4$ $-3a_0b_2b_3$ $+2a_1b_0b_4$ $+4a_1b_1b_3$ $-6a_1b_2^2$ $-6a_2b_0b_3$ $+6a_2b_1b_2$ $-6a_3b_0b_2$ $+6a_3b_1^2$	$+2a_0b_2b_4$ $-2a_0b_3^2$ $+8a_1b_1b_4$ $-8a_1b_2b_3$ $-8a_3b_0b_3$ $+8a_3b_1b_2$ $-2a_4b_0b_2$ $+2a_4b_1^2$	$+6a_1b_2b_4$ $-6a_1b_3^2$ $+6a_2b_1b_4$ $-6a_2b_2b_3$ $-2a_3b_0b_4$ $-4a_3b_1b_3$ $+6a_3b_2^2$ $-3a_4b_0b_3$ $+3a_4b_1b_2$	$+6a_2b_2b_4$ $-6a_2b_3^2$ $-a_4b_0b_4$ $-2a_4b_1b_3$ $+3a_4b_2^2$	$+2a_3b_2b_4$ $-2a_3b_3^2$ $-a_4b_1b_4$ $+a_4b_2b_3$

Nr. 28.

$\frac{1}{8}(\psi, \Delta)$.

x^6	x^5y	x^4y^2	x^3y^3	x^2y^4	xy^5	y^6
$-2a_0a_2b_1$	$-6a_0a_2b_2$	$-6a_0a_2b_3$	$-2a_0a_2b_4$	$-3a_0a_3b_4$	$-a_0a_4b_4$	$-a_1a_4b_4$
$+a_0a_3b_0$	$+a_0a_4b_0$	$-6a_0a_3b_2$	$-8a_0a_3b_3$	$-2a_0a_4b_3$	$-2a_1a_3b_4$	$+a_2a_3b_4$
$+2a_1^2b_1$	$+6a_1^2b_2$	$+2a_0a_4b_1$	$+2a_1^2b_4$	$+3a_1a_2b_4$	$+3a_2^2b_4$	$+2a_2a_4b_3$
$-a_1a_2b_0$	$+2a_1a_3b_0$	$+6a_1^2b_3$	$+8a_1a_2b_3$	$-4a_1a_3b_3$	$+6a_2a_4b_2$	$-2a_3^2b_3$
	$-3a_2^2b_0$	$+6a_1a_2b_2$	$+8a_1a_4b_1$	$+6a_1a_4b_2$	$-6a_2^2b_2$	
		$+4a_1a_3b_1$	$-8a_2a_3b_1$	$+6a_2^2b_3$		
		$+3a_1a_4b_0$	$+2a_2a_4b_0$	$-6a_2a_3b_2$		
		$-6a_2^2b_1$	$-2a_3^2b_0$	$+6a_2a_4b_1$		
		$-3a_2a_3b_0$		$-6a_3^2b_1$		

Nr. 29.

$\frac{1}{16}(\varphi, \psi)$.

x^6	x^5y	x^4y^2	x^3y^3	x^2y^4	xy^5	y^6
$+a_0b_1$	$+3a_0b_2$	$+3a_0b_3$	$+a_0b_4$	$+3a_1b_4$	$+3a_2b_4$	$+a_3b_4$
$-a_1b_0$	$-3a_2b_0$	$+6a_1b_2$	$+8a_1b_3$	$+6a_2b_3$	$-3a_4b_2$	$-a_4b_3$
		$-6a_2b_1$	$-8a_3b_1$	$-6a_3b_2$		
		$-3a_3b_0$	$-a_4b_0$	$-3a_4b_1$		

Nr. 30.

$\frac{1}{8}(\Delta, \Delta') = \frac{1}{6}\{\varphi \cdot (\text{Nr. } 10) + \psi \cdot (\text{Nr. } 11) - (\text{Nr. } 6)(\text{Nr. } 29) + (\text{Nr. } 9)(\text{Nr. } 21)\}$.

x^6	x^5y	x^4y^2	x^3y^3	x^2y^4	xy^5	y^6
$+a_0a_2b_0b_3$	$+a_0a_2b_0b_4$	$+3a_0a_2b_1b_4$	$+2a_0a_2b_2b_4$	$+3a_0a_3b_2b_4$	$+a_0a_4b_2b_4$	$+a_1a_4b_2b_4$
$-a_0a_2b_1b_2$	$+2a_0a_2b_1b_3$	$-3a_0a_2b_2b_3$	$-2a_0a_2b_3^2$	$-3a_0a_3b_3^2$	$-a_0a_4b_3^2$	$-a_1a_4b_3^2$
$-a_0a_3b_0b_2$	$-3a_0a_2b_2^2$	$+a_0a_3b_0b_4$	$+4a_0a_3b_1b_4$	$+a_0a_4b_1b_4$	$+2a_1a_3b_2b_4$	$-a_2a_3b_2b_4$
$+a_0a_3b_1^2$	$-a_0a_4b_0b_2$	$+2a_0a_3b_1b_3$	$-4a_0a_3b_2b_3$	$-a_0a_4b_2b_3$	$-2a_1a_3b_3^2$	$+a_2a_3b_3^2$
$-a_1^2b_0b_3$	$+a_0a_4b_1^2$	$-3a_0a_3b_2^2$	$-2a_1^2b_2b_4$	$-3a_1a_2b_2b_4$	$-3a_2^2b_2b_4$	$+a_2a_4b_2b_3$
$+a_1^2b_1b_2$	$-a_1^2b_0b_4$	$-a_0a_4b_0b_3$	$+2a_1^2b_3^2$	$+3a_1a_2b_3^2$	$+3a_2^2b_3^2$	$-a_2a_4b_1b_4$
$+a_1a_2b_0b_2$	$-2a_1^2b_1b_3$	$+a_0a_4b_1b_2$	$-4a_1a_2b_1b_4$	$+2a_1a_3b_1b_4$	$+3a_2a_4b_2^2$	$-a_3^2b_2b_3$
$-a_1a_2b_1^2$	$+3a_1^2b_2^2$	$-3a_1^2b_1b_4$	$+4a_1a_2b_2b_3$	$-2a_1a_3b_2b_3$	$-2a_2a_4b_1b_3$	$+a_3^2b_1b_4$
	$-2a_1a_3b_0b_2$	$+3a_1^2b_2b_3$	$-4a_1a_4b_0b_3$	$+3a_1a_4b_2^2$	$-a_2a_4b_0b_4$	
	$+2a_1a_3b_1^2$	$-a_1a_2b_0b_4$	$+4a_1a_4b_1b_2$	$-2a_1a_4b_1b_3$	$-3a_3^2b_2^2$	
	$+3a_2^2b_0b_2$	$-2a_1a_2b_1b_3$	$+4a_2a_3b_0b_3$	$-a_1a_4b_0b_4$	$+2a_3^2b_1b_3$	
	$-3a_2^2b_1^2$	$+3a_1a_2b_2^2$	$-4a_2a_3b_1b_2$	$-3a_2^2b_1b_4$	$+a_3^2b_0b_4$	
		$-2a_1a_3b_0b_3$	$-2a_2a_4b_0b_2$	$+3a_2^2b_2b_3$		
		$+2a_1a_3b_1b_2$	$+2a_2a_4b_1^2$	$-3a_2a_3b_2^2$		
		$-3a_1a_4b_0b_2$	$+2a_3^2b_0b_2$	$+2a_2a_3b_1b_3$		
		$+3a_1a_4b_1^2$	$-2a_3^2b_1^2$	$+a_2a_3b_0b_4$		
		$+3a_2^2b_0b_3$		$+3a_2a_4b_1b_2$		
		$-3a_2^2b_1b_2$		$-3a_2a_4b_0b_3$		
		$+3a_2a_3b_0b_2$		$-3a_3^2b_1b_2$		
		$-3a_2a_3b_1^2$		$+3a_3^2b_0b_3$		

Verzeichnis der Arbeiten,

die sich auf die in diesem Buche behandelten einleitenden Materien und auf die Theorie der binären Formen beziehen.

I. Verzeichnis der Arbeiten, die sich auf die Theorie der symmetrischen Funktionen beziehen.

In Betracht kommen nächst Newton:

1. Waring, Misc. analyt. 1762 (zu Anfang) und Medit. algebr. 1770, pag. 225.
2. Vandermonde, Hist. de l'Acad. de Paris 1771.
3. Lacroix, Compl. d'algèbre 1800 giebt guten Bericht über das bis dahin in dieser Materie Geleistete.
4. Meier Hirsch, 1809, der zuerst Tabellen publiziert hat.

*5. Die ersten strengen Beweise hat Gauss gegeben 1816: Demonstratio nova altera. Werke 3. Bd.

6. Cauchy, Exerc. de Math. 1826.

Von neueren Arbeiten sind zu erwähnen:

*7. Cayley, Phil. Mag. 1853.

*8. Sylvester, On Mr. Cayley's impromptu demonstration of the rule for determining at sight the degree of any symmetrical function of the roots of an equation expressed in terms of the coefficients. Phil. Mag. 1853.

9. Brioschi, Sulle funzioni simmetriche delle radici di un' equazione. Annali di Tortolini, Bd. 5, 1854.

10. Faà di Bruno, Sulle funzione simmetriche delle radici di un' equazione. Annali di Tortolini 1855; sowie eine weitere Note in demselben Band: Sulla determinazione d'una funzione simmetrica delle radici di un' equazione. Ferner: Comptes rendus Bd. 76, 1873. Sur les fonctions symétriques.

*11. Borchardt, Bestimmung der symmetrischen Verbindungen vermittelst ihrer erzeugenden Funktion. Crelle Journal 53, pag. 193. Dazu Note von Betti, Crelle Journal 54. Entwicklungen hierzu in neuester Zeit von Kostka, Crelle Journal 81 nnd 82.

*12. Cayley, On the symmetric functions of the roots of an equation (mit Tafeln). Philosophical Transactions Bd. 147, 1857.

13. Roberts, On some symmetric functions of the roots of algebraic equations. Quarterly Journal Bd. 4, 1861.

II. Verzeichnis der Arbeiten, die sich auf die Theorie der Elimination beziehen.

Ausser den älteren Arbeiten:

Euler, 1748, Mém. de l'Académie de Berlin, mittelst der symmetrischen Funktionen; 1764, Mém. de l'Académie de Berlin, Zurückführung auf lineare Gleichungen;

Bézout, 1764, Mém. de l'Académie de Paris, Zurückführung auf lineare Gleichungen und Bestimmung des Grades der Resultante;

Lagrange, 1770, Mém. de l'Académie de Berlin, Bedingungen für mehrere gemeinsame Wurzeln;

*Jacobi, De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis. Crelle Journal 15 (1835);

von neueren Arbeiten:

*1. Sylvester, On elimination. Philos. Magazine 1841. (Dialytische Methode.)

*2. Hesse, Über die Bildung der Endgleichung, welche durch Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen hervorgeht, und die Bestimmung ihres Grades. Crelle Journal 27 (1843).

*2a. Hesse, Über die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Variabeln. Crelle Journal Bd. 28 (1844).

3. Sylvester, On elimination and transformation. Cambridge and Dublin mathemat. Journal. Bd. 5, 8, 1851, 1853. Fall mehrerer gemeinsamer Wurzeln.

3a. Sylvester, Extension of the dialytic method of elimination. Philos. Magazine 1851.

3b. Sylvester, Über Diskriminanten. Cambridge and Dublin mathemat. Journal 6, 1851. Über den gemeinsamen Faktor. Philos. Transact. 1853.

4. Schläfli, Über die Resultante u. s. w. Abhandlungen der Wiener Akademie. Bd. 4. 1852.

*5. Cayley, Sur la méthode d'élimination de Bézout. Crelle Journal 53 (1856) und Philos. Transact. 1857 und 1868.

6. Brioschi, Sur une nouvelle propriété du Résultant de deux équations algébriques. Crelle Journal 53 (1856). Note hierzu von Faà di Bruno, Crelle Journal 54. Vergl. § 25 des vorliegenden Buches.

*7. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig bei Hirzel. 1857. Vierte Auflage. 1875.

8. Faà di Bruno, Théorie générale de l'élimination. Paris, chez Gauthier Villars.

9. Gordan, Über den grössten gemeinsamen Faktor. Math. Annalen, Bd. 7 (1873).

10. Darboux, Lemonnier, Mansion. Bezüglich im Bull. de la société mathém. et astronom. 10 und 12 (1876 und 1877); Annales de l'École Normale supér. Bd. 7 (1878); Académie Royale de Belgique, Bull. von 1878 und 1879: Beweise für die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für mehrere gemeinsame Wurzeln. Vergl. § 5 dieses Buches.

III. Verzeichnis der Arbeiten, die sich auf die Theorie der binären Formen beziehen.

*1. Boole, Exposition of a general theory of linear transformations. Cambridge mathemat. Journal (old series). Bd. 3, 1841. Diskriminanten als Invarianten; Invarianten zweier Formen.

*2. Cayley, On linear transformations. Cambridge mathemat. Journal (old series), Bd. 4, 1844. Invariante J_2 der biquadratischen Form.

3. Boole, On linear transformations. Ibid. Bd. 4, 1844. Invariante J_3 und Diskriminante der biquadratischen Form.

*4. Cayley, Mémoire sur les hyperdéterminants. Crelle Journal 30 (1845). Symbolische Methode. Dazu Noten in Crelle Journal 34 und 42.

4a. Cayley, Cambridge and Dublin mathemat. Journal Bd. 1 (1846).

*5. Hesse, Zunächst die wichtige Abhandlung: Über die Elimination der Variabeln u. s. w., Crelle Journal 28 (1844), in welcher die sogenannte Hessesche Determinante auftritt. Ferner von demselben:

5a. Transformation einer beliebigen homogenen Funktion dritten Grades von zwei Variabeln, durch lineare Substitution neuer Variabeln, in eine Form, welche nur die dritten Potenzen der neuen Variabeln enthält. Crelle Journal 38 und:

5b. Transformation einer beliebig gegebenen homogenen Funktion vierten Grades von zwei Variabeln durch lineare Substitution neuer Variabeln, in die Form, welche nur die geraden Potenzen der neuen Variabeln enthält. Crelle Journal 41.

6. Aronhold, Zur Theorie der homogenen Funktionen dritten Grades von drei Veränderlichen. Crelle Journal Bd. 39 (1849). Die beiden Invarianten dieser Formen.

*7. Sylvester, On the calculus of forms, otherwise the theory of invariants. Cambridge and Dublin mathemat. Journal Bd. 6 bis 9 (1851—1854). Prozesse der Invariantenbildung enthaltend.

*8. Sylvester, On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants. Philos. Magazine 1851; auch selbständig erschienen unter dem Titel: Essay on canonical forms, London 1851; ferner Philos. Transact. 1864.

9. Cayley, Recherches sur les covariants. Crelle Journal Bd. 47. (Partielle Differentialgleichungen.)

*10. Hermite, Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Cambridge and Dublin mathemat. Journal Bd. 9, 1854. (Reciprocitätsgesetz und kanonische Form für die Form fünfter Ordnung.) Ferner in Crelle Journal 52.

**11. Cayley, Zehn Memoirs upon Quantics in den Philos. Transact. Von 1854 an bis 1861 erschienen sieben Memoirs, nämlich: a) Introductory Memoir, Bd. 144 (1854); b) Second Memoir, Bd. 146 (1856); c) Third Memoir, Bd. 146 (1856); d) Fourth Memoir, Bd. 148 (1858); e) Fifth Memoir, Bd. 148 (1858); f) Sixth Memoir, Bd. 149 (1859); g) Seventh Memoir, Bd. 151 (1861); das achte Memoir erschien 1867 (Bd. 157), das neunte 1871 (Bd. 161), das zehnte 1878 (Bd. 169). Die Cayleyschen Memoirs umfassen im wesentlichen die ganze Theorie der Invarianten und Kovarianten. Besonders das zweite Memoir (1856), das von der Definition durch partielle Differentialgleichungen ausgeht und die Abzählungen mit Hilfe der „erzeugenden Funktion“ giebt, ist die Grundlage der neuesten Arbeiten von Sylvester (siehe unten) und des neunten und zehnten Memoirs von Cayley geworden. Die niedrigsten binären Formen sind besonders im vierten und fünften Memoir behandelt, die geometrischen Anwendungen im sechsten Memoir.

Daran anschliessend:

12. Salmon, Exercises in the hyperdeterminant Calculus. Cambridge and Dublin mathemat. Journal Bd. 9 (1854).

13. Brioschi, Sulla teorica degli invarianti. Annali di Tortolini, Bd. 5 (1854). (Partielle Differentialgleichungen für die Invarianten als Funktionen der Wurzeln).

13ª. Brioschi, Ricerche sulle forme binarie. Ibid. Bd. 7 (1856) und weitere Arbeiten in demselben Bande über Diskriminante, Reciprocitätsprincip u. s. w.; auch in Crelle Journal 53.

*13ᵇ. Brioschi, Monografia dei Covarianti. Annali di Matematica Bd. 1, 2, 4 (1858—1860). Ferner Arbeiten von Combescure, Liouville Journal Bd. 20 (1855), Faà di Bruno, Annali di Tortolini (1855), Quarterly Journal Bd. 1 (1857): Über die Form fünfter Ordnung; Betti, Über kanonische Formen, Kovarianten, Kombinanten. Annali di Tortolini Bd. 7 (1856), Annali di Matematica 1. Ser. Bd. 1 (1858).

14. Cayley, Researches on the partition of numbers in Quarterly Journal 1855, auf das zweite seiner Memoirs bezüglich; ferner in Philos. Transact. Bd. 146 (1856) und Bd. 148 (1858). Dazu Sylvester in Quarterly Journal 1855; Brioschi und Sylvester in Annali di Tortolini Bd. 8 (1857); Bellavitis in Annali di Matematica Bd. 2 (1859); neuerdings Faà di Bruno in Crelle Journal 85 und Mathem. Annalen 14.

15. Aronhold, Bemerkung über die Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Crelle Journal Bd. 52.

*16. Cayley, Forme canonique des fonctions binaires. Crelle Journal 54 (1857). An Sylvester (vergl. Nr. *8) anschliessend.

*17. Aronhold, Theorie der homogenen Funktionen dritten Grades von drei Veränderlichen. Crelle Journal 55.

18. Salmon, Lessons introductory to the modern higher algebra. Dublin 1859. Dritte Auflage 1876. Deutsch bearbeitet unter dem Titel: Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen von Fiedler, Leipzig 1863. Dazu Fiedler, Theorie der binären Formen, Leipzig 1862.

19. Hermite, Sur l'invariant du dix-huitième degré des formes du cinquième degré etc. Crelle Journal 59.

20. Roberts, M., Sur les covariants des formes binaires du cinquième degré. Annali di Matematica Bd. 3 (1861).

20ª. Roberts, M., On the covariants of a binary quantic of the nth degree. Quarterly Journal Bd. 4 (1861). (Definition der Kovariante durch ihr erstes Glied.)

*21. Clebsch, Über eine symbolische Darstellung algebraischer Formen. Crelle Journal Bd. 59 (1861). In der symbolischen Darstellung an Aronhold, Crelle Journal 55 (vergl. *17) anschliessend und dieselbe zur Definition der Invarianten benutzend.

22. Aronhold, Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie. Crelle Journal Bd. 62. Dazu:

22ª. Clebsch, Über die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. Crelle Journaal 65.

Christoffel, Beweis des Fundamentalsatzes der Invariantentheorie. Crelle Journal Bd. 68.

Aronhold, Crelle Journal 69.

Gram, Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'algèbre moderne. Math. Annalen Bd. 7 (1873).

Veltmann, Beitrag zu den Grundlagen der Invariantentheorie. Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 22.

23. Clebsch, Elimination aus zwei Gleichungen dritten Grades. Crelle Journal Bd. 64 (1864).
23ª. Clebsch, Simultane binäre kubische Formen. Crelle Journal 67.
23ᵇ. Clebsch, Zur Theorie der binären Formen vierten Grades. Crelle Journal 67.
23ᶜ. Clebsch, Simultanes Formensystem einer quadratischen und einer kubischen binären Form. Crelle Journal 68 (1867).
24. Clebsch und Gordan, Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie. Annali di Matematica Ser. 2, Bd. 1 (1867).

An diese Arbeit von Clebsch und Gordan anschliessend:

24ª. Bessel, Über die Invarianten der einfachsten Systeme simultaner binärer Formen. Math. Annalen Bd. 1 (1869).
Harbordt, Simultanes System einer biquadratischen und einer quadratischen binären Form. Math. Annalen Bd. 1.
*25. Gordan, Das System der Kovarianten und Invarianten binärer Formen etc. Crelle Journal 69. (Beweis der Endlichkeit des Systems.)
26. Clebsch, Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreiteilung der hyperelliptischen Funktionen. Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften XIV (1869). Übersetzung mit Anmerkungen Brioschis in den Annali di Matematica; Auszug in den Math. Annalen Bd. 2.
27. Gordan, Über die Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen. Crelle Journal 71.
28. Clebsch, Über die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen. Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften XV, 1870.
29. Clebsch, Über die Möglichkeit, zwei gegebene binäre Formen linear in einander zu transformieren. Math. Annalen 2.
30. Gordan, Die simultanen Systeme binärer Formen. Math. Annalen 2.
31. Clebsch, Über die Bedeutung einer simultanen Invariante einer binären quadratischen und einer binären biquadratischen Form. Math. Annalen 3. Zur Theorie der binären algebraischen Formen. Ibid. 3.
32. Cayley, Zwei Noten in den Math. Annalen 3 und 4.
33. Gundelfinger, Bemerkung zur Auflösung der kubischen Gleichungen. Math. Annalen 3. Über binäre Formen. Crelle Journal 74.
34. Gordan, Über die Bildung der Resultante zweier Gleichungen. Math. Annalen 3. Von demselben:
34ª. Resultanten von Kovarianten. Ibid. 4.
34ᵇ. Über Kombinanten. Ibid. 5.
34ᶜ. Über die simultanen Invarianten binärer Formen. Ibid. 5 (1872).
35. Clebsch, Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie. Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften XVII (1872). Auszug Math. Annalen 5.
**36. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig, Teubner 1872. Die vorhergehenden einzelnen Untersuchungen zusammenfassend und erweiternd.
37. Rosanes, Über die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen. Crelle Journal 75. An *8 und *16 anschliessend. Kanonische Form für n binäre Formen n^{ter} Ordnung.

38. Gundelfinger, Simultanes System zweier binärer kubischer Formen. Math. Annalen 7.
*39. Gordan, Über das Formensystem binärer Formen. Leipzig, Teubner 1875. Neue Bildungsprozesse und Endlichkeit des Systems.

Dann:

39ᵃ. Krey, Invarianten und Kovarianten der binären Formen siebenter Ordnung. Dissertation, Göttingen.
*40. Klein, Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Math. Annalen 9. Dazu:
40ᵃ. Wedekind, Beiträge u. s. w. Ibid. 9.
Brioschi, Sopra una classe etc. Annali di Matematica Ser. 2, Bd. 8.
41. Gordan und Noether, Über die algebraischen Formen, deren Hessesche Determinante identisch verschwindet. Math. Annalen Bd. 10 (1875).
42. Bertini, Système simultané de deux formes biquadratiques. Math. Annalen 11.
43. Gordan, Über endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen. Ibid. 12. Von demselben:
43ᵃ. Binäre Formen mit verschwindenden Kovarianten. Ibid. 12.
44. Faà di Bruno, Théorie des formes binaires. Turin 1876.
45. Lindemann, Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires. Bulletin de la Soc. Math. de France Bd. 5, 6.
46. Jordan, Mémoires sur les covariants des formes binaires. Liouville Journal sér. 3, Bd. 2, 5. Grenzen für die Anzahlen der Grundformen des Systems; an Gordan anschliessend.
47. Sylvester, Sur les actions mutuelles des formes invariantives dérivées. Crelle Journal 85 (1878).
47ᵃ. Sylvester, On the limits to the order and degree of the fundamental invariants of the binary quantics. Proc. of the London math. Soc. Bd. 27 (1878).
47ᵇ. Sylvester, Tables of the generating functions and groundforms for the binary Quantics of the first ten orders. American Math. Journal Bd. 2 (1879). Hierzu einige Noten in derselben Zeitschrift im ersten und zweiten Band.
48. Capelli, Sopra la corrispondanza (2, 2) ossia La forma $f(x^2, y^2)$ ed i suoi invarianti e covarianti relativi a due trasformazioni lineari indipendenti delle variabili. Battaglini Journal Bd. 17 (1879).
49. Gall, Das vollständige Formensystem einer binären Form achter Ordnung. Math. Annalen 17.

Anmerkung. Die Bezeichnung durch einen Stern bezieht sich auf die wichtigeren oder die in diesem Buche besonders benutzten Arbeiten.

Verbesserungen.

Seite 13 Zeile 19 v. o. anstatt $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3$ lies $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3$.

„ 28 in Formel 34) ist $+1$ zu streichen.

„ 46 Zeile 2 v. u. anstatt den lies der.

„ 48 „ 11 v. o. „ a_0^2 lies a_0^4.

„ 48 „ 3 v. u. „ denn lies aber.

„ 105 „ 6 v. o. „ nun lies nur.

„ 115 „ 8 v. o. „ am Schlusse lies in Nr. 10.

„ 134 „ 5 v. u. „ $-(a_0a_2-a_1^2)$ lies $-4(a_0a_2-a_1^2)$.

„ 136 „ 9 v. u. „ A lies B.

„ 136 „ 8 v. u. „ „und A... Gleichung“ lies „und B numerische Koefficienten sind, deren linear unabhängige Bestimmungsweisen gleich der Anzahl A der Lösungen dieser Gleichung sind“.

„ 142 „ 5 v. o. „ $(J_4J_{12}-J_8^2)$ lies $(J_4J_{12}-J_8^2)^2$.

„ 166 „ 3 v. o. sind die beiden Faktoren 3 zu streichen.

„ 167 „ 13 v. u. ist der Faktor 2 bei $2(a_0a_5-\ldots)$ zu streichen.

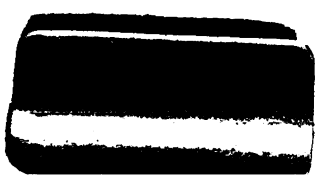
„ 204 „ 11 v. o. im Koefficienten von y^2 lies $-3a_2b_3$ anstatt $+3a_2b_3$.

„ 208 „ 13 v. u. anstatt $(\varphi,\psi)=\vartheta=$ lies $\frac{1}{4}(\varphi,\psi)=\vartheta=$

„ 256. Die Tabelle der A_i stimmt mit den Tafeln am Schlusse des Werkes, wenn man dort $-J_8$, $-J_{12}$ für J_8, J_{12} setzt.

„ 257. Formel 22) lies $-[i,i]$ anstatt $[i,i]$.

805090
805090 1

U.C. BERKELEY LIBRARIES

C040519432